DOI: 10.37863/umzh.v75i3.7322

УДК 517.5

Пелін Озкартепе[1] (Газіантепський університет, Туреччина)

НЕРІВНОСТІ ТИПУ МАРКОВА – НІКОЛЬСЬКОГО В ОБЛАСТЯХ ІЗ ВНУТРІШНІМИ НУЛЬОВИМИ КУТАМИ В ПРОСТОРІ БЕРГМАНА

The order of growth of the module of an arbitrary algebraic polynomial in a weighted Bergman space $A_p(G,h),\ p>0,$ is investigated in the regions with exterior nonzero and interior zero angles at finitely many points of the boundary. We establish estimates of the Markov – Nikolskii type for algebraic polynomials and clarify the behavior of derived polynomials at the points of zeros and poles of the weight function in bounded regions with piecewise-smooth boundary.

Досліджується порядок зростання модуля довільного алгебраїчного полінома у ваговому просторі Бергмана $A_p(G,h)$, $p>0$, в областях, що мають зовнішні ненульові та внутрішні нульові кути у скінченному числі точок межі. Отримано оцінки типу Маркова – Нікольського для алгебраїчних поліномів, а також з'ясовано поведінку похідних поліномів у точках нулів і полюсів вагової функції в обмежених областях з кусково-гладкою межею.

1. Вступ. Нехай $G\subset\mathbb{C}$ — скінченна область, яка містить точку $0\in G$, обмежена жордановою кривою $L:=\partial G$, $\Omega:=\operatorname{ext}L:=\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G}$, де $\overline{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $\Delta:=\{w\colon|w|>1\}$ і $\wp_n$ позначає клас алгебраїчних поліномів $P_n(z),\ \deg P_n\leq n,\ n\in\mathbb{N}$. Нехай $w=\Phi(z)$ — однолисте конформне відображення Ω на Δ, нормоване умовами $\Phi(\infty)=\infty,\ \Phi'(\infty):=\lim_{z\to\infty}\Phi(z)/z>0,$ і $\Psi:=\Phi^{-1}$ — обернене відображення. Для фіксованого $t\geq1$ позначимо

$$L_t:=\{z\colon|\Phi(z)|=t\},\quad L:=L_1,\quad G_t:=\operatorname{int}L_t,\quad \Omega_t:=\operatorname{ext}L_t.$$

Нехай $\{z_j\}_{j=1}^{l}$ — фіксована система різних точок на кривій L, занумерованих у додатному напрямку. Для деякого фіксованого $R_0,\ 1<R_0<\infty,$ і $z\in G_{R_0}$ розглянемо так звану узагальнену вагову функцію Якобі h, яка має вигляд

$$h(z):=h_0(z)\prod_{j=1}^{l}|z-z_j|^{\gamma_j},\quad z\in G_{R_0},\tag{1.1}$$

де $\gamma_j>-2$ для всіх $j=1,2,\ldots,l$ і функція h_0 є рівномірно відокремленою від нуля в G_{R_0}, тобто існує така стала $c_0:=c_0(G_{R_0})>0$, що $h_0(z)\geq c_0>0$ для всіх $z\in G_{R_0}$.

Для $p>0$ та жорданової області G позначимо

$$\|P_n\|_p:=\|P_n\|_{A_p(h,G)}:=\left(\iint\limits_G h(z)|P_n(z)|^p\,d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}},\quad 0<p<\infty,$$

$$\|P_n\|_\infty:=\|P_n\|_{A_\infty(1,G)}:=\max_{z\in\overline{G}}|P_n(z)|,\quad p=\infty,\quad A_p(1,G)=:A_p(G),$$

де σ — плоска міра Лебега в $\mathbb{C}$.

У цій роботі досліджуються нерівності типу Маркова – Нікольського

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_\infty\leq c_1\lambda_n\|P_n\|_p,\quad p>0,\quad m=0,1,2,\ldots,\quad n\in\mathbb{N},\tag{1.2}$$

[1]E-mail: pelinozkartepe@gmail.com.

в яких $c_1 = c_1(G, h, p) > 0$ — стала, залежна лише від указаних параметрів, і $\lambda_n = \lambda_n(G, h, p, m) > 0$ — числова послідовність, на предмет того, з якою швидкістю $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ в залежності від геометричних властивостей області G, вагової функції h та p.

У випадку, коли $m = 0$, оцінки типу (1.2) одержано в [7] при $p > 1$ для областей, обмежених кусково-Діні-гладкими кривими без точок звороту; в [9] при $h \equiv 1$; в [11] для $h(z) \neq 1$, $p > 0$ і областей, обмежених квазіконформними кривими; в [6] для $p > 1$ і областей, обмежених кусково-гладкими кривими без точок звороту; в [10] для $p > 0$ і областей, обмежених асимптотично конформними кривими. Оцінки типу (1.2) для деяких значень параметрів G, p та h для многочленів $P_n \in \wp_n$ та їх похідних досліджено в [2 – 5, 12 – 14, 18, 25, 27 – 31, 35].

Ми зосереджуємося на співвідношенні (1.2) у випадку, коли $p > 0$, $m \in \mathbb{N}$, а межа області G є кусково-гладкою кривою, що має зовнішні ненульові кути та внутрішні нульові кути, а також для вагової функції h, означеної в (1.1).

Наведемо деякі означення та позначення, які будемо використовувати далі.

Нехай S — спрямлювана жорданова крива або дуга, $|S| := \operatorname{mes} S$ (лінійна міра кривої S) і $z = z(s)$, $s \in [0, |S|]$, — натуральна параметризація кривої S.

Означення 1.1 [32, с. 48] (див. також [17, с. 32])**.** *Кажуть, що жорданова крива або дуга S є Діні-гладкою, якщо її параметризація $z = z(s)$, $0 \leq s \leq |S|$, задовольняє умови $z'(s) \neq 0$, $0 \leq s \leq |S|$, і $\left|z'(s_2) - z'(s_1)\right| < g(s_2 - s_1)$, $s_1 < s_2$, де g — зростаюча функція, для якої*

$$\int\limits_0^1 \frac{g(x)}{x}\, dx < \infty.$$

Тепер означимо новий клас областей з кусково-Діні-гладкою межею, яка має кути та внутрішні точки звороту одночасно.

Скрізь далі позначатимемо через $c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ додатні сталі, а через $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ достатньо малі додатні числа, взагалі кажучи, різні у різних співвідношеннях, залежні від G. Тут і далі для будь-якого цілого $k \geq 0$ і натурального $m > k$ під $j = \overline{k, m}$ розуміємо таке: $j = k, k+1, \ldots, m$.

Означення 1.2 [8]**.** *Будемо казати, що жорданова область G належить $PDS(1; \lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, l}$, якщо $L = \partial G$ складається з об'єднання скінченних гладких дуг Діні $\{L_j\}_{j=0}^{l}$, що з'єднуються в точках $\{z_j\}_{j=0}^{l} \in L$, таких, що L є локально Діні-гладким в z_0, і вони мають зовнішні* (*щодо* $\overline{G}$) *кути розхилу $\lambda_j \pi$, $0 < \lambda_j \leq 2$, у кутових точках $\{z_j\}_{j=1}^{l} \in L$, де зустрічаються дві дуги.*

Припустимо, без втрати загальності, що задана область $G \in PDS(1; \lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, $0 < \lambda_i \leq 2$ (див. означення 1.2) така, що в кожній точці $z_i \in L$, $i = \overline{1, l_1}$, $l_1 \leq l$, вона має зовнішній (щодо $\overline{G}$) ненульовий кут $\lambda_i \pi$, $0 < \lambda_i < 2$, а в кожній точці $z_j \in L$, $j = \overline{l_1 + 1, l}$, — внутрішній (щодо $\overline{G}$) нульовий кут, тобто зовнішній кут розхилу 2π. Якщо $l_1 = l = 0$, то область G не має жодних кутів, і в цьому випадку будемо писати $G \in DS(1) \equiv DS$; якщо $l_1 = l \geq 1$, то G має лише $\lambda_i \pi$, $0 < \lambda_i < 2$, $i = \overline{1, l_1}$, зовнішніх ненульових кутів, і в цьому випадку будемо писати $G \in PDS(1; \lambda_i)$; якщо $l_1 = 0$ і $l \geq 1$, то G має лише внутрішні нульові кути, і у цьому випадку будемо писати $G \in PDS(1; 2)$.

Далі будемо вважати, що точки $\{z_j\}_{j=1}^{l} \in L$, означені в (1.1) і в означенні 1.2, збігаються і $w_j := \Phi(z_j)$.

Для спрощення викладу та міркувань, без втрати загальності, візьмемо $l_1 = 1$ і $l = 2$ (випадок $l_1 \geq 2$, $l \geq 3$ розглядається аналогічно). Тоді при цьому припущенні далі матимемо область $G \in PDS(1; \lambda_1, 2)$, $0 < \lambda_1 < 2$, таку, що в точці $z_1 \in L$ область G має зовнішній ненульовий кут $\lambda_1 \pi$, $0 < \lambda_1 < 2$, а в точці $z_2 \in L$ — внутрішній нульовий кут. Також будемо писати $G \in PDS(1; \lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 2$, якщо область G має зовнішні ненульові кути $\lambda_i \pi$, $0 < \lambda_i < 2$, у точках $z_1, z_2 \in L$, і $G \in PDS(1; 2, 2)$, якщо область G має внутрішні нульові кути в точках $z_1, z_2 \in L$.

2. Основні результати. Тепер встановимо оцінки для $\left|P_n^{(m)}(z)\right|$, $m \geq 0$, в обмежених областях $G \in PDS(1, \lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, 2}$.

Теорема 2.1. *Нехай* $p > 0$, $G \in PDS(1; \lambda_1, 2)$ *для деякого* $0 < \lambda_1 < 2$, $h(z)$ *означена в* (1.1) *для* $l = 2$. *Тоді для кожного* $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, *та всіх* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *маємо*

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_\infty \leq c_1 \mu_n \|P_n\|_p, \tag{2.1}$$

де $c_1 = c_1(G, \gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, p) > 0$ — *стала, незалежна від* n *та* z,

$$\mu_n := \begin{cases} n^{\frac{(2+\gamma_1)\lambda_1}{p} + 2m}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad \gamma_1 \geq \dfrac{2}{\lambda_1}(2+\gamma_2) - 2, \quad \gamma_2 \geq 0, \\ n^{2\left(\frac{2+\gamma_2}{p} + m\right)}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad 0 < \gamma_1 < \dfrac{2}{\lambda_1}(2+\gamma_2) - 2, \quad \gamma_2 \geq 0, \\ n^{2\left(\frac{2}{p} + m\right)}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad -2 < \gamma_1 < 0, \quad -2 < \gamma_2 < 0. \end{cases}$$

Нехай крива L має ненульовий зовнішній кут в точці z_1 і нульовий внутрішній кут в точці z_2. В цьому випадку отримуємо такі наслідки з теореми 2.1.

***Наслідок* 2.1.** *Нехай* $p > 0$, $G \in PDS(1; \lambda_1, \lambda_2)$ *для деякого* $0 < \lambda_j < 2$, $j = 1, 2$, $h(z)$ *означена в* (1.1) *для* $l = 2$. *Тоді для кожного* $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, *та всіх* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *маємо*

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_\infty \leq c_2 n^{m\widetilde{\lambda}} \mu_{n,1} \|P_n\|_p, \tag{2.2}$$

де $c_2 = c_2(G, \gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, \lambda_2, p) > 0$ — *стала, незалежна від* z *і* n, *та*

$$\mu_{n,1} := \begin{cases} n^{\frac{(2+\gamma_1)\lambda_1}{p}}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad 0 < \lambda_2 < 2, \quad \gamma_1 \geq \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}(2+\gamma_2) - 2, \quad \gamma_2 > 0, \\ n^{\frac{(2+\gamma_2)\lambda_2}{p}}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad 0 < \lambda_2 < 2, \quad 0 < \gamma_1 < \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}(2+\gamma_2) - 2, \quad \gamma_2 > \dfrac{1}{\lambda_2} - 2, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}}, & 0 < \lambda_1 \leq \dfrac{1}{2}, \quad 0 < \lambda_2 \leq \dfrac{1}{2}, \quad 0 < \gamma_1 \leq \dfrac{1}{\lambda_1} - 2, \quad \gamma_2 = \dfrac{1}{\lambda_2} - 2, \\ n^{\frac{1}{p}}, & 0 < \lambda_1 \leq \dfrac{1}{2}, \quad 0 < \lambda_2 \leq \dfrac{1}{2}, \quad -2 < \gamma_1 < \dfrac{1}{\lambda_1} - 2, \quad -2 < \gamma_2 < \dfrac{1}{\lambda_2} - 2, \\ n^{\frac{2\widetilde{\lambda}}{p}}, & \dfrac{1}{2} < \lambda_1 < 2, \quad \dfrac{1}{2} < \lambda_2 < 2, \quad -2 < \gamma_1 < 0, \quad -2 < \gamma_2 < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{\lambda} := \max\{\lambda_1; \lambda_2\}.$$

Нехай крива L в обох точках z_1 і z_2 має внутрішні нульові кути. У цьому випадку отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.2. *Нехай* $p > 0$, $G \in PDS(1;2,2)$, $h(z)$ *означена в* (1.1) *для* $l = 2$. *Тоді для кожного* $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, *та всіх* $m = 0,1,2,\ldots$ *маємо*

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|_\infty \leq c_3 n^{2m} \mu_{n,2} \|P_n\|_p, \tag{2.3}$$

де $c_3 = c_3(G, \gamma_1, \gamma_2, p) > 0$ — *стала, незалежна від* z *і* n, $\widetilde{\gamma}$ *означене, як в* (2.1),

$$\mu_{n,2} := \begin{cases} n^{\frac{2(2+\widetilde{\gamma}_1)}{p}}, & \gamma_1 \geq \gamma_2, \quad \gamma_2 > 0, \\ n^{\frac{2(2+\widetilde{\gamma}_2)}{p}}, & \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > \gamma_1, \\ n^{\frac{4}{p}}, & -2 < \gamma_1 < 0, \quad -2 < \gamma_2 < 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

і $\widetilde{\gamma}_j := \max\{0;\gamma_j\}$, $\widetilde{\lambda}_j := \max\{1;\lambda_j\}$, $j = 1,2$.

Тепер можемо встановити оцінки для $\left|P_n^{(m)}(z)\right|$, $m \geq 1$, в критичних точках z_j, $j = 1,2$, в обмежених областях $G \in PDS(1;\lambda_1,\lambda_2)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1,2}$.

Теорема 2.2. *Нехай* $p > 0$, $G \in PDS(1;\lambda_1,\lambda_2)$ *для деякого* $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1,2}$, $h(z)$ *означена в* (1.1) *для* $l = 2$. *Тоді для кожного* $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, *та всіх* $m = 0,1,2,\ldots$ *маємо*

$$\left| P_n^{(m)}(z_j) \right| \leq c_4 \mu_{n,3} \|P_n\|_p, \tag{2.5}$$

де $c_4 = c_4(G, \gamma_j, \lambda, p) > 0$ — *стала, незалежна від* n *і* z, $\widetilde{\gamma}_j := \max\{0;\gamma_j\}$, $\widetilde{\lambda}_j := \max\{1;\lambda_j\}$, $j = 1,2$, *і*

$$\mu_{n,3} := \begin{cases} n^{\left(\frac{2+\widetilde{\gamma}_j}{p}+m\right)\widetilde{\lambda}_j}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_j)\widetilde{\lambda}_j > 1, \\ n^{m\widetilde{\lambda}_j+\frac{1}{p}}(\ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_j)\widetilde{\lambda}_j = 1, \\ n^{m\widetilde{\lambda}_j+\frac{1}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_j)\widetilde{\lambda}_j < 1. \end{cases}$$

Точність оцінок (2.1) – (2.3) і (2.5) з'ясовується порівнянням їх з наступним результатом.

***Зауваження* 2.1** [12, 19]. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує такий поліном Q_n^*, $T_n^* \in \wp_n$, що для одиничного круга B та вагової функції $h^*(z) = |z - z_1|^2$ справедливим є таке:

$$\left\|(Q_n^*)'\right\|_{C(\overline{B})} \succeq n\|Q_n^*\|_{C(\overline{B})} \succeq n^2\|Q_n^*\|_{A_2(B)},$$

$$|T_n^*(z_1)| \succeq n^2\|T_n^*\|_{A_2(h^*,B)}.$$

3. Допоміжні твердження. Для невід'ємних функцій $a > 0$ і $b > 0$ будемо використовувати позначення $a \preceq b$ (порядкова нерівність), якщо $a \leq cb$, і $a \asymp b$ еквівалентні, якщо $c_1 a \leq b \leq c_2 a$ для деяких сталих c, c_1, c_2 (незалежних від a та b).

В [15; 26, c. 97; 33] наведено таке означення K-квазіконформної кривої.

Означення 3.1 [26, c. 97; 33]. *Жорданова крива (або дуга)* L *називається* K*-квазіконформною* ($K \geq 1$), *якщо існує* K*-квазіконформне відображення* f *області* $D \supset L$ *таке, що* $f(L)$ *є колом* (*або лінійним сегментом*).

Нехай $F(L)$ *позначає множину всіх плоских гомеоморфізмів* f, *що зберігають орієнтацію, області* $D \supset L$, *таких, що* $f(L)$ *є лінійним сегментом* (*або колом*), *і*

$$K_L := \inf\{K(f) \colon f \in F(L)\},$$

де $K(f)$ — *максимальна дилатація такого відображення* f. *Тоді* L *є квазіконформною кривою, якщо* $K_L < \infty$, *і* K*-квазіконформною кривою, якщо* $K_L \leq K$.

Відповідно до критерію «трьох точок» [15, с. 100], кожна кусково-гладка крива Діні (без будь-яких нульових кутів) є квазіконформною.

Лема 3.1 [1]. *Нехай* L *є* K*-квазіконформною кривою,* $z_1 \in L$, $z_2, z_3 \in \Omega \cap \{z \colon |z - z_1| \preceq d(z_1, L_{r_0})\}$, $w_j = \Phi(z_j)$, $(z_2, z_3 \in G \cap \{z \colon |z - z_1| \preceq d(z_1, L_{R_0})\}$, $w_j = \varphi(z_j))$, $j = 1, 2, 3$. *Тоді*:

a) *твердження* $|z_1 - z_2| \preceq |z_1 - z_3|$ *та* $|w_1 - w_2| \preceq |w_1 - w_3|$ *еквівалентні, отже, так само* $|z_1 - z_2| \asymp |z_1 - z_3|$ *та* $|w_1 - w_2| \asymp |w_1 - w_3|$;

b) *якщо* $|z_1 - z_2| \preceq |z_1 - z_3|$, *то*

$$\left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^{-2}} \preceq \left|\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right| \preceq \left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^2},$$

де $0 < r_0 < 1$, $R_0 := r_0^{-1}$ — *стала, що залежить від* G.

Нагадаємо, що для $0 < \delta_j < \delta_0 := \dfrac{1}{4} \min\big\{|z_i - z_j| \colon i, j = 1, 2, \ldots, l, \ i \neq j\big\}$ покладено $\Omega(z_j, \delta_j) := \Omega \cap \{z \colon |z - z_j| \leq \delta_j\}$, $\delta := \min_{1 \leq j \leq l} \delta_j$, $\Omega(\delta) := \bigcup_{j=1}^{l} \Omega(z_j, \delta)$, $\widehat{\Omega} := \Omega \backslash \Omega(\delta)$. Також нехай

$$\Delta_j := \Phi(\Omega(z_j, \delta)), \quad \Delta(\delta) := \bigcup_{j=1}^{l} \Phi(\Omega(z_j, \delta)), \quad \widehat{\Delta}(\delta) := \Delta \backslash \Delta(\delta).$$

Наступна лема є наслідком результатів, наведених у [32, с. 41–58; 17, с. 32–36], та оцінки для $\left|\Psi'\right|$ (див., наприклад, [16], § 2.8):

$$\left|\Psi'(\tau)\right| \asymp \frac{d(\Psi(\tau), L)}{|\tau| - 1}.$$

Лема 3.2. *Нехай жорданова область* $G \in PDS(1; \lambda_j)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, l_1}$. *Тоді:*

i) $|\Psi(w) - \Psi(w_j)| \asymp |w - w_j|^{\lambda_j}$, $\left|\Psi'(w)\right| \asymp |w - w_j|^{\lambda_j - 1}$ *для довільного* $w \in \Delta_j$;

ii) $|\Psi(w) - \Psi(w_j)| \asymp |w - w_j|$, $\left|\Psi'(w)\right| \asymp 1$ *для довільного* $w \in \overline{\Delta} \backslash \Delta_j$.

Лема 3.3 [4]. *Нехай* L — *квазіконформна крива і* h — *функція, означена в* (1.1). *Тоді для кожного* $P_n(z) \in \wp_n$, *довільного* $R > 1$ *та* $n = 1, 2, \ldots$ *маємо*

$$\|P_n\|_{A_p(h, G_R)} \preceq \widetilde{R}^{n + \frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h, G)}, \quad p > 0,$$

де $\widetilde{R} = 1 + c(R - 1)$, *а* c *не залежить від* n *і* R.

Лема 3.4. *Нехай* $G \in C_\theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, l}$. *Тоді для кожного* $P_n(z) \in \wp_n$ *і довільного* $p > 0$ *маємо*

$$\|P_n\|_{A_p(h, G_{1 + c/n})} \preceq \|P_n\|_{A_p(h, G)}.$$

Цей факт випливає із [19] (лема 2.4), позаяк $PDS(1; \lambda_j) \subset C_\theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, l}$.

4. Доведення теорем. ***Доведення теореми*** **2.1.** Нехай $G \in PDS(1; \lambda_1, \lambda_2)$ для деяких $0 < \lambda_j \leq 2,\ j = \overline{1,2},\ h$ означена в (1.1).

Спочатку доведемо теорему для випадку $m = 0$. Нехай $\{\xi_j\},\ 1 \leq j \leq k,$ — корені полінома P_n, які лежать в Ω. Позначимо

$$b_j(z) := \frac{\Phi(z) - \Phi(\xi_j)}{1 - \overline{\Phi(\xi_j)}\Phi(z)}, \quad z \in \Omega, \tag{4.1}$$

і нехай

$$B_k(z) := \prod_{j=1}^{k} b_j(z), \quad z \in \Omega. \tag{4.2}$$

Функція B_k є функцією Бляшке щодо нулів $\{\xi_j\},\ 1 \leq j \leq k$, полінома P_n, що лежать в Ω.

Оскільки

$$B_k(\xi_j) = 0, \quad |B_k(z)| \equiv 1, \quad z \in L, \quad |B_k(z)| < 1, \quad z \in \Omega, \tag{4.3}$$

то для кожного $\varepsilon_1,\ 0 < \varepsilon_1 < 1$, існує коло $\left\{w\colon |w| = R_1 := 1 + \varepsilon_2,\ 0 < \varepsilon_2 < \dfrac{\varepsilon_1}{n}\right\}$ таке, що $|b_j(\zeta)| > 1 - \varepsilon_2,\ \zeta \in L_{R_1}$, для кожного $j = \overline{1,k}$. Отже, для $B_k(z)$ маємо

$$|B_k(\zeta)| > (1 - \varepsilon_2)^k \succeq 1, \quad \zeta \in L_{R_1}. \tag{4.4}$$

Для $p > 0$ покладемо

$$Q_{n,p}(z) := \left[\frac{P_n(z)}{B_k(z)\Phi^{n+1}(z)}\right]^{p/2}, \quad z \in \Omega. \tag{4.5}$$

Зрозуміло, що функція $Q_{n,p}(z)$ є аналітичною в Ω, неперервною на $\overline{\Omega}$, $Q_{n,p}(\infty) = 0$ і не має нулів в Ω (беремо довільну неперервну гілку $Q_{n,p}(z)$ і для цієї гілки дотримуємось такого ж позначення). За інтегральною формулою Коші для Ω маємо

$$Q_{n,p}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{R_1}} Q_{n,p}(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega_{R_1}. \tag{4.6}$$

Звідси, згідно з (4.1) – (4.5), отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} |P_n(z)|^{p/2} &= \frac{\left|B_m(z)\Phi^{n+1}(z)\right|^{\frac{p}{2}}}{2\pi} \int\limits_{L_{R_1}} \left|\frac{P_n(\zeta)}{B_m(\zeta)\Phi^{n+1}(\zeta)}\right|^{p/2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \\ &\preceq \left|\Phi^{n+1}(z)\right|^{\frac{p}{2}} \int\limits_{L_{R_1}} |P_n(\zeta)|^{p/2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Домноживши чисельник і знаменник останнього підінтегрального виразу на $h^{1/2}(\zeta)$, а потім виконавши заміну $\zeta = \Psi(t),\ z = \Psi(w)$ і застосувавши нерівність Гельдера, одержимо

$$\left(\int\limits_{L_{R_1}} \frac{|P_n(\zeta)|^{\frac{p}{2}}}{|\zeta - z|}\,|d\zeta|\right)^2 \le \int\limits_{|t|=R_1} h(\Psi(t))|P_n(\Psi(t))|^p\big|\Psi'(t)\big|^2|dt| \int\limits_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{h(\Psi(t))|\Psi(t)-\Psi(w)|^2}$$

$$= \int\limits_{|t|=R_1} |f_{n,p}(t)|^p|dt| \int\limits_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{h(\Psi(t))|\Psi(t)-\Psi(w)|^2} =: A_n\, D_n(w), \quad (4.8)$$

де $f_{n,p}(t) := h^{\frac{1}{p}}(\Psi(t))P_n(\Psi(t))(\Psi'(t))^{\frac{2}{p}},\ |t| = R_1$.

Щоб оцінити інтеграл A_n, розіб’ємо коло $|t| = R_1$ на n частин $\delta_j,\ j = \overline{1,n}$, з $\operatorname{mes}\delta_j = \dfrac{2\pi R_1}{n}$, а потім застосуємо теорему про середнє:

$$A_n := \int\limits_{|t|=R_1} |f_{n,p}(t)|^p|dt| = \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\delta_j} |f_{n,p}(t)|^p|dt| = \sum_{j=1}^{n} |f_{n,p}\big(t'_j\big)|^p \operatorname{mes}\delta_j, \quad t'_j \in \delta_k.$$

З іншого боку, застосовуючи оцінку середнього значення

$$\big|f_{n,p}\big(t'_j\big)\big|^p \le \frac{1}{\pi\Big(\big|t'_j\big|-1\Big)^2} \iint\limits_{|\xi-t'_j|<|t'_j|-1} |f_{n,p}(\xi)|^p d\sigma_\xi,$$

знаходимо

$$A_n \preceq \sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{mes}\delta_j}{\pi\Big(\big|t'_j\big|-1\Big)^2} \iint\limits_{|\xi-t'_j|<|t'_j|-1} |f_{n,p}(\xi)|^p\, d\sigma_\xi, \quad t'_j \in \delta_j.$$

Враховуючи, що перетинаються не більше двох кіл з центром в t'_j, маємо

$$A_n \preceq \frac{2\pi R_1}{n(R_1-1)^2} \iint\limits_{1<|\xi|<R_1} |f_{n,p}(\xi)|^p\, d\sigma_\xi \preceq n \iint\limits_{1<|\xi|<R_1} |f_{n,p}(\xi)|^p\, d\sigma_\xi.$$

Тепер, застосовуючи лему 3.4, отримуємо

$$A_n \preceq n \iint\limits_{G_R\setminus G} h(\zeta)|P_n(\zeta)|^p\, d\sigma_\zeta \preceq n\|P_n\|_p^p. \quad (4.9)$$

Щоб оцінити інтеграл $D_n(w)$, позначимо $w_j := \Phi(z_j),\ \varphi_j := \arg w_j$ і

$$\Delta_1(\rho) := \left\{t = re^{i\theta} : r > \rho,\ \frac{\varphi_0+\varphi_1}{2} \le \theta < \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right\},$$

$$\Delta_2(\rho) := \left\{t = re^{i\theta} : r > \rho,\ \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \le \theta < \frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right\}, \quad \varphi_0 = 2\pi - \varphi_0,$$

$$\Delta_j := \Delta_j(1), \quad \Omega^j := \Psi(\Delta_j), \quad \Omega^j_\rho := \Psi(\Delta_j(\rho)),$$

$$L^j := L \cap \overline{\Omega}^j, \quad L^j_\rho := L_\rho \cap \overline{\Omega}^j_\rho, \quad j = 1, 2,$$

$$L = L^1 \cup L^2, \quad L_\rho = L^1_\rho \cup L^2_\rho.$$

У вказаних вище позначеннях із (4.8) для $D_n(w)$ отримаємо

$$\begin{aligned} D_n(w) &= \int\limits_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{h(\Psi(t))|\Psi(t)-\Psi(w)|^2} \\ &\preceq \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Phi(L^j_{R_1})} \frac{|dt|}{\prod_{i=1}^{2} |\Psi(t)-\Psi(w_i)|^{\gamma_i} |\Psi(t)-\Psi(w)|^2} \\ &\asymp \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Phi(L^j_{R_1})} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w_j)|^{\gamma_j} |\Psi(t)-\Psi(w)|^2} =: \sum_{j=1}^{2} D_{n,j}(w), \end{aligned} \tag{4.10}$$

оскільки точки $\{z_j\}_{j=1}^2 \in L$ різні. Отже, нам потрібно оцінити $D_{n,j}(w)$. Для цього візьмемо довільну фіксовану точку $z \in L_R$ і введемо позначення

$$\Phi(L_{R_1}) = \Phi\left(\bigcup_{j=1}^{2} L^j_{R_1}\right) = \bigcup_{j=1}^{2} \Phi\Big(L^j_{R_1}\Big) = \bigcup_{j=1}^{2}\bigcup_{i=1}^{3} K^j_i(R_1), \tag{4.11}$$

де

$$K^j_1(R_1) := \Big\{t \in \Phi\Big(L^j_{R_1}\Big) : |t-w_j| < \frac{c_1}{n}\Big\},$$

$$K^j_2(R_1) := \Big\{t \in \Phi\Big(L^j_{R_1}\Big) : \frac{c_1}{n} \le |t-w_j| < c_2\Big\},$$

$$K^j_3(R_1) := \Big\{t \in \Phi\Big(L^j_{R_1}\Big) : c_2 \le |t-w_j| < c_3 < \operatorname{diam} \overline{G}\Big\}, \quad j=1,2.$$

Аналогічно,

$$\Phi(L_R) = \Phi\left(\bigcup_{j=1}^{2} L^j_R\right) = \bigcup_{j=1}^{2} \Phi\Big(L^j_R\Big) = \bigcup_{j=1}^{2}\bigcup_{i=1}^{3} K^j_i(R),$$

де

$$K^j_1(R) := \left\{\tau \in \Phi\Big(L^j_R\Big) : |\tau-w_j| < \frac{2c_1}{n}\right\},$$

$$K^j_2(R) := \left\{\tau \in \Phi\Big(L^j_R\Big) : \frac{2c_1}{n} \le |\tau-w_j| < c_2\right\},$$

$$K^j_3(R) := \Big\{\tau \in \Phi\Big(L^j_R\Big) : c_2 \le |\tau-w_j| < c_3 < \operatorname{diam} \overline{G}\Big\}, \quad j=1,2.$$

Тоді за цих означень для $w = \Phi(z) \in \Phi(L_R)$ величину $D_{n,j}(w)$ можна записати у вигляді

$$D_{n,j}(w) = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{K^j_i(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w_j)|^{\gamma_j} |\Psi(t)-\Psi(w)|^2} =: \sum_{i=1}^{3} D^i_{n,j}(w). \tag{4.12}$$

Оцінимо величину $D^i_{n,j}(w)$ окремо для кожного $i = 1, 2, 3$ і $j = 1, 2$, залежно від розташування $w \in \Phi(L_R)$. Для визначеності будемо вважати, що $0 < \lambda_1 < 2$ і $\lambda_2 = 2$.

Випадок 1. Нехай $w \in \Phi(L^2_R)$.

Згідно зі вказаними вище позначеннями, встановимо оцінки у випадку $w \in K^j_i(R)$ для кожного $i = 1, 2, 3$.

1.1. Нехай $w \in K^j_1(R)$. Оцінимо величину

$$D_{n,1}(w) = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{K^1_i(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{\gamma_1} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} =: \sum_{i=1}^{3} D^i_{n,1}(w) \tag{4.13}$$

окремо для $\gamma_1 \geq 0$ і $\gamma_1 < 0$.

Для кожного $i = 1, 2, 3$ і $j = 1, 2$ покладемо

$$K^j_{i,1}(R_1) := \left\{ t \in \Phi\left(L^j_{R_1}\right) : |t - w_1| \geq |t - w| \right\}, \quad K^j_{i,2}(R_1) := K^j_i(R_1) \backslash K^j_{i,1}(R_1).$$

1.1.1. Якщо $\gamma_1 \geq 0$, то

$$D^1_{n,1}(w) = \int\limits_{K^j_1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{\gamma_1} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2}$$

$$\preceq \int\limits_{K^j_{1,1}(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^{2+\gamma_1}} + \int\limits_{K^j_{1,2}(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{2+\gamma_1}} =: D^{j,1}_{n,1}(w) + D^{j,2}_{n,1}(w),$$

а отже, згідно з лемою 3.2, маємо

$$D^{1,1}_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_{1,1}(R_1)} \frac{|dt|}{|t - w|^{(2+\gamma_1)\lambda_j}} \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_j} \operatorname{mes} K^1_{1,1}(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1 - 1}, \tag{4.14}$$

$$D^{1,2}_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_{1,2}(R_1)} \frac{|dt|}{|t - w_1|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1} \operatorname{mes} K^1_{1,2}(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1 - 1}. \tag{4.15}$$

Якщо $\gamma_1 < 0$, то

$$D^1_{n,1}(w) = \int\limits_{K^1_1(R_1)} \frac{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{-\gamma_1} |dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \preceq \int\limits_{K^1_1(R_1)} \frac{|t - w_1|^{-\gamma_1\lambda_1} |dt|}{|t - w|^{2\lambda_1}}$$

$$\preceq \left(\frac{1}{n}\right)^{-\gamma_1\lambda_1} n^{2\lambda_1} \operatorname{mes} K^j_1(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1 - 1}. \tag{4.16}$$

1.1.2. Нехай $\gamma_1 \geq 0$, тоді

$$D^2_{n,1}(w) = \int\limits_{K^1_2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{\gamma_1} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2}$$

$$\preceq \int\limits_{K^1_{2,1}(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w)|^{2+\gamma_1}} + \int\limits_{K^1_{2,2}(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w_1)|^{2+\gamma_1}}$$

$$=: D^{2,1}_{n,1}(w) + D^{2,2}_{n,1}(w), \tag{4.17}$$

а отже, на підставі леми 3.2 одержуємо

$$D^{2,1}_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_{2,1}(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1} \operatorname{mes} K^1_{2,1}(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1 - 1} \tag{4.18}$$

і

$$D^{2,2}_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_{2,2}(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w_1|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1. \end{cases} \tag{4.19}$$

Із (4.17) – (4.19) для $\gamma_1 \geq 0$ записуємо

$$D^{2}_{n,1}(w) \preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1. \end{cases} \tag{4.20}$$

Згідно з відомою нерівністю

$$(a+b)^\epsilon \leq c(\epsilon)(a^\epsilon + b^\epsilon), \quad a, b > 0, \quad \epsilon > 0, \tag{4.21}$$

та оцінками

$$|t-w_1| \leq |t-w| + |w-w_1| \preceq |t-w| + \frac{1}{n}$$

і

$$|t-w_1|^{-\gamma_1\lambda_1} \preceq |t-w|^{-\gamma_1\lambda_1} + \left(\frac{1}{n}\right)^{-\gamma_1\lambda_1},$$

для $\gamma_1 < 0$ з (4.13) маємо

$$D^2_{n,1}(w) = \int\limits_{K^1_2(R_1)} \frac{|\Psi(t)-\Psi(w_1)|^{-\gamma_1}|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w)|^2} \preceq \int\limits_{K^1_2(R_1)} \frac{|t-w_1|^{-\gamma_1\lambda_1}|dt|}{|t-w|^{2\lambda_1}}$$

$$\preceq n^{\gamma_1\lambda_1} \int\limits_{K^1_2(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2\lambda_1}} + \int\limits_{K^1_2(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}}$$

$$\preceq n^{\gamma_1\lambda_1} \begin{cases} n^{2\lambda_1-1}, & \text{якщо} \quad 2\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо} \quad 2\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad 2\lambda_1 < 1, \end{cases} + \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1, \end{cases}$$

$$\preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1 - 1}, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1. \end{cases} \tag{4.22}$$

1.1.3. Нехай $\gamma_1 \geq 0$, тоді з леми 3.2 випливає, що

$$D^3_{n,1}(w) = \int\limits_{K^1_3(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{\gamma_1} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \preceq 1. \tag{4.23}$$

Аналогічно, для $\gamma_1 < 0$, також враховуючи лему 3.4, одержуємо

$$D^3_{n,1}(w) \preceq c_3^{-\gamma_1} \int\limits_{K^1_3(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2\lambda_1}} \preceq 1. \tag{4.24}$$

1.2. Нехай $w \in K^1_2(R)$.

1.2.1. Для довільного $\gamma_1 > -2$

$$D^1_{n,1}(w) = \int\limits_{K^1_{1,1}(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^{2+\gamma_1}} + \int\limits_{K^1_{1,2}(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{2+\gamma_1}}$$

$$=: D^{1,1}_{n,1}(w) + D^{1,2}_{n,1}(w), \tag{4.25}$$

а отже, згідно з лемами 3.1 і 3.2, отримуємо

$$D^{1,1}_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_{1,1}(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq \int\limits_{1/n}^{c} \frac{ds}{s^{(2+\gamma_1)\lambda_1}}$$

$$\preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1} \operatorname{mes} K^1_{1,1}(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1 - 1}, \tag{4.26}$$

$$D^{1,2}_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_{1,2}(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w_1|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1} \operatorname{mes} K^1_{1,2}(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1 - 1}. \tag{4.27}$$

1.2.2. Для довільного $\gamma_1 > -2$, згідно з лемами 3.1 і 3.2, маємо

$$D^2_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_{2,1}(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^{2+\gamma_1}} + \int\limits_{K^1_{2,2}(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{2+\gamma_1}}$$

$$\preceq \int\limits_{K^1_{2,1}(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} + \int\limits_{K^1_{2,2}(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}}$$

$$\preceq \int\limits_{1/n}^{c_1} \frac{ds}{s^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} + \int\limits_{1/n}^{c_2} \frac{ds}{s^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1 - 1}, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1. \end{cases} \tag{4.28}$$

1.2.3. Для довільного $\gamma_1 > -2$ на підставі лем 3.1 і 3.2 одержуємо

$$D^3_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_3(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w)|^2} \preceq \int\limits_{K^1_3(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2\lambda_1}} \preceq \int\limits_{1/n}^{c_3} \frac{ds}{s^{2\lambda_1}}$$

$$\preceq \begin{cases} n^{2\lambda_1-1}, & \text{якщо} \quad 2\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо} \quad 2\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad 2\lambda_1 < 1. \end{cases}$$

1.3. Нехай $w \in K^1_3(R)$.

1.3.1. Якщо $\gamma_1 \geq 0$, то з лем 3.1 і 3.2 випливає, що

$$D^1_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1}} \preceq \int\limits_{K^1_1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w_1|^{\gamma_1\lambda_1}}$$

$$\preceq n^{\gamma_1\lambda_1} \operatorname{mes} K^1_1(R_1) \preceq n^{\gamma_1\lambda_1-1} \tag{4.29}$$

і для $\gamma_1 < 0$

$$D^1_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_1(R_1)} |t-w_1|^{-\gamma_1\lambda_1}|dt| \preceq \left(\frac{1}{n}\right)^{-\gamma_1\lambda_1} \operatorname{mes} K^1_1(R_1) \preceq \left(\frac{1}{n}\right)^{-\gamma_1\lambda_1+1} \preceq 1.$$

1.3.2. Для довільного $\gamma_1 > -2$ на підставі лем 3.1 і 3.2 отримуємо

$$D^2_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_{2,1}(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w)|^{2+\gamma_1}} + \int\limits_{K^1_{2,2}(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w_1)|^{2+\gamma_1}}$$

$$\preceq \int\limits_{K^1_{2,1}(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} + \int\limits_{K^1_{2,2}(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}}$$

$$\preceq \int\limits_{1/n}^{c_1} \frac{ds}{s^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} + \int\limits_{1/n}^{c_2} \frac{ds}{s^{(2+\gamma_1)\lambda_1}}$$

$$\preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1. \end{cases} \tag{4.30}$$

1.3.3. Аналогічно, для довільного $\gamma_1 > -2$

$$D^3_{n,1}(w) \preceq \int\limits_{K^1_3(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w)|^2} \preceq \int\limits_{K^1_3(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2\lambda_1}} \preceq n^{2\lambda_1-1}. \tag{4.31}$$

Об'єднуючи оцінки (4.13) – (4.31), для $w \in \Phi(L_R)$ маємо

$$D_{n,1}(w) \preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1 - 1}, & 0 < \lambda_1 \le \dfrac{1}{2}, \quad \gamma_1 > \dfrac{1}{\lambda_1} - 2, \\ \ln n, & 0 < \lambda_1 \le \dfrac{1}{2}, \quad \gamma_1 = \dfrac{1}{\lambda_1} - 2, \\ 1, & 0 < \lambda_1 \le \dfrac{1}{2}, \quad -2 < \gamma_1 < \dfrac{1}{\lambda_1} - 2, \\ n^{(2+\widetilde{\gamma}_1)\lambda_1 - 1}, & \dfrac{1}{2} < \lambda_1 < 2, \quad \gamma_1 > -2, \end{cases} \tag{4.32}$$

де $\widetilde{\gamma}_1 := \max\{0; \gamma_1\}$.

Випадок 2. Нехай $w \in \Phi(L_R^2)$.

По аналогії з випадком 1 одержимо оцінки для $w \in K_1^2(R)$, $w \in K_2^2(R)$ і $w \in K_3^2(R)$.

2.1. Нехай $w \in K_1^2(R) \cup K_2^2(R)$. Оцінимо величину

$$D_{n,2}(w) = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{K_i^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_2)|^{\gamma_2} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} =: \sum_{i=1}^{3} D_{n,2}^i(w) \tag{4.33}$$

окремо для $\gamma_1 \ge 0$ і $\gamma_1 < 0$.

Згідно з оцінкою [34, с. 181] для довільного континуума з простим зв'язним доповненням, маємо

$$|\Psi(t) - \Psi(w_2)| \succeq |t - w_2|^2, \qquad |\Psi(t) - \Psi(w)| \succeq |t - w|^2. \tag{4.34}$$

При встановленні оцінок у цьому випадку будемо використовувати даний факт замість леми 3.2.

2.1.1. Для кожного $i = 1, 2$ одержуємо

$$\sum_{i=1}^{2} D_{n,2}^i(w) = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{K_i^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_2)|^{\gamma_2} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2}$$

$$\preceq \left(\int\limits_{K_{1,1}^2(R_1)} + \int\limits_{K_{2,1}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^{2+\gamma_2}}$$

$$+ \left(\int\limits_{K_{1,2}^2(R_1)} + \int\limits_{K_{2,2}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_2)|^{2+\gamma_2}}$$

$$\preceq \left(\int\limits_{K_{1,1}^2(R_1)} + \int\limits_{K_{2,1}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|t - w|^{2(2+\gamma_2)}} \preceq n^{2(2+\gamma_2)-1}, \tag{4.35}$$

якщо $\gamma_2 \ge 0$, і

$$\sum_{i=1}^{2} D_{n,2}^{i}(w) = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{K_i^2(R_1)} \frac{|\Psi(t)-\Psi(w_2)|^{-\gamma_2}|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w)|^2} \preceq n^3, \tag{4.36}$$

якщо $\gamma_2 < 0$.

2.1.2. Для $i=3$ отримуємо

$$D_{n,2}^{3}(w) = \int\limits_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2}|\Psi(t)-\Psi(w)|^2}$$

$$\preceq c_2^{-\gamma_2} \int\limits_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w)|^2} \preceq \int\limits_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^2} \preceq n, \tag{4.37}$$

якщо $\gamma_2 \geq 0$, і

$$D_{n,2}^{3}(w) \preceq n, \tag{4.38}$$

якщо $\gamma_2 < 0$.

2.2. Нехай $w \in K_3^2(R)$.

2.2.1. Для кожного $\gamma_2 > -2$, аналогічно випадку 2.1.1, маємо

$$\sum_{i=1}^{2} D_{n,2}^{i}(w) = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{K_i^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2}|\Psi(t)-\Psi(w)|^2}$$

$$\preceq \left(\int\limits_{K_{1,1}^2(R_1)} + \int\limits_{K_{2,1}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w)|^{2+\gamma_2}}$$

$$+ \left(\int\limits_{K_{1,2}^2(R_1)} + \int\limits_{K_{2,2}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w_2)|^{2+\gamma_2}}$$

$$\preceq \left(\int\limits_{K_{1,1}^2(R_1)} + \int\limits_{K_{2,1}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|t-w|^{2(2+\gamma_2)}} + \left(\int\limits_{K_{1,2}^2(R_1)} + \int\limits_{K_{2,2}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|t-w_2|^{2(2+\gamma_2)}}$$

$$\preceq \begin{cases} n^{2(2+\gamma_2)-1}, & \text{якщо} \quad 2(2+\gamma_2) > 1, \\ \ln n, & \text{якщо} \quad 2(2+\gamma_2) = 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad 2(2+\gamma_2) < 1. \end{cases} \tag{4.39}$$

2.2.2. Для довільного $\gamma_2 > -2$ отримуємо

$$D_{n,2}^{3}(w) = \int\limits_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2}|\Psi(t)-\Psi(w)|^2}$$

$$\preceq \int\limits_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t)-\Psi(w)|^2} \preceq \int\limits_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^2} \preceq n. \tag{4.40}$$

Об'єднуючи (4.33) – (4.40), одержуємо

$$D_{n,2}(w) \preceq n^{2(2+\widetilde{\gamma}_2)-1}, \tag{4.41}$$

де $\widetilde{\gamma}_2 := \max\{0;\gamma_2\}$.

Звідси, згідно зі співвідношеннями (4.10), (4.12), (4.32) і (4.41), записуємо

$$D_n(w) \preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & 0<\lambda_1\le\frac{1}{2}, \quad \gamma_1>\frac{1}{\lambda_1}-2, \\ \ln n, & 0<\lambda_1\le\frac{1}{2}, \quad \gamma_1=\frac{1}{\lambda_1}-2, \\ 1, & 0<\lambda_1\le\frac{1}{2}, \quad -2<\gamma_1<\frac{1}{\lambda_1}-2, \\ n^{(2+\widetilde{\gamma}_1)\lambda_1-1}, & \frac{1}{2}<\lambda_1<2, \quad \gamma_1>-2, \end{cases} + n^{2(2+\widetilde{\gamma}_2)-1}, \tag{4.42}$$

де $\widetilde{\gamma}_j := \max\{0;\gamma_j\}$, $\widetilde{\lambda}_1 := \max\{1;\lambda_1\}$.

Об'єднуючи оцінки (4.7) – (4.10) і (4.42), для довільного $z\in L_R$ отримуємо

$$|P_n(z)| \preceq \mu_n \|P_n\|_p, \tag{4.43}$$

де

$$\mu_n := \begin{cases} n^{\frac{(2+\gamma_1)\lambda_1}{p}}, & 0<\lambda_1\le\frac{1}{2}, \quad \gamma_1>\frac{1}{\lambda_1}-2, \\ (n\ln n)^{\frac{1}{p}}, & 0<\lambda_1\le\frac{1}{2}, \quad \gamma_1=\frac{1}{\lambda_1}-2, \\ n^{\frac{1}{p}}, & 0<\lambda_1\le\frac{1}{2}, \quad -2<\gamma_1<\frac{1}{\lambda_1}-2, \\ n^{\frac{(2+\widetilde{\gamma}_1)\lambda_1}{p}}, & \frac{1}{2}<\lambda_1<2, \quad \gamma_1>-2, \end{cases} + n^{\frac{2(2+\widetilde{\gamma}_2)}{p}}$$

$$= \begin{cases} n^{\frac{(2+\gamma_1)\lambda_1}{p}}, & 0<\lambda_1<2, \quad \gamma_1\ge\frac{2}{\lambda_1}(2+\gamma_2)-2, \quad \gamma_2\ge 0, \\ n^{\frac{2(2+\gamma_2)}{p}}, & 0<\lambda_1<2, \quad 0<\gamma_1<\frac{2}{\lambda_1}(2+\gamma_2)-2, \quad \gamma_2\ge 0, \\ n^{\frac{4}{p}}, & 0<\lambda_1<2, \quad -2<\gamma_1<0, \quad -2<\gamma_2<0. \end{cases}$$

Відповідно, з (4.7) – (4.9) випливає твердження теореми 2.1 для довільного $z\in L_R$, а отже, воно також справедливе для $z\in\overline{G}$, що завершує доведення для $m=0$.

Переходимо тепер до випадку $m\ge 1$. Нехай $z\in L$ — довільна фіксована точка і

$$B(z,d(z,L_R)) := \{t\colon |t-z|<d(z,L_R)\}.$$

З інтегрального зображення Коші маємо

$$P_n^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(z,d(z,L_R)} \frac{P_n(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}}, \quad z \in L, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{4.44}$$

Отже,

$$\left|P_n^{(m)}(z)\right| \leq \frac{m!}{2\pi} \int\limits_{\partial B(z,d(z,L_R)} |P_n(\zeta)| \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{m+1}} \preceq \max_{z \in \overline{G}_R} |P_n(\zeta)| \sup_{z \in L} \left\{\frac{1}{d^m(z, L_R)}\right\}. \tag{4.45}$$

Аналогічно відомій лемі Бернштейна – Уолша [36], із (4.43) маємо

$$\max_{z \in \overline{G}_R} |P_n(\zeta)| \preceq \|P_n\|_{C(\overline{G})} \preceq \mu_n \|P_n\|_p. \tag{4.46}$$

З іншого боку,

$$\sup_{z \in L} \left\{\frac{1}{d(z, L_R)}\right\} \asymp \sup\left\{\sup_{z \in L^1} \left\{\frac{1}{d(z, L_R)}\right\}; \sup_{z \in L^2} \left\{\frac{1}{d(z, L_R)}\right\}\right\} \preceq n^{m\widetilde{\lambda}_j}.$$

Отже,

$$\left|P_n^{(m)}(z)\right| \preceq n^{m\widetilde{\lambda}_j} \mu_n \|P_n\|_p,$$

що доводить теорему 2.1.

***Доведення теореми* 2.2.** Нехай $G \in PDS(1; \lambda_1, \lambda_2)$ для деяких $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = 1, 2$, $h(z)$ означена за допомогою (1.1). Із (4.44) – (4.46) отримуємо

$$\left|P_n^{(m)}(z_j)\right| \preceq \mu_n \|P_n\|_p \frac{1}{d^m(z_j, L_R)}, \quad j = 1, 2.$$

Оскільки, згідно з лемою 3.2,

$$d(z_j, L_R) \succeq n^{-\widetilde{\lambda}_j}, \quad j = 1, 2,$$

то

$$\left|P_n^{(m)}(z_1)\right| \preceq \|P_n\|_p \, n^{m\widetilde{\lambda}_1} \begin{cases} n^{\frac{(2+\widetilde{\gamma}_1)\widetilde{\lambda}_1}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_1)\widetilde{\lambda}_1 > 1, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_1)\widetilde{\lambda}_1 = 1, \\ n^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_1)\widetilde{\lambda}_1 < 1, \end{cases}$$

$$= \|P_n\|_p \begin{cases} n^{\left(\frac{2+\widetilde{\gamma}_1}{p}+m\right)\widetilde{\lambda}_1}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_1)\widetilde{\lambda}_1 > 1, \\ n^{m\widetilde{\lambda}_1+\frac{1}{p}} (\ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_1)\widetilde{\lambda}_1 = 1, \\ n^{m\widetilde{\lambda}_1+\frac{1}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_1)\widetilde{\lambda}_1 < 1, \end{cases}$$

$$\left|P_n^{(m)}(z_2)\right| \preceq \|P_n\|_p \, n^{m\widetilde{\lambda}_2} \begin{cases} n^{\frac{2(2+\widetilde{\gamma}_2)}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_2)\widetilde{\lambda}_2 > 1, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_2)\widetilde{\lambda}_2 = 1, \\ n^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_2)\widetilde{\lambda}_2 < 1, \end{cases}$$

$$= \|P_n\|_p \begin{cases} n^{\left(\frac{2+\widetilde{\gamma}_2}{p}+m\right)\widetilde{\lambda}_2}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_2)\widetilde{\lambda}_2 > 1, \\ n^{m\widetilde{\lambda}_2+\frac{1}{p}}(\ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_2)\widetilde{\lambda}_2 = 1, \\ n^{m\widetilde{\lambda}_2+\frac{1}{p}}, & \text{якщо} \quad (2+\widetilde{\gamma}_2)\widetilde{\lambda}_2 < 1, \end{cases}$$

що й доводить теорему 2.2.

Література

1. F. G. Abdullayev, V. V. Andrievskii, *On the orthogonal polynomials in the domains with K-quasiconformal boundary*, (in Russian), Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR, Ser. Fiz., Tech., Mat., **4**, № 1, 7 – 11 (1983).
2. F. G. Abdullayev, *On the some properties on orthogonal polynomials over the regions of complex plane 1*, Ukr. Math. J., **52**, № 12, 1807 – 1817 (2000).
3. F. G. Abdullayev, *On the some properties of the orthogonal polynomials over the region of the complex plane (Part III)*, Ukr. Math. J., **53**, № 12, 1934 – 1948 (2001).
4. F. G. Abdullayev, U. Deger, *On the orthogonal polynomials with weight having singularities on the boundary of regions in the complex plane*, Bull. Belg. Math. Soc., **16**, № 2, 235 – 250 (2009).
5. F. G. Abdullayev, N. D. Aral, *On Bernstein – Walsh-type lemmas in regions of the complex plane*, Ukr. Math. J., **63**, № 3, 337 – 350 (2011).
6. F. G. Abdullayev, C. D. Gün, *On the behavior of the algebraic polynomials in regions with piecewise smooth boundary without cusps*, Ann. Polon. Math., **111**, 39 – 58 (2014).
7. F. G. Abdullayev, N. P. Özkartepe, *On the behavıor of the algebraıc polynomıal in unbounded regıons wıth pıecewıse Dını – Smooth boundary*, Ukr. Math. J., **66**, № 5, 579 – 597 (2014).
8. F. G. Abdullayev, P. Özkartepe, *On the growth of algebraic polynomials in the whole complex plane*, J. Korean Math. Soc., **52**, № 4, 699 – 725 (2015).
9. F. G. Abdullayev, N. P. Özkartepe, *Uniform and pointwise Bernstein – Walsh-type inequalities on a quasidisk in the complex plane*, Bull. Belg. Math. Soc., **23**, № 2, 285 – 310 (2016).
10. F. G. Abdullayev, T. Tunç, *Uniform and pointwise polynomial inequalities in regions with asymptotically conformal curve on weighted Bergman space*, Lobachevskii J. Math., **38**, № 2, 193 – 205 (2017).
11. F. G. Abdullayev, T. Tunc, G. A. Abdullayev, *Polynomial inequalities in quasidisks on weighted Bergman space*, Ukr. Math. J., **69**, № 5, 675 – 695 (2017).
12. F. G. Abdullayev, C. D. Gün, *Bernstein – Nikolskii-type inequalities for algebraic polynomials in Bergman space in regions of complex plane*, Ukr. Math. J., **73**, № 4, 513 – 531 (2021).
13. F. G. Abdullayev, C. D. Gün, *Bernstein – Walsh-type inequalities for derivatives of algebraic polynomials*, Bull. Korean Math. Soc., **59**, № 1, 45 – 72 (2022); DOI.org/10.4134/BKMS.b210023.
14. F. G. Abdullayev, *Bernstein – Walsh-type inequalities for derivatives of algebraic polynomials in quasidiscs*, Open Math., **19**, 1847 – 1876 (2021).
15. L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand, Princeton, NJ (1966).
16. V. V. Andrievskii, V. I. Belyi, V. K. Dzyadyk, *Conformal invariants in constructive theory of functions of complex plane*, World Federation Publ. Co., Atlanta (1995).
17. V. V. Andrievskii, H. P. Blatt, *Discrepancy of signed measures and polynomial approximation*, Springer-Verlag, New York (2010).
18. V. V. Andrievskii, *Weighted polynomial inequalities in the complex plane*, J. Approx. Theory, **164**, № 9, 1165 – 1183 (2012).
19. S. Balcı, M. Imashkyzy, F. G. Abdullayev, *Polynomial inequalities in regions with interior zero angles in the Bergman space*, Ukr. Math. J., **70**, № 3, 362 – 384 (2018).
20. D. Benko, P. Dragnev, V. Totik, *Convexity of harmonic densities*, Rev. Mat. Iberoam., **28**, № 4, 1 – 14 (2012).
21. S. N. Bernstein, *Sur la limitation des derivees des polnomes*, C. R. Acad. Sci. Paris, **190**, 338 – 341 (1930).
22. S. N. Bernstein, *On the best approximation of continuos functions by polynomials of given degree*, Izd. Akad. Nauk SSSR, **I** (1952); **II** (1954) (O nailuchshem priblizhenii nepreryvnykh funktsii posredstrvom mnogochlenov dannoi stepeni), Sobraniye sochinenii, **I** (4), 11 – 10 (1912).

23. V. K. Dzyadyk, I. A. Shevchuk, *Theory of uniform approximation of functions by polynomials*, Walter de Gruyter, Berlin, New York (2008).
24. V. K. Dzjadyk, *Introduction to the theory of uniform approximation of function by polynomials*, Nauka, Moskow (1977).
25. D. Jackson, *Certain problems on closest approximations*, Bull. Amer. Math. Soc., **39**, 889 – 906 (1933).
26. O. Lehto, K. I. Virtanen, *Quasiconformal mapping in the plane*, Springer-Verlag, Berlin (1973).
27. D. I. Mamedhanov, *Inequalities of S. M. Nikol'skii type for polynomials in the complex variable on curves*, Soviet Mat. Dokl., **15**, 34 – 37 (1974).
28. G. V. Milovanovic, D. S. Mitrinovic, Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros*, World Sci., Singapore (1994).
29. S. M. Nikol'skii, *Approximation of function of several variable and imbeding theorems*, Springer-Verlag, New York (1975).
30. P. Özkartepe, *Uniform and pointwise polynomial estimates in regions with interior and exterior cusps*, Cumhuriyet Sci. J., **39**, № 1, 47 – 65 (2018).
31. I. Pritsker, *Comparing norms of polynomials in one and several variables*, J. Math. Anal. and Appl., **216**, 685 – 695 (1997).
32. Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen (1975).
33. S. Rickman, *Characterization of quasiconformal arcs*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math., **395**, 7 – 30 (1966).
34. P. M. Tamrazov, *Smoothness and polynomial approximations* (in Russian), Naukova Dumka, Kiev (1975).
35. G. Szegö, A. Zygmund, *On certain mean values of polynomials*, J. Anal. Math., **3**, № 1, 225 – 244 (1953).
36. J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Amer. Math. Soc., Rhode Island (1960).

Одержано 18.09.22