DOI: 10.37863/umzh.v75i4.7411

УДК 517.5

Анатолій Сердюк, Тетяна Степанюк[1] (Інститут математики НАН України, Київ)

РІВНОМІРНІ НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ФУР'Є НА МНОЖИНАХ ЗГОРТОК ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВИСОКОЇ ГЛАДКОСТІ

On the sets of 2π-periodic functions f specified by the (ψ,β)-integrals of the functions φ from L_1, we establish Lebesgue-type inequalities in which the uniform norms of deviations of the Fourier sums are expressed via the best approximations by trigonometric polynomials of the functions φ in the mean. It is proved that obtained estimates are asymptotically unimprovable in the case where the sequences $\psi(k)$ approach zero faster than any power function. In some important cases, we establish asymptotic equalities for the exact upper boundaries of the uniform approximations by Fourier sums in the classes of (ψ,β)-integrals of the functions φ that belong to the unit ball in the space L_1.

На множинах 2π-періодичних функцій f, що задаються (ψ,β)-інтегралами від функцій φ із L_1, встановлено нерівності типу Лебега, в яких рівномірні норми відхилень сум Фур'є виражаються через найкращі наближення в середньому тригонометричними поліномами функцій φ. Доведено асимптотичну непокращуваність одержаних оцінок за умови, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію. В деяких важливих випадках встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж рівномірних наближень сумами Фур'є на класах (ψ,β)-інтегралів від функцій φ, що належать одиничній кулі з простору L_1.

1. Вступ. Нехай L_1 — простір 2π-періодичних сумовних на $[0,2\pi)$ функцій f, в якому норма задається формулою $\|f\|_1=\int\limits_0^{2\pi}|f(t)|dt$; L_∞ — простір вимірних і суттєво обмежених 2π-періодичних функцій f з нормою $\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}_t|f(t)|$; C — простір неперервних 2π-періодичних функцій f з нормою $\|f\|_C=\max_t|f(t)|$.

Нехай $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних невід'ємних чисел і β — фіксоване дійсне число. Позначимо через $C^\psi_\beta L_1$ множину 2π-періодичних функцій, які при всіх $x\in\mathbb{R}$ зображуються у вигляді згортки

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt,\quad a_0\in\mathbb{R},\quad \varphi\in L_1,\quad \varphi\perp 1, \tag{1}$$

з твірним ядром Ψ_β вигляду

$$\Psi_\beta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\quad \psi(k)\geq 0,\quad \beta\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

таким, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty. \tag{3}$$

Якщо функції f і φ пов'язані рівністю (1), то функцію f в цьому співвідношенні називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають через f^ψ_β. З іншого боку, функцію f у рівності (1) називають (ψ,β)-інтегралом функції φ і позначають через $\mathcal{J}^\psi_\beta\varphi$. Поняття (ψ,β)-похідної і (ψ,β)-інтеграла введені О. І. Степанцем [23 – 25].

[1] Відповідальна за листування, e-mail: stepaniuk.tet@gmail.com.

© АНАТОЛІЙ СЕРДЮК, ТЕТЯНА СТЕПАНЮК, 2023

Підмножину функцій f з $C^{\psi}_{\beta}L_1$ таких, що $f^{\psi}_{\beta} \in B_1$, де B_1 — одинична куля в просторі L_1, тобто

$$B_1 := \{\varphi\colon ||\varphi||_1 \le 1\},$$

будемо позначати через $C^{\psi}_{\beta,1}$. Зрозуміло, що умова (3) гарантує неперервність твірного ядра $\Psi_\beta(t)$ вигляду (2), а отже, й істинність вкладення $C^{\psi}_{\beta}L_1 \subset C$ $(C^{\psi}_{\beta,1} \subset C)$.

У випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, ядра $\Psi_\beta(t)$ вигляду (2) є узагальненими ядрами Пуассона, тобто $\Psi_\beta(t) = P_{\alpha,r,\beta}(t)$, де

$$P_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \alpha > 0, \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

При цьому множини $C^{\psi}_{\beta}L_1$ і $C^{\psi}_{\beta,1}$ позначатимемо відповідно через $C^{\alpha,r}_{\beta}L_1$ і $C^{\alpha,r}_{\beta,1}$ і називатимемо множинами узагальнених інтегралів Пуассона, а відповідні (ψ,β)-похідні f^{ψ}_{β} і (ψ,β)-інтеграли $\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\varphi$ позначатимемо через $f^{\alpha,r}_{\beta}$ і $\mathcal{J}^{\alpha,r}_{\beta}\varphi$ відповідно.

Простір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$ будемо позначати через $\mathcal{T}_{2n-1}$. Нехай $E_n(f)_{L_1}$ — найкращі наближення в середньому тригонометричними поліномами $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, тобто

$$E_n(f)_{L_1} = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_1.$$

Позначимо через $\rho_n(f;x)$ відхилення від функції f з L_1 її частинної суми Фур'є $S_{n-1}(f;\cdot)$ порядку $n-1$:

$$\rho_n(f;x) := f(x) - S_{n-1}(f;x).$$

Норми $\|\rho_n(f;\cdot)\|_C$ можна оцінити зверху через найкращі рівномірні наближення $E_n(f)_C = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C$ за допомогою нерівності Лебега

$$\|\rho_n(f;\cdot)\|_C \le (1 + L_{n-1})E_n(f)_C, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f \in C, \tag{4}$$

де величини L_{n-1} — константи Лебега сум Фур'є

$$L_{n-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n-1)t|}{\sin t}dt.$$

При цьому, як встановив Фейєр [3], для констант Лебега L_n має місце асимптотична рівність

$$L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + \mathcal{O}(1), \quad n \to \infty, \tag{5}$$

де $\mathcal{O}(1)$ — рівномірно обмежена по n величина.

Більш точні оцінки для різниць $L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a)$, $a > 0$, при $n \in \mathbb{N}$ можна знайти в роботах [1, 2, 4, 5, 10].

З урахуванням (5) нерівність (4) можна записати у вигляді

$$\|\rho_n(f;\cdot)\|_C \le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + \mathcal{O}(1)\right)E_n(f)_C, \quad f \in C. \tag{6}$$

Незважаючи на загальність, нерівність (6) на всьому просторі C є точною за порядком. І навіть більше, вона є асимптотично непокращуваною в тому сенсі, що константу $\frac{4}{\pi^2}$ у формулі (6) зменшити не можна.

Разом з тим використання нерівностей (4) і (6) для функцій f із функціональних множин $C^{\psi}_{\beta}L_1$ чи $C^{\psi}_{\beta,1}$ може виявитись неефективним, і навіть більше, існують послідовності ψ такі, що для $f \in C^{\psi}_{\beta}L_1$ зазначені нерівності є неточними навіть за порядком. Щоб у цьому переконатись, покладемо $\psi(k) = e^{-\alpha k}$ і розглянемо породжені такими послідовностями класи $C^{\psi}_{\beta,1} = C^{\alpha,1}_{\beta,1}$. Як показано в [12], при всіх $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ справджується асимптотична при $n \to \infty$ рівність

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,1})_C = \sup_{f\in C^{\alpha,1}_{\beta,1}} \|\rho_n(f;\cdot)\|_C = e^{-\alpha n}\left(\frac{1}{\pi(1-e^{-\alpha})} + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}\right), \tag{7}$$

в якій $\mathcal{O}(1)$ — рівномірно обмежена по α, β і n величина.

Крім того (див., наприклад, [26, с. 48]), для найкращих наближень $E_n(C^{\alpha,1}_{\beta,1})_C$ справедливі точні за порядком оцінки

$$K^{(1)}e^{-\alpha n} \le E_n(C^{\alpha,1}_{\beta,1})_C \le K^{(2)}e^{-\alpha n}, \tag{8}$$

в яких $K^{(1)}$ і $K^{(2)}$ — деякі додатні сталі.

Тоді для $f \in C^{\alpha,1}_{\beta,1}$ на підставі (7) виконується нерівність

$$\|\rho_n(f;\cdot)\|_C \le e^{-\alpha n}\left(\frac{1}{\pi(1-e^{-\alpha})} + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\frac{e^{-\alpha}}{n(1-e^{-\alpha})^2}\right),$$

а використання класичної нерівності Лебега та оцінки (8) дозволяє записати більш грубу за порядком оцінку

$$\|\rho_n(f;\cdot)\|_C \le e^{-\alpha n}\left(\frac{4K^{(2)}}{\pi^2}\ln n + \mathcal{O}(1)\right).$$

У роботі [27] О. І. Степанець, розглядаючи послідовності $\psi(k)$, що спадають до нуля повільніше за будь-яку геометричну прогресію, встановив аналоги нерівностей Лебега для множин (ψ,β)-диференційовних функцій $C^{\psi}_{\beta}C \subset C^{\psi}_{\beta}L_1$ ($C^{\psi}_{\beta}C$ — множина 2π-періодичних функцій $f(x)$, які при всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються у вигляді (1), де $\varphi \in C$), в яких норми відхилень $\|\rho_n(f;\cdot)\|_C$ виражаються через найкращі наближення $E_n(f^{\psi}_{\beta})_C$. Одержані в [27] нерівності виявились асимптотично точними не тільки на всіх множинах $C^{\psi}_{\beta}C$, але і на деяких важливих підмножинах із $C^{\psi}_{\beta}C$, зокрема на класах $C^{\psi}_{\beta}C^0 = \left\{f \in C^{\psi}_{\beta}C : \|f^{\psi}_{\beta}\|_C \le 1\right\}$. Згодом дослідження по встановленню асимптотично точних нерівностей типу Лебега на множинах (ψ,β)-диференційовних функцій були продовжені в роботах [8, 9, 14, 21, 22, 28, 29].

У цій роботі ми встановимо нерівності типу Лебега на множинах $C^{\psi}_{\beta}L_1$, в яких норми $\|\rho_n(f;x)\|_C$ виражаються через $E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}$, і доведемо їх асимптотичну непокращуваність у випадку, коли

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)}{\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)}=0. \tag{9}$$

Також за умови (9) буде знайдено розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для сум Фур'є на класах $C^{\psi}_{\beta,1}$, яка полягає у відшуканні асимптотичних рівностей величин

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C=\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,1}}\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_C. \tag{10}$$

Проблеми, пов'язані зі знаходженням розв'язку задачі Колмогорова – Нікольського для сум Фур'є на класах згорток, досліджувались у роботах [6, 11 – 13, 15, 16, 20, 23, 25, 32 – 35].

2. Основні результати. Справджується таке твердження.

Теорема 2.1. *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k)<\infty$, $\psi(k)\geq 0$, $k=1,2,\ldots$, $\beta\in\mathbb{R}$ *і* $n\in\mathbb{N}$. *Тоді для довільної функції* $f\in C^{\psi}_{\beta}L_1$ *виконується нерівність*

$$\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_C\leq\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}. \tag{11}$$

Крім того, для довільної функції $f\in C^{\psi}_{\beta}L_1$ *можна знайти функцію* $\mathcal{F}(x)=\mathcal{F}(f;n,x)$ *з множини* $C^{\psi}_{\beta}L_1$ *таку, що* $E_n(\mathcal{F}^{\psi}_{\beta})_{L_1}=E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}$ *і має місце рівність*

$$\|\mathcal{F}(\cdot)-S_{n-1}(\mathcal{F};\cdot)\|_C=\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\xi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)\right)E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}. \tag{12}$$

У (12) *величина* $\xi=\xi(f;n;\psi;\beta)$ *є такою, що* $-2\leq\xi\leq 0$.

Доведення. Нехай $f\in C^{\psi}_{\beta}L_1$. Тоді згідно з (1) в кожній точці $x\in\mathbb{R}$ має місце інтегральне зображення

$$\rho_n(f;x)=f(x)-S_{n-1}(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(t)\Psi_{\beta,n}(x-t)dt, \tag{13}$$

де

$$\Psi_{\beta,n}(t):=\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{14}$$

Функція $\Psi_{\beta,n}(t)$ ортогональна до будь-якого тригонометричного полінома t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$. Тоді для довільного полінома $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$ отримуємо

$$\rho_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t)\Psi_{\beta,n}(x-t)dt, \tag{15}$$

де

$$\delta_n(\cdot)=\delta_n(\psi,\beta,t_{n-1};\cdot):=f^{\psi}_{\beta}(\cdot)-t_{n-1}(\cdot).$$

Виберемо в якості t_{n-1} у формулі (15) поліном t^*_{n-1} найкращого наближення функції f^{ψ}_{β} у просторі L_1, тобто такий, що

$$\|f^{\psi}_{\beta} - t^*_{n-1}\|_1 = E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}.$$

Тоді, використовуючи нерівність

$$\left\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-u)\varphi(u)du \right\|_C \le \|K\|_{p'}\|\varphi\|_p, \quad \varphi \in L_p, \quad K \in L_{p'}, \quad 1 \le p \le \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

(див., наприклад, [7, с. 43]), отримуємо

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \le \left\| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f^{\psi}_{\beta}(t) - t^*_{n-1}(t))\Psi_{\beta,n}(\cdot - t)dt \right\|_C \le \frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}\|_C E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}. \quad (16)$$

Знайдемо двосторонні оцінки норми $\|\Psi_{\beta,n}\|_C$. Покажемо, що при всіх $n \in \mathbb{N}$ і $\beta \in \mathbb{R}$ справедливою є оцінка

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) \le \|\Psi_{\beta,n}\|_C \le \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \quad (17)$$

Оцінка зверху для $\|\Psi_{\beta,n}\|_C$ в (17) випливає безпосередньо з (14).

Для оцінки $\|\Psi_{\beta,n}\|_C$ знизу запишемо функцію $\Psi_{\beta,n}(t)$, яка означена формулою (14), у вигляді

$$\Psi_{\beta,n}(t) = g_{\psi,n}(t)\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + h_{\psi,n}(t)\sin\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad (18)$$

де

$$g_{\psi,n}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k+n)\cos kt, \quad (19)$$

$$h_{\psi,n}(t) := -\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k+n)\sin kt. \quad (20)$$

Оскільки величина $\|\Psi_{\beta,n}\|_C$ періодична з періодом 2 за параметром β, то, не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\beta \in [0,2]$.

Позначимо $t_0 := \dfrac{\beta\pi}{2n}$, $\beta \in [0,2]$. На підставі (18) $\Psi_{\beta,n}(t_0) = g_{\psi,n}(t_0)$. Тоді

$$\|\Psi_{\beta,n}\|_C \ge |\Psi_{\beta,n}(t_0)| = |g_{\psi,n}(t_0)| = |g_{\psi,n}(0) + (g_{\psi,n}(t_0) - g_{\psi,n}(0))|$$

$$\ge |g_{\psi,n}(0)| - \left|\left(g_{\psi,n}\left(\frac{\beta\pi}{2n}\right) - g_{\psi,n}(0)\right)\right| = \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) - \left|\left(g_{\psi,n}\left(\frac{\beta\pi}{2n}\right) - g_{\psi,n}(0)\right)\right|. \quad (21)$$

Використовуючи теорему про середнє, маємо

$$\left|g_{\psi,n}\left(\frac{\beta\pi}{2n}\right)-g_{\psi,n}(0)\right|\le\|g'_{\psi,n}\|_C\frac{\beta\pi}{2n}\le\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n). \tag{22}$$

Із (21) і (22) випливає шукана оцінка знизу для норм $\|\Psi_{\beta,n}\|_C$ у співвідношенні (17):

$$\|\Psi_{\beta,n}\|_C\ge\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n).$$

Оцінку (17) можна записати у вигляді

$$\|\Psi_{\beta,n}\|_C=\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\Theta_1\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n), \tag{23}$$

де для величини $\Theta_1=\Theta_1(n,\beta,\psi)$ виконуються нерівності

$$-1\le\Theta_1\le 0. \tag{24}$$

Отже, із (16) і (23) випливає нерівність (11).

Доведемо другу частину теореми 2.1. Для цього необхідно для довільної функції $\varphi\in L_1$ знайти функцію $\Phi(\cdot)=\Phi(\varphi,\cdot)\in L_1$ таку, що $E_n(\Phi)_{L_1}=E_n(\varphi)_{L_1}$ і виконується рівність

$$\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\Phi(t)-t^*_{n-1}(t)\big)\Psi_{\beta,n}(0-t)dt\right|=\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\xi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)\right)E_n(\varphi)_{L_1}, \tag{25}$$

де t^*_{n-1} — поліном найкращого наближення порядку $n-1$ функції Φ у просторі L_1.

У цьому випадку для функції $f\in C^{\psi}_{\beta}L_1$ існує функція $\Phi(\cdot)=\Phi(f^{\psi}_{\beta};\cdot)$ така, що $E_n(\Phi)_{L_1}=E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}$, і має місце формула (25), де роль φ відіграє функція f^{ψ}_{β}.

Розглянемо функцію

$$\mathcal{F}(\cdot)=\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}\Big(\Phi(\cdot)-\frac{a_0}{2}\Big),$$

де

$$a_0=a_0(\Phi):=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi(t)dt.$$

Функція $\mathcal{F}$ є шуканою, оскільки $\mathcal{F}\in C^{\psi}_{\beta}L_1$,

$$E_n(\mathcal{F}^{\psi}_{\beta})_{L_1}=E_n\Big(\Phi-\frac{a_0}{2}\Big)_{L_1}=E_n(\Phi)_{L_1}=E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1},$$

і на підставі (15) і (25) має місце оцінка (12).

Доведемо (25). Нехай t^* — точка з проміжку $T=\left[\dfrac{\pi(1-\beta)}{2n},2\pi+\dfrac{\pi(1-\beta)}{2n}\right)$, в якій функція $|\Psi_{-\beta,n}(t)|$ набуває свого найбільшого значення, тобто

$$|\Psi_{-\beta,n}(t^*)|=\|\Psi_{-\beta,n}\|_C=\|\Psi_{\beta,n}\|_C.$$

Покладемо $\Delta_k^n := \left[\dfrac{(k-1)\pi}{n} + \dfrac{\pi(1-\beta)}{2n}, \dfrac{k\pi}{n} + \dfrac{\pi(1-\beta)}{2n}\right)$, $k = 1, \ldots, 2n$. Через k^* позначимо таке число, що $t^* \in \Delta_{k^*}^n$. Оскільки функція $\Psi_{-\beta,n}$ є абсолютно неперервною, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує сегмент $\ell^* = [\xi^*, \xi^* + \delta] \subset \Delta_{k^*}^n$ такий, що для довільного $t \in \ell^*$ виконується нерівність $|\Psi_{\beta,n}(t)| > \|\Psi_{\beta,n}\|_C - \varepsilon$. Зрозуміло, що $\operatorname{mes} \ell^* = |\ell^*| = \delta < \dfrac{\pi}{n}$.

Для довільного $\varphi \in L_1$ і $\varepsilon > 0$ розглянемо функцію $\Phi_\varepsilon(t)$, яка на проміжку T означена за допомогою рівностей

$$\Phi_\varepsilon(t) = \begin{cases} E_n(\varphi)_{L_1} \dfrac{1 - \varepsilon(2\pi - \delta)}{\delta} \operatorname{sign}\cos\left(nt + \dfrac{\beta\pi}{2}\right), & t \in \ell^*, \\ E_n(\varphi)_{L_1} \varepsilon \operatorname{sign}\cos\left(nt + \dfrac{\beta\pi}{2}\right), & t \in \mathrm{T} \setminus \ell^*. \end{cases} \tag{26}$$

Для функції $\Phi_\varepsilon(t)$ при достатньо малих значеннях $\varepsilon > 0$ $\left(\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2\pi}\right)\right)$ має місце рівність

$$\begin{aligned} \|\Phi_\varepsilon\|_1 &= E_n(\varphi)_{L_1} \frac{1 - \varepsilon(2\pi - \delta)}{\delta} \int\limits_{\ell^*} \left| \operatorname{sign}\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| dt \\ &\quad + E_n(\varphi)_{L_1} \varepsilon \int\limits_{\mathrm{T}\setminus\ell^*} \left| \operatorname{sign}\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| dt \\ &= E_n(\varphi)_{L_1} \left(\frac{1 - \varepsilon(2\pi - \delta)}{\delta} \delta + \varepsilon(2\pi - \delta) \right) = E_n(\varphi)_{L_1}. \end{aligned} \tag{27}$$

Крім того, згідно з (26)

$$\operatorname{sign} \Phi_\varepsilon(t) = \operatorname{sign}\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{28}$$

Оскільки для довільного тригонометричного полінома $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int\limits_0^{2\pi} t_{n-1}(t) \operatorname{sign}\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = 0,$$

то з урахуванням (28) виконується рівність

$$\int\limits_0^{2\pi} t_{n-1}(t) \operatorname{sign}(\Phi_\varepsilon(t) - 0) dt = 0, \quad t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}.$$

Згідно з теоремою 1.4.5 роботи [7, с. 28], поліном $t_{n-1}^* \equiv 0$ є поліномом найкращого наближення функції Φ_ε в метриці простору L_1, тобто $E_n(\Phi_\varepsilon)_{L_1} = \|\Phi_\varepsilon\|_1$. Отже, з (27) випливає рівність $E_n(\Phi_\varepsilon)_{L_1} = E_n(\varphi)_{L_1}$.

Крім того, для функції Φ_ε маємо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\Phi_\varepsilon(t)-t^*_{n-1}(t))\Psi_{\beta,n}(-t)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_\varepsilon(t)\Psi_{-\beta,n}(t)dt$$

$$=\frac{1-\varepsilon(2\pi-\delta)}{\pi\delta}E_n(\varphi)_{L_1}\int\limits_{\ell^*}\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\Psi_{-\beta,n}(t)dt$$

$$+\frac{\varepsilon}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}\int\limits_{\mathrm{T}\setminus\ell^*}\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\Psi_{-\beta,n}(t)dt. \tag{29}$$

Враховуючи, що $\operatorname{sign}\Phi_\varepsilon(t)=(-1)^k,\ t\in\Delta_k^{(n)},\ k=1,\dots,2n$, а також вкладення $\ell^*\subset\Delta_{k^*}^{(n)}$, отримуємо

$$\left|\frac{1-\varepsilon(2\pi-\delta)}{\pi\delta}E_n(\varphi)_{L_1}\int\limits_{\ell^*}\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\Psi_{-\beta,n}(t)dt\right|$$

$$=\left|(-1)^{k^*}\frac{1-\varepsilon(2\pi-\delta)}{\pi\delta}E_n(\varphi)_{L_1}\int\limits_{\ell^*}\Psi_{-\beta,n}(t)dt\right|$$

$$\geq\frac{1-\varepsilon(2\pi-\delta)}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}(\|\Psi_{\beta,n}\|_C-\varepsilon)>\frac{1-2\pi\varepsilon}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}(\|\Psi_{\beta,n}\|_C-\varepsilon)$$

$$=\frac{1}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}\big(\|\Psi_{\beta,n}|_C-2\pi\varepsilon\|\Psi_{\beta,n}\|_C-\varepsilon+2\pi\varepsilon^2\big)$$

$$>E_n(\varphi)_{L_1}\left(\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}\|_C-\varepsilon\left(2\|\Psi_{\beta,n}\|_C+\frac{1}{\pi}\right)\right). \tag{30}$$

Крім того, неважко переконатись, що

$$\left|\frac{\varepsilon}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}\int\limits_{\mathrm{T}\setminus\ell^*}\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\Psi_{-\beta,n}(t)dt\right|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}\|\Psi_{\beta,n}\|_C(2\pi-\delta)<2\varepsilon E_n(\varphi)_{L_1}\|\Psi_{\beta,n}\|_C. \tag{31}$$

З формул (29) – (31) випливає оцінка

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}(\Phi_\varepsilon(t)-t^*_{n-1}(t))\Psi_{\beta,n}(-t)dt\right|>E_n(\varphi)_{L_1}\left(\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}\|_C-\varepsilon\left(4\|\Psi_{\beta,n}\|_C+\frac{1}{\pi}\right)\right). \tag{32}$$

Виберемо ε настільки малим, щоб

$$\varepsilon<\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)}{n\Big(1+4\pi\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\Big)}, \tag{33}$$

і для цього ε покладемо $\Phi(t) = \Phi_\varepsilon(t)$. Функція $\Phi(t)$ є шуканою, оскільки $E_n(\Phi)_{L_1} = E_n(\varphi)_{L_1}$, і згідно з (17), (32) і (33)

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\Phi(t)-t^*_{n-1}(t))\Psi_{\beta,n}(-t)dt\right|$$

$$\geq\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)-\varepsilon\left(4\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{1}{\pi}\right)\right)E_n(\varphi)_{L_1}$$

$$\geq\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)-\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)}{n\Big(1+4\pi\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\Big)}\left(4\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{1}{\pi}\right)\right)E_n(\varphi)_{L_1}$$

$$\geq\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)\right)E_n(\varphi)_{L_1}. \tag{34}$$

З формул (34), (16) і (17) випливає (25).

Теорему 2.1 доведено.

Зрозуміло, що формулу (11) можна записати однотипно з формулою (12) у вигляді

$$\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_C\leq\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\Theta_1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)\right)E_n(f^\psi_\beta)_{L_1}, \tag{35}$$

де $\Theta_1=\Theta_1(n,\beta,\psi)$ задовольняє нерівності (24).

Теорема 2.2. *Нехай* $\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k)<\infty$, $\psi(k)\geq 0$, $k=1,2,\ldots$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді при всіх* $n\in\mathbb{N}$ *має місце формула*

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,1})_C=\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\Theta_2}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n), \tag{36}$$

де для величини $\Theta_2=\Theta_2(n,\beta,\psi)$ *виконуються нерівності* $-1\leq\Theta_2\leq 0$.

Доведення. Згідно з (10) і (13) отримуємо

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,1})_C=\frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in B^0_1}\left\|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\Psi_{\beta,n}(x-t)dt\right\|_C, \tag{37}$$

де $\Psi_{\beta,n}(\cdot)$ означена рівністю (14), а $B^0_1:=\{\varphi\in L_1:||\varphi||_1\leq 1,\ \varphi\perp 1\}$.

Беручи до уваги інваріантність множини B^0_1 щодо зсуву аргументу, з (37) одержуємо

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,1})_C=\frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in B^0_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\Psi_{\beta,n}(t)dt. \tag{38}$$

На основі співвідношення двоїстості (див., наприклад, [7]) маємо

$$\sup_{\varphi\in B_1^0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_{\beta,n}(t)\varphi(t)dt=\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\Psi_{\beta,n}(t)-\lambda\|_C. \tag{39}$$

Для знаходження двосторонньої оцінки величини $\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\Psi_{\beta,n}(t)-\lambda\|_C$ буде корисним наступне твердження, яке може мати і самостійне застосування.

Лема 2.1. *Нехай* $\psi(k)\geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k)<\infty$. *Тоді при всіх* $\beta\in\mathbb{R}$ *і* $n\in\mathbb{N}$ *для кожної з величин*

$$I_n^{(1)}=I_n^{(1)}(\psi,\beta):=\|\Psi_{\beta,n}\|_C, \tag{40}$$

$$I_n^{(2)}=I_n^{(2)}(\psi,\beta):=\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\Psi_{\beta,n}(t)-\lambda\|_C, \tag{41}$$

$$I_n^{(3)}=I_n^{(3)}(\psi,\beta):=\frac{1}{2}\left\|\Psi_{\beta,n}\Big(t+\frac{\pi}{n}\Big)-\Psi_{\beta,n}(t)\right\|_C \tag{42}$$

справджуються формули

$$I_n^{(j)}=\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\Theta_j\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n),\quad j=1,2,3, \tag{43}$$

в яких для будь-якої з величин $\Theta_j=\Theta_j(n,\beta,\psi)$, $j=1,2,3$, *виконуються двосторонні оцінки*

$$-1\leq\Theta_j\leq 0,\quad j=1,2,3.$$

Доведення. Оскільки

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\Psi_{\beta,n}(t)-\lambda\|_C\leq\|\Psi_{\beta,n}\|_C$$

і

$$\frac{1}{2}\left\|\Psi_{\beta,n}\Big(t+\frac{\pi}{n}\Big)-\Psi_{\beta,n}(t)\right\|_C\leq\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\Psi_{\beta,n}(t)-\lambda\|_C,$$

то

$$I_n^{(3)}\leq I_n^{(2)}\leq I_n^{(1)},$$

і, отже, необхідна оцінка зверху для кожної з величин $I_n^{(j)}$, $j=1,2,3$, випливає з (17).

Залишилося знайти оцінку знизу для $I_n^{(3)}$. На підставі (18)–(20) і (42)

$$\begin{aligned}
I_n^{(3)}&=\frac{1}{2}\left\|\Psi_{\beta,n}\Big(t+\frac{\pi}{n}\Big)-\Psi_{\beta,n}(t)\right\|_C\\
&\geq\frac{1}{2}\left|\Psi_{\beta,n}\Big(t_0+\frac{\pi}{n}\Big)-\Psi_{\beta,n}(t_0)\right|\\
&=\frac{1}{2}\left|g_{\psi,n}\Big(t_0+\frac{\pi}{n}\Big)\cos\Big(n\Big(t_0+\frac{\pi}{n}\Big)-\frac{\beta\pi}{2}\Big)+h_{\psi,n}\Big(t_0+\frac{\pi}{n}\Big)\sin\Big(n\Big(t_0+\frac{\pi}{n}\Big)-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\right.\\
&\qquad\left.-\left(g_{\psi,n}(t_0)\cos\Big(nt_0-\frac{\beta\pi}{2}\Big)+h_{\psi,n}(t_0)\sin\Big(nt_0-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\right)\right|
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left|-g_{\psi,n}\left(t_0+\frac{\pi}{n}\right)-g_{\psi,n}(t_0)\right| = \frac{1}{2}\left|g_{\psi,n}\left(\frac{\beta\pi-2\pi}{2n}\right)+g_{\psi,n}\left(\frac{\beta\pi}{2n}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|2g_{\psi,n}(0)+\left(g_{\psi,n}\left(\frac{(\beta-2)\pi}{2n}\right)-g_{\psi,n}(0)\right)+\left(g_{\psi,n}\left(\frac{\beta\pi}{2n}\right)-g_{\psi,n}(0)\right)\right|$$

$$\geq |g_{\psi,n}(0)| - \frac{1}{2}\left|g_{\psi,n}\left(\frac{(\beta-2)\pi}{2n}\right)-g_{\psi,n}(0)\right| - \frac{1}{2}\left|g_{\psi,n}\left(\frac{\beta\pi}{2n}\right)-g_{\psi,n}(0)\right|, \tag{44}$$

де, як і раніше, $t_0 = \dfrac{\beta\pi}{2n}$, $\beta \in [0,2]$.

За теоремою про середнє значення маємо

$$\left|g_{\psi,n}\left(\frac{(\beta-2)\pi}{2n}\right)-g_{\psi,n}(0)\right| \leq \|g'_{\psi,n}\|_C \frac{|\beta-2|\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n). \tag{45}$$

Аналогічно (див. (22))

$$\left|g_{\psi,n}\left(\frac{\beta\pi}{2n}\right)-g_{\psi,n}(0)\right| \leq \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n). \tag{46}$$

Об'єднуючи (44) – (46), одержуємо шукану оцінку знизу для $I_n^{(3)}$:

$$I_n^{(3)} \geq \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n).$$

Лему 2.1 доведено.

З формул (38), (39), (41) і (43) випливає, що

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) + \frac{\Theta_2}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n).$$

Теорему 2.2 доведено.

Зазначимо, що оцінки (11), (12) і (36) є асимптотичними рівностями при $n \to \infty$, якщо виконується граничне співвідношення (9), тобто коли

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) = o\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\right), \quad n \to \infty. \tag{47}$$

Умова (47), як буде показано нижче, має місце у деяких важливих випадках, зокрема, коли послідовність $\psi(k)$ спадає до нуля при $k \to \infty$ швидше за довільну степеневу послідовність $\dfrac{1}{k^r}$, $k = 1, 2, \ldots$, $r > 1$.

3. Наслідки з теореми 2.2 для класів аналітичних і цілих функцій. Наведемо приклади важливих функціональних компактів $C^{\psi}_{\beta,1}$, для яких формула (36) дозволяє записати асимптотичні рівності для $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C$ при $n \to \infty$.

Розглянемо випадок, коли послідовності $\psi(k)$ задовольняють умову Даламбера $\mathcal{D}_q$, $q \in [0,1)$:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=q,\quad \psi(k)>0. \tag{48}$$

Якщо $\psi(k)$ задовольняє умову (48) при деякому $q\in[0,1)$, то будемо писати $\psi\in\mathcal{D}_q$. Нехай спочатку $q=0$.

Згідно з теоремою 5 роботи [31], твердження про існування послідовності $\psi\in\mathcal{D}_0$ такої, що для функції f правильним є включення $f\in C^{\psi}_{\beta}L_1$ при будь-якому $\beta\in\mathbb{R}$, еквівалентне твердженню про включення $f\in\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — множина всіх 2π-періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій, які допускають аналітичне продовження на всю комплексну площину. Отже, класи $C^{\psi}_{\beta,1}$ при $\psi\in\mathcal{D}_0$ належать до множини 2π-періодичних дійснозначних на $\mathbb{R}$ цілих функцій.

***Наслідок* 3.1.** *Нехай* $\sum_{k=n+1}^{\infty}k\psi(k)<\infty$, $\psi(k)\geq 0$, $k=1,2,\ldots$, $n\in\mathbb{N}$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді має місце рівномірна щодо всіх параметрів оцінка*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C=\frac{1}{\pi}\psi(n)+\frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}k\psi(k). \tag{49}$$

Якщо, крім того, $\psi\in\mathcal{D}_0$, *то оцінка* (49) *є асимптотичною рівністю при* $n\to\infty$.

Доведення. Використовуючи формулу (36), записуємо

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C&=\frac{1}{\pi}\psi(n)+\mathcal{O}(1)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k+n)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)\right)\\&=\frac{1}{\pi}\psi(n)+\frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=1}^{\infty}(k+n)\psi(k+n)=\frac{1}{\pi}\psi(n)+\frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}k\psi(k),\end{aligned}$$

що й доводить оцінку (49).

Покажемо, що при $\psi\in\mathcal{D}_0$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}k\psi(k)=o(\psi(n)),\quad n\to\infty. \tag{50}$$

Виберемо значення n так, щоб

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}<\frac{1}{2},\quad k=n,n+1,\ldots. \tag{51}$$

Тоді з урахуванням (51) маємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k)&=\left(1+\frac{1}{n}\right)\psi(n+1)+\frac{\psi(n+1)}{n}\sum_{j=2}^{\infty}(n+j)\prod_{\ell=1}^{j-1}\frac{\psi(n+\ell+1)}{\psi(n+\ell)}\\&<\psi(n+1)\left(2+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{2j}{2^{j-1}}\right)\\&<\psi(n+1)\left(2+\frac{4}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{2^{j}}\right)<10\psi(n+1).\end{aligned} \tag{52}$$

Оскільки на підставі того, що $\psi \in \mathcal{D}_0$,

$$\psi(n+1) = o(\psi(n)), \quad n \to \infty, \tag{53}$$

то з (52) і (53) випливає (50).

Наслідок 3.1 доведено.

Зауважимо, що асимптотичну рівність (49) із залишковим членом, записаним в іншій формі, було отримано в [12, 13]. При $\psi \in \mathcal{D}_0$ оцінки залишкового члена в [12, 13] є більш точними, ніж у формулі (49).

Типовими представниками послідовностей, що задовольняють умову $\mathcal{D}_0$, є послідовності $\psi(k) = e^{-\alpha k^{-r}}$, $r > 1$, $\alpha > 0$. Для породжуваних такими послідовностями класів $C^{\psi}_{\beta,1} = C^{\alpha,r}_{\beta,1}$ одержуємо таке твердження.

***Наслідок* 3.2.** *Нехай $r > 1$, $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $n \geq \left(\dfrac{3}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}} - 1$, $n \in \mathbb{N}$, має місце рівномірна за всіма розглядуваними параметрами оцінка*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_C = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{1}{\pi} + \mathcal{O}(1)e^{-\alpha r n^{r-1}}\left(1 + \frac{1}{\alpha r (n+1)^{r-2}}\right)\right). \tag{54}$$

Доведення. З формули (49) випливає, що

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_C = \frac{1}{\pi}e^{-\alpha n^r} + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} k e^{-\alpha k^r}. \tag{55}$$

Легко переконатись, що при значеннях n таких, що $(n+1)^r > \dfrac{1}{\alpha r}$, виконується нерівність

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} k e^{-\alpha k^r} < \frac{1}{n}\left((n+1)e^{-\alpha(n+1)^r} + \int_{n+1}^{\infty} t e^{-\alpha t^r} dt\right). \tag{56}$$

Інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_{n+1}^{\infty} t e^{-\alpha t^r} dt = \int_{n+1}^{\infty} t^2 \frac{1}{\alpha r t^r}\left(-e^{-\alpha t^r}\right)' dt \leq \frac{1}{\alpha r (n+1)^r}\int_{n+1}^{\infty} t^2\left(-e^{-\alpha t^r}\right)' dt$$

$$= \frac{1}{\alpha r (n+1)^r}\left((n+1)^2 e^{-\alpha(n+1)^r} + 2\int_{n+1}^{\infty} t e^{-\alpha t^r} dt\right).$$

З останньої нерівності маємо

$$\left(1 - \frac{2}{\alpha r (n+1)^r}\right)\int_{n+1}^{\infty} t e^{-\alpha t^r} dt \leq \frac{(n+1)^2 e^{-\alpha(n+1)^r}}{\alpha r (n+1)^r}.$$

Це рівносильно тому, що

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} te^{-\alpha t^r}dt \le \frac{e^{-\alpha(n+1)^r}}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\frac{\alpha r(n+1)^r}{\alpha r(n+1)^r-2} = \frac{e^{-\alpha(n+1)^r}}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\left(1+\frac{2}{\alpha r(n+1)^r-2}\right). \quad (57)$$

Зі співвідношень (56) і (57) випливає, що

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} ke^{-\alpha k^r} = \mathcal{O}(1)\left(e^{-\alpha(n+1)^r}+\frac{e^{-\alpha(n+1)^r}}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\left(1+\frac{2}{\alpha r(n+1)^r-2}\right)\right). \quad (58)$$

Об'єднуючи (55) і (58), одержуємо, що при всіх значеннях n таких, що $(n+1)^r > \dfrac{3}{\alpha r}$,

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_C = \frac{1}{\pi}e^{-\alpha n^r}+\mathcal{O}(1)\left(e^{-\alpha(n+1)^r}+\frac{e^{-\alpha(n+1)^r}}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\left(1+\frac{2}{\alpha r(n+1)^r-2}\right)\right)$$

$$= e^{-\alpha n^r}\left(\frac{1}{\pi}+\mathcal{O}(1)\left(e^{-\alpha r n^{r-1}}+\frac{e^{-\alpha r n^{r-1}}}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\right)\right).$$

Наслідок 3.2 доведено.

Формулу (54) із залишковим членом, записаним дещо в іншому вигляді, отримано в [12, 13]. При цьому оцінки з [12, 13] містять більш точні оцінки залишкового члена, ніж у (54).

Нехай далі $q \in (0,1)$. Згідно з теоремою 3 роботи [31], твердження про існування послідовності $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, такої, що для функції f правильним є включення $C^{\alpha,1}_{\beta}L_1$ при будь-якому $\beta \in \mathbb{R}$, еквівалентне твердженню про включення $f \in \mathcal{A}$, де $\mathcal{A}$ — множина всіх 2π-періодичних дійснозначних на дійсній осі функцій, які допускають аналітичне продовження на деяку смугу $|\mathrm{Im} z| < c$, $c > 0$, комплексної площини. Отже, класи $C^{\psi}_{\beta,1}$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, складаються з періодичних, аналітичних у смузі $|\mathrm{Im}\, z| < c$ функцій, при цьому $c = \ln\dfrac{1}{q}$ (див., наприклад, [24, с. 32]).

Послідовності $\psi(k) = e^{-\alpha k}$, $\alpha > 0$, належать до множини $\mathcal{D}_q$ при $q = e^{-\alpha}$, а відповідні класи $C^{\psi}_{\beta,1} = C^{\alpha,1}_{\beta,1}$ породжуються ядрами Пуассона

$$P_{\alpha,1,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Із теореми 2.2 для класів $C^{\alpha,1}_{\beta,1}$ отримуємо таке твердження.

***Наслідок* 3.3.** *Нехай $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,1})_C = e^{-\alpha n}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-e^{-\alpha}}+\frac{\Theta}{n}\frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}\right), \quad (59)$$

де для величини $\Theta = \Theta(n,\alpha,\beta)$ виконуються нерівності $-1 \le \Theta \le 0$.

Доведення. Покладемо $q = e^{-\alpha}$. Тоді з теореми 2.2 випливає, що при всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,1})_C = \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty} q^k + \frac{\Theta}{n}\sum_{k=0}^{\infty} kq^{k+n}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{q^n}{1-q} + \frac{\Theta}{n}\left(\sum_{k=n}^{\infty} kq^k - n\sum_{k=n}^{\infty} q^k\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{q^n}{1-q} + \frac{\Theta}{n}\left(\frac{nq^n(1-q)+q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{q^n}{1-q} + \frac{\Theta}{n}\frac{q^{n+1}}{(1-q)^2},$$

де використано рівність

$$\sum_{k=n}^{\infty} kq^k = \frac{nq^n(1-q)+q^{n+1}}{(1-q)^2}, \quad q \in (0,1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наслідок 3.3 доведено.

Оцінка (59) уточнює асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_C$, які встановлено в [12, 13]. Асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C$ при $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, містяться у такому твердженні.

***Наслідок* 3.4.** *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді при всіх значеннях n таких, що*

$$\frac{1}{n} + \varepsilon_n < \frac{1-q}{2}, \tag{60}$$

де

$$\varepsilon_n := \sup_{k \geq n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \tag{61}$$

має місце рівномірна щодо всіх розглядуваних параметрів оцінка

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^2} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right). \tag{62}$$

Доведення. З леми 1 роботи [29] випливає, що при $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $n \in \mathbb{N}$ має місце рівність

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) = \psi(n)\left(\frac{1}{q^n}\sum_{k=n}^{\infty} q^k + r_n\right), \tag{63}$$

де для залишку r_n при всіх значеннях n таких, що

$$\varepsilon_n < \frac{1-q}{2}, \tag{64}$$

виконується оцінка

$$|r_n| \leq \frac{\varepsilon_n}{(1-q-\varepsilon_n)(1-q)} \leq \frac{2\varepsilon_n}{(1-q)^2}. \tag{65}$$

Очевидно, що якщо $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, то і послідовність $k\psi(k)$ також задовольняє умову $\mathcal{D}_q$, а тому знову ж таки за лемою 1 із [29]

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k\psi(k) = (n+1)\psi(n+1)\left(\frac{1}{q^{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty} q^k + r^*_{n+1}\right), \tag{66}$$

де для залишку r^*_{n+1} при всіх значеннях n таких, що

$$\varepsilon^*_{n+1} := \sup_{k\geq n+1}\left|\frac{\psi(k+1)(k+1)}{\psi(k)k} - q\right| < \frac{1-q}{2}, \tag{67}$$

виконується оцінка

$$\left|r^*_{n+1}\right| \leq \frac{2\varepsilon^*_{n+1}}{(1-q)^2}. \tag{68}$$

Із означень величин ε_n і ε^*_{n+1} (див. (61) і (67)) маємо

$$\varepsilon^*_{n+1} \leq \sup_{k\geq n+1}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right| + \frac{1}{n+1} = \varepsilon_{n+1} + \frac{1}{n+1} < \varepsilon_n + \frac{1}{n}. \tag{69}$$

Із (69) видно, що виконання нерівності (60) гарантує виконання нерівностей (64) і (67), а отже і оцінок (65), (68) для залишків у рівностях (63) і (66).

Тоді на підставі оцінки (36) і рівностей (63), (66) при всіх значеннях n, які задовольняють умову (60), справджуються співвідношення

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)\\
&= \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{1}{q^n}\sum_{k=n}^{\infty}q^k + r_n\right) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\psi(k)\\
&= \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{1}{1-q} + \mathcal{O}(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right) + \mathcal{O}(1)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}k\psi(k) - \sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\right)\\
&= \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\\
&\quad + \mathcal{O}(1)\psi(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{q^{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}q^k + \frac{\varepsilon^*_{n+1}}{(1-q)^2}\right) - \frac{1}{q^{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}q^k + \frac{\varepsilon_{n+1}}{(1-q)^2}\right)\\
&= \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right) + \mathcal{O}(1)\psi(n+1)\left(\frac{1}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n + \frac{1}{n}}{(1-q)^2}\right)\\
&= \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\frac{1}{n(1-q)^2}\right)\right)\\
&= \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q}{n(1-q)^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Наслідок 3.4 доведено.

Асимптотичні рівності (62) вперше було встановлено в роботах [12, 13].

4. Наслідки з теореми 2.2 для класів нескінченно диференційовних функцій. У цьому пункті будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$, що породжують множини $C^{\psi}_{\beta}L_1$ і $C^{\psi}_{\beta,1}$, є звуженням на множину натуральних чисел деяких додатних неперервних опуклих донизу функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$, які прямують до нуля при $t \to \infty$. Множину всіх таких функцій ψ позначають через $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}=\Big\{\psi\in C[1,\infty):\psi(t)>0,\psi(t_1)-2\psi((t_1+t_2)/2)+\psi(t_2)\geq 0\ \forall t_1,t_2\in[1,\infty),\ \lim_{t\to\infty}\psi(t)=0\Big\}.$$

Наслідуючи О. І. Степанця (див., наприклад, [25, с. 160]), кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t)=\eta(\psi;t)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right),$$

$$\mu(t)=\mu(\psi;t)=\frac{t}{\eta(t)-t},$$

де ψ^{-1} — обернена до ψ функція, і покладемо

$$\mathfrak{M}^{+}_{\infty}=\{\psi\in\mathfrak{M}:\,\mu(t)\uparrow,\ \ t\to\infty\}.$$

Через $\mathfrak{M}^{\alpha}$ позначимо підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина

$$\alpha(t)=\alpha(\psi;t):=\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|},\quad \psi'(t):=\psi'(t+0), \tag{70}$$

спадає до нуля при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}^{\alpha}=\Big\{\psi\in\mathfrak{M}:\,\lim_{t\to\infty}\alpha(\psi;t)=0\Big\}.$$

Згідно з теоремою 2 роботи [30], твердження про існування послідовності $\psi \in \mathfrak{M}^{\alpha}$ (або $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$) такої, що для функції f правильним є включення $f \in C^{\psi}_{\beta}L_1$ при будь-якому $\beta \in \mathbb{R}$, еквівалентне твердженню про включення $f \in D^{\infty}$, де D^{∞} — множина всіх нескінченно диференційовних 2π-періодичних дійснозначних функцій. Отже, класи $C^{\psi}_{\beta,1}$ при $\psi \in \mathfrak{M}^{\alpha}$ (або $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$) є класами нескінченно диференційовних періодичних функцій. В тій же роботі було показано, що має місце включення

$$\mathfrak{M}^{+}_{\infty}\subset\mathfrak{M}^{\alpha}\subset\mathfrak{M}^{\infty}=\Big\{\psi\in\mathfrak{M}:\forall r>0\quad\lim_{t\to\infty}t^{r}\psi(t)=0\Big\}, \tag{71}$$

яке означає, що функції $\psi(t)$ із $\mathfrak{M}^{\alpha}$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію.

Для величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C$, $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, за умови $\eta(n) - n > 2$ мають місце точні порядкові рівності

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C \asymp \psi(n)(\eta(n)-n), \tag{72}$$

які збігаються з точними порядковими рівностями для найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами порядку $n-1$

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}} \|f - t_{n-1}\|_C,$$

а саме (див., наприклад, [17])

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C \asymp \psi(n)(\eta(n) - n)$$

(тут і далі запис $A(n) \asymp B(n)$ для додатних послідовностей $A(n)$ і $B(n)$ означає існування додатних сталих K_1 і K_2 таких, що $K_1 B(n) \le A(n) \le K_2 B(n)$, $n \in \mathbb{N}$).

Як показано в [26, с. 166], для довільної функції ψ із $\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ має місце порядкова рівність

$$\eta(t) - t \asymp \lambda(t), \quad t \ge 1, \tag{73}$$

де $\lambda(t)$ — характеристика вигляду

$$\lambda(t) = \lambda(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}. \tag{74}$$

З урахуванням (73) порядкову оцінку (72) можна записати у вигляді

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C \asymp \psi(n)\lambda(n).$$

Наступне твердження містить сильну асимптотику величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C$, $\psi \in \mathfrak{M}^{\alpha}$, при деяких природних обмеженнях на $\alpha(t)$ і $\lambda(t)$.

Теорема 4.1. *Нехай $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathfrak{M}$ і характеристики* (70), (74) *задовольняють умови*

$$\alpha(t) \downarrow 0, \tag{75}$$

$$\lambda(t) \uparrow \infty, \quad t \to \infty. \tag{76}$$

Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ таких, що

$$\alpha(n) \le \frac{1}{4}, \tag{77}$$

виконується оцінка

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \psi(n)\lambda(n)\left(\frac{1}{\pi} + \frac{\xi_1}{\lambda(n)} + \xi_2\alpha(n)\right), \tag{78}$$

де $-1 \le \xi_1 \le 1 + \dfrac{1}{\pi}$ *і* $-4 \le \xi_2 \le \dfrac{4}{3}\left(1 + \dfrac{1}{\pi}\right)$.

Доведення. Для оцінки величини $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C$ використаємо формулу (36). При цьому необхідно буде знайти оцінки рядів $\Sigma_1 = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)$ і $\Sigma_2 = \sum_{k=n}^{\infty} k\psi(k)$.

Внаслідок монотонного спадання функції $\psi \in \mathfrak{M}$

$$\int_n^{\infty} \psi(t)dt \le \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \le \psi(n) + \int_n^{\infty} \psi(t)dt,$$

а отже,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)=\int_{n}^{\infty}\psi(t)dt+\Theta_4\psi(n),\quad 0\le\Theta_4\le 1. \tag{79}$$

Оцінка інтеграла $\int_{n}^{\infty}\psi(t)dt$ випливає з наступного твердження, яке може мати і самостійний інтерес.

Лема 4.1. *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}$, $\lambda(t)$ монотонно не спадає, а $\alpha(t)$ монотонно не зростає на $[1,\infty)$. Тоді при всіх $a\ge 1$ таких, що $\alpha(a)<1$, виконуються оцінки*

$$\lambda(a)\psi(a)\le\int_{a}^{\infty}\psi(t)dt\le\lambda(a)\psi(a)\left(1+\frac{\alpha(a)}{1-\alpha(a)}\right). \tag{80}$$

Доведення. Оскільки на підставі включення $\psi\in\mathfrak{M}$ функція $\psi(t)$ є локально абсолютно неперервною на $[1,\infty)$, то, враховуючи монотонне неспадання $\lambda(t)$, одержуємо шукану оцінку знизу:

$$I_1:=\int_{a}^{\infty}\psi(t)dt=\int_{a}^{\infty}-\psi'(t)\lambda(t)dt\ge\lambda(a)\int_{a}^{\infty}(-\psi'(t))dt=\psi(a)\lambda(a). \tag{81}$$

З іншого боку, враховуючи монотонне незростання функції $\alpha(t)$ і застосовуючи метод інтегрування частинами, маємо

$$I_1=\int_{a}^{\infty}\psi(t)dt=\int_{a}^{\infty}\alpha(t)(-\psi'(t)t)dt\le\alpha(a)\int_{a}^{\infty}(-\psi'(t)t)dt$$

$$=\alpha(a)\left(\psi(a)a+\int_{a}^{\infty}\psi(t)dt\right)=\psi(a)\lambda(a)+\alpha(a)I_1. \tag{82}$$

З (82) одержуємо

$$I_1\le\frac{\lambda(a)\psi(a)}{1-\alpha(a)}=\lambda(a)\psi(a)\left(1+\frac{\alpha(a)}{1-\alpha(a)}\right). \tag{83}$$

Із (81) і (83) випливає (80).

Лему 4.1 доведено.

Застосування леми 4.1 при $a=n$, $n\in\mathbb{N}$, за умови (77) дозволяє записати, що

$$I_1=\int_{a}^{\infty}\psi(t)dt=\psi(n)\lambda(n)(1+\Theta_5\alpha(n)),\quad 0\le\Theta_5\le\frac{4}{3}. \tag{84}$$

Отже, з урахуванням (79) і (84) при $\alpha(n)\le\dfrac{1}{4}$ отримуємо

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)=\psi(n)\lambda(n)\left(1+\frac{\Theta_4}{\lambda(n)}+\Theta_5\alpha(n)\right),\quad 0\le\Theta_5\le\frac{4}{3},\quad 0\le\Theta_4\le 1. \tag{85}$$

Далі знайдемо оцінку для $\Sigma_2 = \sum_{k=n}^{\infty} k\psi(k)$. На підставі (77) функція $t\psi(t)$ спадає на $[n, \infty)$, а тому

$$\int_n^{\infty} t\psi(t)dt \le \sum_{k=n}^{\infty} k\psi(k) \le n\psi(n) + \int_n^{\infty} t\psi(t)dt \tag{86}$$

і, отже,

$$\sum_{k=n}^{\infty} k\psi(k) = \int_n^{\infty} t\psi(t)dt + \Theta_6 n\psi(n), \quad 0 \le \Theta_6 \le 1. \tag{87}$$

Для оцінки інтеграла $I_2 = \int_n^{\infty} t\psi(t)dt$ знову використаємо метод інтегрування частинами і врахуємо (71) та умову незростання $\alpha(n)$:

$$I_2 = \int_n^{\infty} t\psi(t)dt = \int_n^{\infty} t^2 \frac{\psi(t)}{-t\psi'(t)}(-\psi'(t))dt \le \alpha(n) \int_n^{\infty} t^2(-\psi'(t))dt$$

$$= \alpha(n)\big(n^2\psi(n) + 2I_2\big).$$

З останніх співвідношень і умови (77) отримуємо

$$I_2(1 - 2\alpha(n)) \le \alpha(n)n^2\psi(n)$$

і, отже, з урахуванням умови (77) маємо

$$I_2 \le \psi(n)n^2\alpha(n)\frac{1}{1-2\alpha(n)} = \psi(n)n^2\alpha(n)\left(1 + \frac{2\alpha(n)}{1-2\alpha(n)}\right)$$

$$\le \psi(n)n^2\alpha(n)(1 + 4\alpha(n)) = \psi(n)n\lambda(n)(1 + 4\alpha(n)). \tag{88}$$

З іншого боку, з урахуванням умови (84)

$$I_2 = \int_n^{\infty} t\psi(t)dt \ge n\int_n^{\infty} \psi(t)dt \ge \psi(n)n\lambda(n). \tag{89}$$

Об'єднуючи (88) і (89), при $\alpha(n) \le \dfrac{1}{4}$ одержуємо

$$\int_n^{\infty} t\psi(t)dt = \psi(n)n\lambda(n)(1 + \Theta_7\alpha(n)), \quad 0 \le \Theta_7 \le 4. \tag{90}$$

Із формул (87) і (90) випливає, що за умов (74) і (77)

$$\sum_{k=n}^{\infty} k\psi(k) = \psi(n)n\lambda(n)\left(1 + \Theta_7\alpha(n) + \frac{\Theta_6}{\lambda(n)}\right), \quad 0 \le \Theta_7 \le 4, \quad 0 \le \Theta_6 \le 1.$$

Використовуючи оцінки (86) і (85), маємо

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} k\psi(k+n)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n}^{\infty} k\psi(k) - n\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty} k\psi(k) - \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)$$

$$= \psi(n)\lambda(n)\left(1+\Theta_7\alpha(n)+\frac{\Theta_6}{\lambda(n)}\right) - \psi(n)n\lambda(n)\left(1+\Theta_5\alpha(n)+\frac{\Theta_4}{\lambda(n)}\right)$$

$$= \psi(n)\lambda(n)\left((\Theta_7-\Theta_5)\alpha(n)+\frac{\Theta_6-\Theta_4}{\lambda(n)}\right). \tag{91}$$

На підставі формули (36) і оцінок (85), (91) отримуємо, що для всіх значень n таких, що виконується нерівність (77),

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) + \Theta_2\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n)$$

$$= \frac{1}{\pi}\psi(n)\lambda(n)\left(1+\frac{\Theta_4}{\lambda(n)}+\Theta_5\alpha(n)\right)+\Theta_2\psi(n)\lambda(n)\left(1+\frac{\Theta_6-\Theta_4}{\lambda(n)}+(\Theta_7-\Theta_5)\alpha(n)\right)$$

$$= \psi(n)\lambda(n)\left(\frac{1}{\pi}+\frac{\Theta_4/\pi+\Theta_2(\Theta_6-\Theta_4)}{\lambda(n)}+\left(\frac{\Theta_5}{\pi}+\Theta_2(\Theta_7-\Theta_5)\right)\alpha(n)\right). \tag{92}$$

Оскільки для величини $\xi_1 = \dfrac{\Theta_4}{\pi}+\Theta_2(\Theta_6-\Theta_4)$ виконується нерівність

$$-1 \le \xi_1 \le 1+\frac{1}{\pi},$$

а для $\xi_2 = \dfrac{\Theta_5}{\pi}+\Theta_2(\Theta_7-\Theta_5)$ — нерівність

$$-4 \le \xi_2 \le \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{\pi}\right),$$

то із (92) випливає (78).

Теорему 4.1 доведено.

Наведемо наслідок з теореми 4.1 у випадку, коли $\psi(t) = e^{-\alpha t^{-r}}$, $\alpha > 0$, $0 < r \le 1$, тобто коли класи $C^{\psi}_{\beta,1}$ є класами узагальнених інтегралів Пуассона $C^{\alpha,r}_{\beta,1}$. Легко переконатись, що для вказаних $\psi(t)$ при всіх $t \ge 1$

$$\lambda(t) = \frac{t^{1-r}}{\alpha r}, \quad \alpha(t) = \frac{1}{\alpha r t^r}. \tag{93}$$

Із (93) видно, що умови (75) і (76) виконуються. При цьому виконання нерівності $\dfrac{1}{\alpha r n^r} \le \dfrac{1}{4}$ рівносильне виконанню умови (77). Отже, з теореми 4.1 випливає таке твердження.

***Наслідок* 4.1.** *Нехай* $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при всіх* $n \geq \left(\frac{4}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}}$ *має місце рівномірно обмежена за всіма розглядуваними параметрами оцінка*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_C = e^{-\alpha n^r} n^{1-r}\left(\frac{1}{\pi\alpha r} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}}\right)\right). \tag{94}$$

Зазначимо, що оцінку вигляду (94) при дещо жорсткіших обмеженнях на n було знайдено у роботах [18 – 20]. У зазначених роботах містяться двосторонні оцінки величини $\mathcal{O}(1)$ через абсолютні сталі.

Наведемо ще кілька прикладів застосування теореми 4.1 для різних функцій ψ із $\mathfrak{M}$, які задовольняють умови (75), (76).

Будемо розглядати такі функції $\psi(t)$:

$$\psi(t) = (t+2)^{-\ln\ln(t+2)}, \quad t \geq 1, \tag{95}$$

$$\psi(t) = e^{-\ln^2(t+1)}, \quad t \geq 1, \tag{96}$$

$$\psi(t) = e^{-\frac{t+2}{\ln(t+2)}}, \quad t \geq 1. \tag{97}$$

Для зазначених функцій $\psi(t)$ знайдемо характеристики $\lambda(t)$ і $\alpha(t)$. Результати обчислень наведено в таблиці.

$\psi(t)$	$\alpha(t)$	$\lambda(t)$
$(t+2)^{-\ln\ln(t+2)}$	$\frac{t+2}{t}\frac{1}{1+\ln\ln(t+2)}$	$\frac{t+2}{1+\ln\ln(t+2)}$
$e^{-\ln^2(t+1)}$	$\frac{t+1}{t}\frac{1}{2\ln(t+1)}$	$\frac{t+1}{2\ln(t+1)}$
$e^{-\frac{t+2}{\ln(t+2)}}$	$\frac{\ln^2(t+2)}{t(\ln(t+2)-1)}$	$\frac{\ln^2(t+2)}{\ln(t+2)-1}$

Із теореми 4.1 і наведених в таблиці значень $\alpha(t)$ і $\lambda(t)$ отримуємо асимптотичні при $n \to \infty$ рівності для величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C$ у випадку, коли функції ψ мають вигляд (95) – (97).

***Наслідок* 4.2.** *Нехай* $\psi(k) = (k+2)^{-\ln\ln(k+2)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \frac{1}{\pi}\psi(n)\frac{n}{\ln\ln(n+2)} + \mathcal{O}(1)\psi(n)\frac{n}{(\ln\ln(n+2))^2}.$$

***Наслідок* 4.3.** *Нехай* $\psi(k) = e^{-\ln^2(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \frac{1}{2\pi}\frac{\psi(n)n}{\ln(n+1)} + \mathcal{O}(1)\psi(n)\frac{n}{\ln^2(n+1)}.$$

***Наслідок* 4.4.** *Нехай* $\psi(k) = e^{-\frac{k+2}{\ln(k+2)}}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \frac{1}{\pi}\psi(n)\ln(n+2) + \mathcal{O}(1)\psi(n).$$

Зауважимо, що у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}$ і $\alpha(t) \to 0$ і $\lambda(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ за додаткової умови, що функція $\psi(t)$ є диференційовною скрізь на $[1, \infty)$, граничне співвідношення (9), яке гарантує той факт, що оцінки (12) і (36) є асимптотичними рівностями, завжди виконується.

Справді, застосовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_n^\infty \psi(t)dt}{\psi(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{|\psi'(n)|} = \lim_{n\to\infty} \lambda(n) = \infty, \tag{98}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_n^\infty t\psi(t)dt}{n\psi(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n\psi(n)}{\psi(n) + n\psi'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(n)}{1-\alpha(n)} = \infty. \tag{99}$$

Тоді з урахуванням (79) і (87) мають місце асимптотичні рівності

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) = \int_n^\infty \psi(t)dt + \mathcal{O}(1)\psi(n), \tag{100}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} k\psi(k) = \int_n^\infty t\psi(t)dt + \mathcal{O}(1)n\psi(n). \tag{101}$$

Використовуючи формули (98) – (101) і застосовуючи правило Лопіталя, отримуємо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n)}{\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k) - \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)}{\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k)}{\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)} - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\int_n^\infty t\psi(t)dt}{\int_n^\infty \psi(t)dt} - 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n\psi(n)}{\int_n^\infty \psi(t)dt - n\psi(n)} - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{-\int_n^\infty \psi(t)dt}{\int_n^\infty \psi(t)dt - n\psi(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{-2\psi(n) - n\psi'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\psi(n)}{-n\psi'(n)}}{1 - \frac{2\psi(n)}{-n\psi'(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{1-\alpha(n)} = 0,
\end{aligned}$$

що й доводить рівність (9).

5. Коментарі щодо нерівностей Лебега. У пунктах 3 і 4 наведено наслідки з теореми 2.2 для швидко спадних послідовностей $\psi(k)$, для яких формула (36) є асимптотичною рівністю, або, що те саме, коли справджується (9). Зрозуміло, що у всіх розглянутих у пунктах 3 і 4 частинних випадках для $\psi(\cdot)$ легко одержати й асимптотично непокращувані нерівності типу

Лебега вигляду (35). Ми обмежимось лише формулюванням деяких тверджень, які випливають із теореми 2.1. Спочатку сформулюємо відповідні твердження для $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$, $\alpha > 0$ і $r > 0$. Випадки $r > 1$, $r = 1$ і $r \in (0, 1)$ розглядаються окремо.

***Наслідок* 5.1.** *Нехай $r > 1$, $\alpha > 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $n \geq \left(\frac{3}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}} - 1$ для довільної функції $f \in C^{\alpha,r}_{\beta} L_1$ має місце нерівність*

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \leq e^{-\alpha n^r}\left(\frac{1}{\pi} + \mathcal{O}(1)e^{-\alpha n^{r-1}}\left(1 + \frac{1}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\right)\right)E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}. \quad (102)$$

Крім того, для довільної функції $f \in C^{\alpha,r}_{\beta} L_1$ можна знайти функцію $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f;n,x)$ з множини $C^{\alpha,r}_{\beta} L_1$ таку, що $E_n(\mathcal{F}^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1} = E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}$ і має місце рівність

$$\|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F}(\cdot);\cdot)\|_C = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{1}{\pi} + \mathcal{O}(1)e^{-\alpha n^{r-1}}\left(1 + \frac{1}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\right)\right)E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}. \quad (103)$$

У (102) *і* (103) $\mathcal{O}(1)$ *— рівномірно обмежена за всіма параметрами величина.*

Аналоги нерівності (102) і формули (103), яка доводить асимптотичну непокращуваність зазначеної нерівності, в яких залишкові члени записано в дещо іншій формі, отримано в [9].

***Наслідок* 5.2.** *Нехай $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді для довільної функції $f \in C^{\alpha,1}_{\beta} L_1$ має місце нерівність*

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \leq \frac{1}{\pi}\frac{e^{-\alpha n}}{1 - e^{-\alpha}}E_n(f^{\alpha,1}_{\beta})_{L_1}. \quad (104)$$

Крім того, для довільної функції $f \in C^{\alpha,1}_{\beta} L_1$ можна знайти функцію $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f;n,x)$ з множини $C^{\alpha,1}_{\beta} L_1$ таку, що $E_n(\mathcal{F}^{\alpha,1}_{\beta})_{L_1} = E_n(f^{\alpha,1}_{\beta})_{L_1}$ і має місце рівність

$$\|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F}(\cdot);\cdot)\|_C = e^{-\alpha n}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} + \frac{\xi}{n}\frac{1}{(1 - e^{-\alpha})^2}\right)E_n(f^{\alpha,1}_{\beta})_{L_1}, \quad (105)$$

де для величини $\xi = \xi(f;n;\alpha;\beta)$ виконується нерівність $-2 \leq \xi \leq 0$.

Оцінки (104) і (105) уточнюють оцінки рівномірних відхилень сум Фур'є на множинах інтегралів Пуассона $C^{\alpha,1}_{\beta} L_1$, що були одержані в роботах [8, 14].

***Наслідок* 5.3.** *Нехай $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді при всіх $n \geq \left(\frac{4}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}}$ для довільної функції $f \in C^{\alpha,r}_{\beta} L_1$ має місце нерівність*

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \leq e^{-\alpha n^r} n^{1-r}\left(\frac{1}{\pi\alpha r} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}}\right)\right)E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}. \quad (106)$$

Крім того, для довільної функції $f \in C^{\alpha,r}_{\beta} L_1$ можна знайти функцію $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f;n,x)$ з множини $C^{\alpha,r}_{\beta} L_1$ таку, що $E_n(\mathcal{F}^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1} = E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}$ і має місце рівність

$$\|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F}(\cdot);\cdot)\|_C = e^{-\alpha n^r} n^{1-r}\left(\frac{1}{\pi\alpha r} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}}\right)\right)E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}. \quad (107)$$

У (106) *і* (107) $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена за всіма параметрами.*

При дещо жорсткіших обмеженнях на n формули вигляду (106) і (107) встановлено в [21].

***Наслідок* 5.4.** *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при всіх* n *таких, що виконується нерівність* (61), *для довільної функції* $f \in C^{\psi}_{\beta} L_1$ *має місце нерівність*

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \le \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^2} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}. \quad (108)$$

Крім того, для довільної функції $f \in C^{\psi}_{\beta} L_1$ *можна знайти функцію* $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f;n,x)$ *з множини* $C^{\psi}_{\beta} L_1$ *таку, що* $E_n(\mathcal{F}^{\psi}_{\beta})_{L_1} = E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}$ *і при виконанні* (60) *має місце рівність*

$$\|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F}(\cdot);\cdot)\|_C = \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^2} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}. \quad (109)$$

У (108) *і* (109) *величина* ε_n *означена рівністю* (61), *а* $\mathcal{O}(1)$ *— величина, що рівномірно обмежена за всіма параметрами.*

Теорема 5.1. *Нехай* $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathfrak{M}$ *і характеристики* $\alpha(t)$ *і* $\lambda(t)$ *вигляду* (70) *і* (74) *задовольняють умови* (75) *і* (76). *Тоді для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *таких, що* $\alpha(n) < \dfrac{1}{4}$, *для будь-якої функції* $f \in C^{\psi}_{\beta} L_1$ *виконується нерівність*

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \le \psi(n)\lambda(n)\left(\frac{1}{\pi} + \frac{\xi_3}{\lambda(n)} + \xi_4\alpha(n)\right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}, \quad (110)$$

де $0 \le \xi_3 \le \dfrac{4}{3\pi}$, $0 \le \xi_4 \le \dfrac{1}{\pi}$.

Крім того, для довільної функції $f \in C^{\psi}_{\beta} L_1$ *можна знайти функцію* $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f;n,x)$ *з множини* $C^{\psi}_{\beta} L_1$ *таку, що* $E_n(\mathcal{F}^{\psi}_{\beta})_{L_1} = E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}$ *і при* $n \in \mathbb{N}$ *таких, що* $\alpha(n) < \dfrac{1}{4}$, *має місце рівність*

$$\|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F}(\cdot);\cdot)\|_C = \psi(n)\lambda(n)\left(\frac{1}{\pi} + \frac{\xi_5}{\lambda(n)} + \xi_6\alpha(n)\right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}, \quad (111)$$

де $-2 \le \xi_5 \le 2 + \dfrac{1}{\pi}$, $-8 \le \xi_6 \le \dfrac{4}{3}\left(2 + \dfrac{1}{\pi}\right)$.

Нерівність (110) є наслідком формул (11) і (85), а рівність (111) випливає із (12), (85) і (91).

Література

1. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Мир, Москва (1965).
2. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, Москва (1977).
3. L. Fejer, *Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen*, J. reine und angew. Math., **138**, 22 – 53 (1910).
4. П. В. Галкин, *Оценки для констант Лебега*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **109**, 3 – 5 (1971).
5. В. В. Жук, Г. И.Натансон, *Тригонометрические ряды и элементы теории аппроксимации*, Изд-во Ленинград. ун-та (1983).
6. A. Kolmogoroff, *Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbaren Funktionen*, Ann. Math. (2), **36**, № 2, 521 – 526 (1935).
7. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, Москва (1987).
8. А. П. Мусієнко, А. С. Сердюк, *Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на множинах аналітичних функцій*, Укр. мат. журн., **65**, № 4, 522-537 (2013).

9. А. П. Мусієнко, А. С. Сердюк, *Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на множинах цілих функцій*, Укр. мат. журн., **65**, № 5, 642 – 653 (2013).
10. Г. И. Натансон, *Об оценке констант Лебега сумм Валле – Пуссена*, Геометрические вопросы теории функций и множеств, Калинин (1986).
11. С. М. Никольский, *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **10**, № 3, 207 – 256 (1946).
12. А. С. Сердюк, *Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці*, Укр. мат. журн., **57**, № 8, 1079 – 1096 (2005).
13. А. С. Сердюк, *Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p*, Укр. мат. журн., **57**, № 10, 1395 – 1408 (2005).
14. А. С. Сердюк, А. П. Мусієнко, *Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена при наближенні інтегралів Пуассона*, Теорія наближення функцій та суміжні питання, **7**, № 1, 298 – 316 (2010).
15. A. S. Serdyuk, I. V. Sokolenko, *Approximation by Fourier sums in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness*, Methods Funct. Anal. and Top., **25**, № 4, 381 – 387 (2019).
16. А. С. Сердюк, І. В. Соколенко, *Наближення сумами Фур'є на класах диференційовних у сенсі Вейля – Надя функцій із високим показником гладкості*, Укр. мат. журн., **74**, № 5, 685 – 700 (2022).
17. А. С. Сердюк, *Оцінки найкращих наближень класів нескінченно диференційовних функцій у рівномірній та інтегральній метриках*, Укр. мат. журн., **66**, № 9, 1244 – 1256 (2014).
18. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк, *Рівномірні наближення сумами Фур'є на класах згорток з інтегралами Пуассона*, Доп. НАН України, № 11, 10 – 16 (2016).
19. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк, *Наближення класів узагальнених інтегралів Пуассона сумами Фур'є в метриках просторів L_s*, Укр. мат. журн., **69**, № 5, 695 – 704 (2017).
20. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk, *Uniform approximations by Fourier sums on classes of generalized Poisson integrals*, Anal. Math., **45**, № 1, 201 – 236 (2019).
21. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk, *Asymptotically best possible Lebesque-type inequalities for the Fourier sums on sets of generalized Poisson integrals*, Filomat, **34**, № 14, 4697 – 4707 (2020).
22. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk, *About Lebesgue inequalities on the classes of generalized Poisson integrals*, Jaen J. Approx., **12**, 25 – 40 (2021).
23. А. И. Степанец, *Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **50**, № 1, 101 – 136 (1986).
24. А. И. Степанец, *Классификация и приближение периодических функций*, Наук. думка, Киев (1987).
25. А. И. Степанец, *Методы теории приближений*: в 2 ч., Пр. Інституту математики НАН України, **40**, ч. 1 (2002).
26. А. И.Степанец, *Методы теории приближений*: в 2 ч., Пр. Інституту математики НАН України, **40**, ч. 2 (2002).
27. A. I. Stepanets, *On the Lebesgue inequality on classes of (ψ, β)-differentiable functions*, Ukr. Math. J., **41**, № 4, 435 – 443 (1989).
28. А. И. Степанец, А. С. Сердюк, *Неравенства Лебега для интегралов Пуассона*, Укр. мат. журн., **52**, № 6, 798-808 (2000).
29. А. И. Степанец, А. С. Сердюк, *Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций*, Укр. мат. журн., **52**, № 3, 375 – 395 (2000).
30. О. І. Степанець, А. С. Сердюк, А. Л. Шидліч, *Про деякі нові критерії нескінченної диференційовності періодичних функцій*, Укр. мат. журн., **59**, № 10, 1399 – 1409 (2007).
31. А. И. Степанец, А. С. Сердюк, А. Л. Шидлич, *Классификация бесконечно дифференцируемых функций*, Укр. мат. журн., **60**, № 12, 1686 – 1708 (2008).
32. С. Б. Стечкин, *Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций. Приближение функций полиномами и сплайнами*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **145**, 126 – 151 (1980).
33. С. А. Теляковский, *О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **62**, 61 – 97 (1961).
34. С. А. Теляковский, *Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье*, Мат. заметки, **4**, № 3, 291 – 300 (1968).
35. С. А. Теляковский, *О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости*, Укр. мат. журн., **41**, № 4, 510 – 518 (1989).

Одержано 13.12.22