

Микола Працьовитий¹ (Інститут математики НАН України, Київ; Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ),

Яніна Гончаренко, Ірина Лисенко (Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ),

Софія Ратушняк (Інститут математики НАН України, Київ; Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ)

СКІНЧЕННІ ЛАНЦЮГОВІ A_2 -ДРОБИ В ЗАДАЧАХ РАЦІОНАЛЬНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

We consider finite continued fractions whose elements are numbers $\frac{1}{2}$ and 1 (the so-called A_2 -continued fractions): $1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n = [0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, $a_i \in A_2 = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$. We study the structure of the set F of values of all these fractions and the problem of the number of representations of numbers from the segment $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ by fractions of this kind. It is proved that the set $F \subset \left[\frac{1}{3}; 2\right]$ has a scale-invariant structure and is dense in the segment $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; the set of its elements that are greater than 1 is the set of terms of two decreasing sequences approaching 1, while the set of its elements that are smaller than $\frac{1}{2}$ is the set of terms of two increasing sequences approaching $\frac{1}{2}$. The fundamental difference between the representations of numbers with the help of finite and infinite A_2 -fractions is emphasized. The following hypothesis is formulated: every rational number of the segment $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ can be represented in the form of a finite A_2 -continued fraction.

Розглядаються скінченні ланцюгові дроби, елементами яких є числа $\frac{1}{2}$ і 1 (так звані ланцюгові A_2 -дроби): $1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n = [0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, $a_i \in A_2 = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$. Вивчається структура множини F значень усіх таких дробів, а також питання про кількість зображень чисел з відрізка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ такими дробами. Доведено, що множина $F \subset \left[\frac{1}{3}; 2\right]$ має автомодельну структуру і є щільною у відрізку $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; множина її елементів, більших 1, є множиною членів двох спадних послідовностей, збіжних до 1, а менших $\frac{1}{2}$ — множиною членів двох зростаючих послідовностей, збіжних до $\frac{1}{2}$. Акцентовано увагу на принципову відмінність зображень чисел скінченними та нескінченними A_2 -дробами. Сформульовано гіпотетичне твердження: кожне раціональне число відрізка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ має зображення скінченним ланцюговим A_2 -дробом.

1. Вступ. Нагадаємо, що ланцюговим (неперервним) дробом називається вираз вигляду

$$a_0 + b_1/a_1 + \dots + b_n/a_n + \dots = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots}}, \quad (1)$$

де $(a_n)_{n=0}^\omega$ і $(b_n)_{n=1}^\omega$ — скінченні або нескінченні числові послідовності. Існують різні види ланцюгових дробів та їх узагальнення. Вираз (1) при умові, що $b_n = 1$ для всіх $n \in N$, називається простим ланцюговим дробом, а при додатковій умові $a_0 \in Z_0$, $a_n \in N$ — елементарним

¹ Відповідальний за листування, e-mail: prats4444@gmail.com.

ланцюговим дробом. Простий ланцюговий дріб $a_0 + 1/a_1 + \dots + 1/a_n + \dots$ скорочено (символічно) позначають так: $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, при цьому числа a_n називаються елементами останнього. Якщо елементами простого ланцюгового дробу є числа 0 та 1, то він називається ланцюговим дробом Данжуа [2]. Існують інші різновиди ланцюгових дробів. Теорія ланцюгових дробів є добре розвинутою і має багато різнопланових застосувань [4]. Насамперед це стосується елементарних ланцюгових дробів, тобто таких, що мають своїми елементами натуральні числа. Відносно нові застосування ланцюгових дробів стосуються теорії сингулярних розподілів випадкових величин [1, 11], фрактального аналізу та фрактальної геометрії, а також теорії функцій зі складною несамоподібною локальною структурою [10, 17].

Далі вважатимемо, що $a_0 = 0$. Ланцюговий дріб, всі елементи якого належать двоелементній множині $\{e_0, e_1\}$, $0 < e_0 < e_1$, називається *ланцюговим A_2 -дробом* (*A_2 -дробом*). Основи теорії нескінченних A_2 -дробів закладено в роботі [3]. Подальший розвиток вони отримали в роботах [5–7, 17]. Зрозуміло, що кожен з нескінченних A_2 -дробів є збіжним (має скінченне значення) згідно з відомою теоремою Зейделя, оскільки розбігається відповідний ряд, складений з елементів A_2 -дробу. Нас цікавить структура і властивості множини $E(e_0, e_1)$ значень усіх таких дробів і її підмножин: F – скінченних A_2 -дробів і $H \equiv E \setminus F$. Очевидно, що найменшим значенням нескінченного A_2 -дробу є число r_1 , а найбільшим – число r_2 :

$$r_1 = \frac{\sqrt{e_0^2 e_1^2 + 4e_0 e_1} - e_0 e_1}{2e_1}, \quad r_2 = \frac{\sqrt{e_0^2 e_1^2 + 4e_0 e_1} - e_0 e_1}{2e_0}.$$

Тому $E \setminus F \equiv H \subset [r_1; r_2]$. Як відомо, за умови $e_0 \cdot e_1 > \frac{1}{2}$ множина H є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Зокрема, такою вона є, коли $e_0 = 1$, $e_1 = 2$. У цьому випадку проблема розмірності Гаусдорфа – Безиковича множини H , наскільки відомо авторам, до кінця не розв’язана. За умови $e_0 \cdot e_1 \leq \frac{1}{2}$ виконується рівність $H = [r_1; r_2]$. При $e_0 \cdot e_1 = \frac{1}{2}$ система зображення чисел відрізка $[r_1; r_2]$ нескінченними A_2 -дробами має нульову надлишковість, тобто кожне число цього відрізка має не більше двох зображень, причому тих чисел, що мають два зображення, лише зліченна множина. Нині теорія нескінченних ланцюгових A_2 -дробів включає геометричну складову (позиційну та метричну, зокрема властивості циліндричних та хвостових множин, розв’язки ряду метричних задач тощо), відповідну ймовірнісну теорію, застосування в теорії функцій, теорії сингулярних розподілів випадкових величин, фрактальній геометрії та фрактальному аналізі. Досі поза увагою залишились питання наближення чисел скінченними ланцюговими A_2 -дробами (проблема апроксимації ірраціональних чисел раціональними), тобто питання раціональних наближень дійсних чисел їхніми підхідними A_2 -дробами. Невідомим також сьогодні є критерій раціональності числа за його розкладом у A_2 -дріб. Гіпотетичне твердження про те, що для кожного раціонального числа існує розклад у скінченний ланцюговий A_2 -дріб, поки що не вдалось ні довести, ні спростувати.

Дану роботу присвячено скінченним ланцюговим A_2 -дробам. Нас цікавлять структурні і топологічні властивості множини F значень усіх скінченних A_2 -дробів.

2. Базисні поняття і факти теорії ланцюгових A_2 -дробів. Нехай задано алфавіт $A_2 \equiv \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$ і простір послідовностей елементів алфавіту $L \equiv A_2 \times A_2 \times \dots$.

Відомо [3], що для будь-якого $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ існує $(a_k) \in L$ така, що

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots] \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_k \dots}^{A_2}.$$

Символічний запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_k \dots}^{A_2}$ називається A_2 -зображенням числа x . Існують числа, що мають два A_2 -зображення, оскільки $\left[0; a_1, \dots, a_m, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right] = \left[0; a_1, \dots, a_m, 1, \left(1, \frac{1}{2}\right)\right]$. Вони називаються A_2 -бінарними (тут круглі дужки символізують період). Кожне A_2 -бінарне число є раціональним. Решта чисел мають єдине A_2 -зображення, вони називаються A_2 -унарними.

Підхідним дробом порядку n числа $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ називається раціональне число $\frac{p_n}{q_n}$, що є значенням скінченного ланцюгового дробу $[0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$. Добре відомим є загальний закон утворення підхідних дробів ланцюгового дробу $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, який має вигляд $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$, $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, де $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $a_n \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

A_2 -циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ у множині H називається множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{A_2} = \left\{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \beta_1 \dots \beta_n \dots}^{A_2}, (\beta_n) \in L\right\}$$

всіх чисел $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, що мають нескінченне A_2 -зображення, перші m цифр яких відповідно дорівнюють $c_1, c_2, \dots, c_m$. Очевидно, що $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2} = \Delta_{c_1 \dots c_m \frac{1}{2}}^{A_2} \cup \Delta_{c_1 \dots c_m 1}^{A_2}$.

1. A_2 -циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}$ є відрізком з кінцями: $\Delta_{c_1 \dots c_m (\frac{1}{2}, 1)}^{A_2}$ і $\Delta_{c_1 \dots c_m (1, \frac{1}{2})}^{A_2}$, причому який з них лівий, а який правий залежить від парності та непарності числа m .

2. Довжина циліндра $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}$ обчислюється за формулою

$$|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}| = \frac{1}{(q_{m-1} + q_m)(q_{m-1} + 2q_m)} \leq \frac{1}{q_{m-1}^2},$$

де q_m — знаменник m -го порядку підхідного дробу, тобто знаменник раціонального числа, що є значенням виразу $[0; c_1, c_2, \dots, c_m]$, який обчислюється за формулами $q_0 = 1$, $q_1 = c_1$, $q_{n+1} = c_{n+1}q_n + q_{n-1}$, де $c_n \in A_2$.

3. Основне метричне відношення для A_2 -зображення чисел має вигляд

$$\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m c}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}|} = \frac{1 + c \frac{q_{m-1}}{q_m}}{2c^2 + 1 + 2c \frac{q_{m-1}}{q_m}}, \quad c \in A_2.$$

Зокрема,

$$\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m \frac{1}{2}}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}|} = \frac{2 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}{3 + 2 \frac{q_{m-1}}{q_m}}, \quad \frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m 1}^{A_2}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}|} = \frac{1 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}{3 + 2 \frac{q_{m-1}}{q_m}},$$

звідки

$$\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m \frac{1}{2}}^A|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m 1}^A|} = \frac{2 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}{1 + \frac{q_{m-1}}{q_m}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}.$$

$$4. \ x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_k}^{A_2} = [0; c_1, c_2, \dots, c_k, \dots] \in \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

Система A_2 -циліндрів є системою довірчих покриттів при обчисленні фрактальної розмірності Гаусдорфа – Безиковича підмножин відрізка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Вказані метричні відношення дозволяють відносно легко встановити нормальну властивість чисел в їхніх A_2 -зображеннях. Властивість B A_2 -зображення числа $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ називається нормальною, якщо множина H_B чисел, що мають цю властивість, є множиною повної міри Лебега, тобто $\lambda\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right] \setminus H_B\right) = 0$.

Теорема 1 [10]. Нехай $(c_1, \dots, c_p)$ – впорядкований набір елементів алфавіту $\left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$. Множина $D_0 = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{A_2}, \overline{\alpha_{k+1} \alpha_{k+2} \dots \alpha_{k+p}} \neq \overline{c_1 \dots c_p} \ \forall k \in \mathbb{N}\}$ всіх чисел відрізка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, A_2 -зображення яких не містить набору $c_1 \dots c_p$ в якості послідовних цифр зображення, має нульову міру Лебега.

Наслідок 1. Рівність $\lambda(D_0 \cap \Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}) = 0$ виконується для довільного набору $c_1 \dots c_m$.

Теорема 2 [10]. Нехай $(a_1, \dots, a_m)$ – довільний впорядкований набір елементів алфавіту $\left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$. Множина H всіх чисел відрізка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, в A_2 -зображенні яких даний набір використовується в якості набору послідовних цифр зображення нескінченну кількість разів, є множиною повної міри, тобто $\lambda\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right] \setminus H\right) = 0$.

Зауважимо, що сьогодні не розв’язана задача для нескінченних ланцюгових A_2 -дробів, що є аналогом задачі Гаусса – Кузьміна для елементарних ланцюгових дробів – однієї з перших задач метричної теорії динамічних систем [12, 13].

A_2 -зображення легко перекодовується засобами алфавіту $A = \{0, 1\}$, а саме,

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^A, \quad \text{де} \quad \alpha_k = 2a_k - 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \in \{0, 1\}.$$

Останнє називається A -зображенням числа x . Таке перекодування створює додаткові зручності у формальному аспекті для розвитку теорії локально складних, зокрема, сингулярних функцій [10].

3. Структура множини значень скінченних ланцюгових A_2 -дробів. Далі основним об’єктом розгляду є скінченний ланцюговий A_2 -дріб $[0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ і його значення x , тобто раціональне число $x = \frac{p_n}{q_n}$, обчислене за наведеними вище формулами. Очевидно, що най-

більшим значенням такого дробу є число $2 = \left[0; \frac{1}{2}\right]$, а найменшим $-\frac{1}{3} = \left[0; 1, \frac{1}{2}\right]$, тобто $F \subset \left[\frac{1}{3}; 2\right]$.

Значення A_2 -дробів, які менші 0, 5. Розглянемо число $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n] < \frac{1}{2}$.

Лема 1. *Послідовність $v_n \equiv \left[0; \left(1, \frac{1}{2}\right)^n\right]$, $n \in N$, значень скінченних A_2 -дробів є зростаючою і прямує до $\frac{1}{2}$, причому для довільного натурального $n \in N$*

$$v_n = \frac{4^n - 1}{2 \cdot 4^n + 1} < \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції. При $n = 1$ маємо $v_1 = \frac{1}{3}$. Припустимо, що рівність (2) виконується при $n = k$, тобто $v_k = \left[0; \left(1, \frac{1}{2}\right)^k\right] = \frac{4^k - 1}{2 \cdot 4^k + 1}$, і розглянемо її при $n = k + 1$:

$$v_{k+1} = \left[0; \left(1, \frac{1}{2}\right)^{k+1}\right] = \frac{1 + 2v_k}{3 + 2v_k} = \frac{1 + 2 \cdot \frac{4^k - 1}{2 \cdot 4^k + 1}}{3 + 2 \cdot \frac{4^k - 1}{2 \cdot 4^k + 1}} = \frac{4^{k+1} - 1}{2 \cdot 4^{k+1} + 1}.$$

Отже, рівність (2) виконується для довільного натурального n . При цьому очевидно, що $v_n < \frac{1}{2}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{1}{2}$.

Лема 2. *Послідовність $\omega_n \equiv \left[0; \left(1, \frac{1}{2}\right)^{n-1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $n \in N$, значень скінченних ланцюгових A_2 -дробів є зростаючою і прямує до $\frac{1}{2}$, причому для довільного натурального $n \in N$*

$$\omega_n = \frac{1 + 2\omega_{n-1}}{3 + 2\omega_{n-1}} = \frac{7 \cdot 4^{n-1} - 1}{14 \cdot 4^{n-1} + 1}. \quad (3)$$

Доведення. Перша з рівностей (3) є очевидною, оскільки $\omega_k = \left[0; 1, \frac{1}{2} + \omega_{k-1}\right]$. Для доведення другої скористаємось методом математичної індукції. При $n = 1$ маємо $\omega_1 = \left[0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$. При $n = 2$ маємо $\omega_2 = \left[0; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \frac{1 + 2\omega_1}{3 + 2\omega_1} = \frac{9}{19} < \frac{1}{2}$.

Припустимо істинність твердження для $n = k$, тобто

$$\omega_k = \left[0; \left(1, \frac{1}{2}\right)^{k-1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \frac{1 + 2\omega_{k-1}}{3 + 2\omega_{k-1}} = \frac{7 \cdot 4^{k-1} - 1}{14 \cdot 4^{k-1} + 1},$$

і розглянемо його при $n = k + 1$. Оскільки

$$\omega_{k+1} = \frac{1 + 2\omega_k}{3 + 2\omega_k} = \frac{1 + 2 \cdot \frac{7 \cdot 4^{k-1} - 1}{14 \cdot 4^{k-1} + 1}}{3 + 2 \cdot \frac{7 \cdot 4^{k-1} - 1}{14 \cdot 4^{k-1} + 1}} = \frac{7 \cdot 4^k - 1}{14 \cdot 4^k + 1},$$

то твердження виконується для довільного $n \in N$.

Теорема 3. Якщо x — значення скінченного ланцюгового A_2 -дробу, яке менше $\frac{1}{2}$, то $x \in M \equiv \{(v_n), (\omega_n)\}$, де $v_n = \left[0; \left(1, \frac{1}{2}\right)^n\right]$, $\omega_n = \left[0; \left(1, \frac{1}{2}\right)^{n-1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $n \in N$.

Доведення. Нехай $x = [0; a_1, \dots, a_n]$. 1. Доведемо, що коли $a_1 = \frac{1}{2}$, то $x = \omega_1 = \frac{2}{5}$.

Оскільки $\left[0; \frac{1}{2}\right] = 2 > \frac{1}{2}$, $\left[0; \frac{1}{2}, 1\right] = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, то розглянемо число $x = \left[0; \frac{1}{2}, 1, a_3, \dots, a_n\right] = \left[0; \frac{1}{2}, 1 + r\right]$, де $r = [0; a_3, \dots, a_n]$. Умова $x = \frac{2(1+r)}{3+r} < \frac{1}{2}$ рівносильна нерівності $r < \frac{-1}{3}$, що суперечить умові $r \in F$. Отже, $a_2 \neq 1$, тобто $a_2 = \frac{1}{2}$. Розглянемо ланцюговий дріб

$$\left[0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a_3, \dots, a_n\right] = \left[0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r\right] = \frac{4r+2}{2r+5}, \quad \text{де } r = [0; a_3, \dots, a_n].$$

Припускаючи, що $\frac{4r+2}{2r+5} < \frac{1}{2}$, отримуємо $r < \frac{1}{6}$, що суперечить умові $r \in F$. Отже, $x = \omega_1$.

2. Нехай $a_1 = 1$. Доведемо, що тоді $a_2 = \frac{1}{2}$. Припустимо супротивне, тобто що $a_2 = 1$. Оскільки $[0; 1, 1] = \frac{1}{2}$ і $[0; 1, 1, a_3, \dots, a_n] = [0; 1, 1 + r] > \frac{1}{2}$, де $r = [0; a_3, \dots, a_n] \in F$, то $a_2 = \frac{1}{2}$ і $x = \left[0; 1, \frac{1}{2}\right] = v_1$ або $x = \left[0; 1, \frac{1}{2}, a_3, \dots, a_n\right]$.

Доведемо, що коли $a_3 = \frac{1}{2}$, то $a_4 = \frac{1}{2}$ і $x = \left[0; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \omega_2$. Припускаючи супротивне, тобто що $a_4 = 1$, маємо $\left[0; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right] = \frac{7}{13} > \frac{1}{2}$ або $x = \left[0; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + r\right] > \frac{7}{13}$. Розглянемо число $x = \left[0; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + r\right] < \frac{1}{2}$, де $r \in F$. Тоді $x = \frac{7+5r}{13+7r} < \frac{1}{2}$, що рівносильно $r < -\frac{1}{3}$.

А це суперечить умові $r \in F$. Отже, $a_4 = \frac{1}{2}$ і $x = \omega_2$ або $x = \left[0; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r\right]$, де $r \in F$. Але умова $\left[0; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r\right] = \frac{9+10r}{19+14r} < \frac{1}{2}$ рівносильна умові $r < \frac{1}{6}$, що суперечить $r \in F$. Отже, $x = \omega_2$.

Оскільки умова $x = \left[0; 1, \frac{1}{2} + r\right] < \frac{1}{2}$, де $r = [0; a_3, \dots, a_n] \in F$, рівносильна умові $r < \frac{1}{2}$, то $x = v_2$ або $x = \omega_3$, $x = \left[0; \left(1, \frac{1}{2}\right)^2, a_5, \dots, a_n\right]$. Індуктивно міркуючи далі, приходимо до висновку, що $x \in (v_n)$ або $x \in (\omega_n)$.

Зауваження 1. Якщо число $x < \frac{1}{2}$ є значенням скінченного ланцюгового A_2 -дробу, то кількість елементів його A_2 -зображення є парним числом.

Значення A_2 -дробів, які більші за 1. Очевидно, що коли значення A_2 -дробу $[0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ більше 1, то $a_1 = \frac{1}{2}$.

Лема 3. Послідовності $u_n \equiv \left[0; \frac{1}{2}, \left(1, \frac{1}{2}\right)^n\right]$ і $s_n \equiv \left[0; \frac{1}{2}, \left(1, \frac{1}{2}\right)^{n-1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $n \in N$, значень скінчених A_2 -дробів спадні і збігаються до 1, причому

$$u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + v_n} = \frac{4^{n+1} + 2}{4^{n+1} - 1} > 1, \quad s_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + \omega_n} = \frac{7 \cdot 4^n + 2}{7 \cdot 4^n - 1}.$$

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. При $n = 1$ маємо

$$u_1 \equiv \left[0; \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{2}}}} = \frac{6}{5} = \frac{4^2 + 2}{4^2 - 1} = \frac{18}{15},$$

$$s_1 = \left[0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}}} = \frac{10}{9} = \frac{7 \cdot 4 + 2}{7 \cdot 4 - 1} = \frac{30}{27}.$$

Припустимо, що формула для обчислення u_n є правильною для всіх $n \leq k$, і розглянемо випадок $n = k + 1$:

$$u_{k+1} = \left[0; \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \left(1, \frac{1}{2}\right)^k\right] = \left[0; \frac{1}{2}, 1 + u_k\right] = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{4^{k+1} + 2}{4^{k+1} - 1}}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{4^{k+1} - 1}{2 \cdot 4^{k+1} + 1}} = \frac{4^{k+2} + 2}{4^{k+2} - 1} = \frac{4^{(k+1)+1} + 2}{4^{(k+1)+1} - 1} > 1.$$

Отже, формула для обчислення u_n справджується для довільного $n \in N$. Рівність $u_n = \left[0; \frac{1}{2} + v_n\right]$ є очевидною.

Якщо $\frac{1}{2} > r \in F$, то очевидно, що $1 < x = \left[0; \frac{1}{2} + r\right]$ і $x \in F$. Тому $1 < s_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + \omega_n} \in F$.

Тоді, підставляючи вираз ω_n в останню рівність, отримуємо формулу для обчислення s_n .

Теорема 4. Якщо $1 < x$ — значення скінченного A_2 -дроби, то $x \in B \equiv \{2, (u_n), (s_n)\}$, де $u_n \equiv \frac{4^{n+1} + 2}{4^{n+1} - 1} = \left[0; \frac{1}{2}, \left(1, \frac{1}{2}\right)^n\right]$, $s_n \equiv \frac{7 \cdot 4^n + 2}{7 \cdot 4^n - 1} = \left[0; \frac{1}{2}, \left(1, \frac{1}{2}\right)^{n-1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $n \in N$.

Доведення. Справді, якщо $1 < x \in F$, то очевидно, що $a_1 = \frac{1}{2}$, а отже, $x = \left[0; \frac{1}{2}\right] = 2$ або $x = \left[0; \frac{1}{2} + r\right]$, де $\frac{1}{2} > r \in F$. Тоді згідно з теоремою 3 або $r \in (v_n)$, або $r \in (\omega_n)$. Тому $x \in (u_n)$ або $x \in (s_n)$.

Функція δ_i , означена на множині F рівністю $\delta_i(x = [0; a_1, \dots, a_n]) = [0; i, a_1, \dots, a_n]$, називається оператором правостороннього зсуву з параметром $i \in A_2$.

Теорема 5. Множина F значень усіх скінченних ланцюгових A_2 -дроби має автотопологічну структуру (структурну фрактальність), є зліченною, щільною у відріzkі $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ множиною.

Множина $D \equiv F \setminus \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ є зліченною множиною ізольованих точок, граничними точками якої є $\frac{1}{2}$ і 1.

Доведення. Оскільки $F = F_0 \cup F_1$, де $F_i = \delta_i(F)$, $i = 0, 1$, то F є автомодельною множиною, тобто структурно фрактальною.

Зліченність множини F очевидна, оскільки значення скінченного ланцюгового A_2 -дробу є раціональним числом. З огляду на теореми 3 і 4 залишилося довести щільність множини F у відрізку $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, тобто що між будь-якими двома точками цього відрізка міститься принаймні одна точка множини F .

Оскільки для довільних двох точок з відрізка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ легко вказати A_2 -циліндр, який цілком лежить між цими точками, то для доведення твердження достатньо для довільного A_2 -циліндра $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}$ вказати точку множини F , що йому належить. Такою є точка $\left[0; c_1, \dots, c_m, \frac{1}{2}, 1\right] = \left[0; c_1, \dots, c_m, \frac{1}{2} + 1\right]$. Це легко бачити, оскільки кінцями циліндра $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{A_2}$ є значення ланцюгових дробів $[0; c_1, \dots, c_{m-1}, c_m + 1]$ і $[0; c_1, \dots, c_{m-1}, c_m + \frac{1}{2}]$.

Лема 4. Для кожного натурального n підхідний дріб $\frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, \dots, a_n]$ нескінченного ланцюгового A_2 -дробу $[0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ не належить циліндру $\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}$.

Доведення. Справді, якщо число n непарне, то $\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2} = \left[\Delta_{a_1 \dots a_n(1, \frac{1}{2})}^{A_2}; \Delta_{a_1 \dots a_n(\frac{1}{2}, 1)}^{A_2}\right]$ і дріб $\frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, \dots, a_n] < \Delta_{a_1 \dots a_n(1, \frac{1}{2})}^{A_2}$.

Якщо ж число n парне, то

$$\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2} = \left[\Delta_{a_1 \dots a_n(\frac{1}{2}, 1)}^{A_2}; \Delta_{a_1 \dots a_n(1, \frac{1}{2})}^{A_2}\right]$$

і дріб $\frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, \dots, a_n] > \Delta_{a_1 \dots a_n(1, \frac{1}{2})}^{A_2}$.

Це на перший погляд парадоксальне твердження має наступне просте пояснення.

Тополого-метричні властивості A_2 -циліндрів, що відповідають зображенням чисел скінченими та нескінченими A_2 -дробами (у множині E), принципово відрізняються від властивостей циліндрів у множині H . Зупинимось на цьому дещо детальніше.

Введемо розширення поняття циліндра $\overline{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^{A_2}$ як множини всіх чисел $x \in E$, що мають A_2 -зображення скінченим A_2 -дробом $[0; c_1, \dots, c_m, \alpha_1, \dots, \alpha_i]$ або нескінченим $[0; c_1, \dots, c_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots]$. Тоді для циліндрів 1-го рангу маємо

$$\min \overline{\Delta}_{\frac{1}{2}}^{A_2} = \frac{2}{5}, \quad \max \overline{\Delta}_{\frac{1}{2}}^{A_2} = 2, \quad \overline{\Delta}_{\frac{1}{2}}^{A_2} \subset \left[\frac{2}{5}; 2\right],$$

$$\min \overline{\Delta}_1^{A_2} = \frac{1}{3}, \quad \max \overline{\Delta}_1^{A_2} = 1, \quad \overline{\Delta}_1^{A_2} \subset \left[\frac{1}{3}; 1\right].$$

З того, що $E = M \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup B$, і автомодельності множини E випливає, що кожен $\overline{\Delta}^{A_2}$ -циліндр не є відрізком, а є об'єднанням циліндра $\overline{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^{A_2}$ і множини ізольованих точок. При цьому

$$x = [0; c_1, c_2, \dots, c_m, \dots] = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^{A_2} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_m},$$

$$x = [0; c_1, c_2, \dots, c_m] = \begin{cases} \min \overline{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^{A_2}, & \text{якщо } m \text{ непарне,} \\ \max \overline{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^{A_2}, & \text{якщо } m \text{ парне.} \end{cases}$$

4. Кількість різних скінченних A_2 -зображень раціональних чисел. Легко довести, що числа 2 і $\frac{1}{3}$ мають єдине скінченне A_2 -зображення, тоді як число 1 має їх нескінченну кількість:

$$1 = [0; 1] = \left[0; \frac{1}{2}, 1, 1\right] = \left[0; \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, 1\right] = \dots = \left[0; \left(\frac{1}{2}, 1\right)^n, 1\right] = \dots$$

Числа $\frac{3}{7}$ і $\frac{10}{9}$ теж мають єдине A_2 -зображення: $\left[0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \frac{10}{9}$, $\left[0; 1, 1, 1, 1, \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{7}$.

Лема 5. Якщо скінченне A_2 -зображення числа закінчується цифрою 1 , то воно має зліченну множину різних скінченних A_2 -зображень.

Доведення. Справді, якщо $x = [0; a_1, \dots, a_{n-1}, 1]$, то $x = \left[0; a_1, \dots, a_{n-1}, \frac{1}{2}, 1, 1\right]$ і $x = \left[0; a_1, \dots, a_n, \left(\frac{1}{2}, 1\right)^n, 1\right]$ для будь-якого натурального n .

Наслідок 2. Кожне A_2 -бінарне число має зліченну множину різних зображень.

Лема 6. Число a має єдине скінченне A_2 -зображення, якщо існує його зображення, яке закінчується числом $\frac{1}{2}$.

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції.

Для чисел $2 = \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\frac{2}{5} = \left[0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ і $\frac{1}{3} = \left[0; 1, \frac{1}{2}\right]$ єдиність зображення очевидна.

Припустимо, що число $a = \left[0; a_1, \dots, a_k, \frac{1}{2}\right]$ має єдине скінченне A_2 -зображення.

Розглянемо число $b = \left[0; b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \frac{1}{2}\right]$. Оскільки $b = \frac{1}{b_1 + c}$, де $c = \left[0; b_2, \dots, b_k, \frac{1}{2}\right]$, згідно з припущенням число c має єдине зображення і згідно з законом утворення підхідних дробів b єдиним чином виражається, то b має єдине A_2 -зображення.

Наслідок 3. Кожне число множини $D = F \setminus \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ має єдине A_2 -зображення.

Дане твердження випливає з леми 6 і теореми 5.

Таким чином, числа множини E або не мають скінченних A_2 -зображень (їх множина має повну міру Лебега множини E), або мають єдине скінченне зображення (їх множина зліченна), або мають їх безліч, таких теж зліченна множина.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. S. Albeverio, Y. Kulyba, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *On singularity and fine spectral structure of random continued fractions*, Math. Nachr., **288**, 1803 – 1813 (2015); DOI: 10.1002/mana.201500045.
2. A. Denjoy, *Complément à la notice publiée en 1934 sur les travaux scientifiques de M. Arnaud Denjoy*, Hermann, Paris (1942).
3. S. O. Dmytrenko, D. V. Kyurchev, M. V. Prats'ovytyi, *A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry*, Ukr. Math. J., **61**, № 4, 541 – 555 (2009); <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>.

4. W. B. Jones, W. J. Thron, *Continued fractions: analytic theory and applications*, Cambridge Univ. Press (1984).
5. M. Pratsiovytyi, D. Kyurchev, *Properties of the distribution of the random variable defined by A_2 -continued fraction with independent elements*, Random Oper. and Stoch. Equat., **17**, № 1, 91–101 (2009).
6. M. V. Pratsiovytyi, A. S. Chuikov, *Continuous distributions whose functions preserve tails of A -continued fraction representation of numbers*, Random Oper. and Stoch. Equat., **27**, № 3, 199–206 (2019).
7. M. V. Pratsiovytyi, O. P. Makarchuk, A. S. Chuikov, *Approximation and estimates in the periodic representation of real numbers of the closed interval $[0, 5; 1]$ by A_2 -continues fractions*, J. Numer. and Appl. Math., № 1(130), 71–83 (2019).
8. M. V. Pratsiovytyi, Ya. V. Goncharenko, N. V. Dyvliash, S. P. Ratushniak, *Inversor of digits of Q_2^* -representation of numbers*, Mat. Stud., **55**, № 1, 37–43 (2021).
9. M. V. Pratsiovytyi, Ya. V. Goncharenko, I. M. Lysenko, S. P. Ratushniak, *Fractal functions of exponential type that is generated by the Q_2^* -representation of argument*, Mat. Stud., **56**, № 2, 133–143 (2021).
10. M. V. Pratsiovytyi, Y. V. Goncharenko, I. M. Lysenko, S. P. Ratushniak, *Continued A_2 -fractions and singular functions*, Mat. Stud., **58**, № 1, 3–12 (2022); DOI: 10.30970/ms.58.1.
11. M. V. Pratsiovytyi, *Singularity of distributions of random variables given by distributions of elements of the corresponding continued fraction*, Ukr. Mat. Zh., **48**, № 8, 1086–1095 (1996).
12. О. І. Бородін, *Теорія чисел*, Вища шк., Київ (1970).
13. М. Кац, *Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел*, Изд-во иностр. лит., Москва (1963).
14. М. В. Працьовитий, *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*, Наук. думка, Київ (2022).
15. М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, НПУ ім. М. П. Драгоманова, Київ (1998).
16. М. В. Працьовитий, Т. В. Ісаєва, *Фрактальні функції, пов'язані з Δ^μ -зображенням чисел*, Буковин. мат. журн., **3**, № 3–4, 160–169 (2015).
17. М. В. Працьовитий, А. С. Чуйков, *Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах нега-трийкових і ланцюгових A_2 -дробів*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **15**, № 1, 147–161 (2018).

Одержано 14.12.22