

Василь Городецький, Роман Петришин, Ольга Мартинюк¹

(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

**ЕВОЛЮЦІЙНІ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
З ГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ У ПРОСТОРАХ ТИПУ S**

We study an evolutionary equation with an operator $\varphi(i\partial/\partial x)$, where φ is a smooth function satisfying certain conditions. As a special case of this equation, we get a partial differential equation of parabolic type with derivatives of finite and infinite orders and a certain equation with operators of fractional differentiation. It is established that the restriction of the operator $\varphi(i\partial/\partial x)$ to some spaces of type S coincides with a pseudodifferential operator constructed according to the function φ as a symbol. We establish the correct solvability of a nonlocal multipoint (in time) problem for an equation of this kind with an initial function, which is an element of the space of generalized functions of ultradistribution type. The properties of the fundamental solution to this problem are analyzed.

Досліджується еволюційне рівняння з оператором $\varphi(i\partial/\partial x)$, де φ — гладка функція, яка задовольняє певні умови. Таке рівняння, як частковий випадок, містить рівняння з частинними похідними параболічного типу скінченного та нескінченного порядків, рівняння з деякими операторами дробового диференціювання. Встановлено, що звуження оператора $\varphi(i\partial/\partial x)$ на певні простори типу S збігається з псевдодиференціальним оператором, побудованим за функцією φ як за символом. Доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для такого рівняння з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу ультрарозподілів. Досліджено властивості фундаментального розв'язку такої задачі.

1. Вступ. У середині минулого століття синтез багатовимірних сингулярних інтегральних рівнянь та рівнянь з частинними похідними привів до поняття інтегро-диференціального оператора (Кальдерон, Зигмунд). У результаті систематичних досліджень таких операторів за допомогою перетворення Фур'є виникли псевдодиференціальні оператори, які характеризуються своїми символами аналогічно тому, як диференціальні оператори характеризуються своєю характеристичною формою.

Впродовж останніх кількох десятиліть ефективно розвивається теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО) та рівнянь з такими операторами. ПДО формально можна подати у вигляді

$$F_{\sigma \rightarrow x}^{-1}[a(t, x, \sigma)F_{x \rightarrow \sigma}], \quad \{x, \sigma\} \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

де a — функція (символ), що задовольняє певні умови, F, F^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є. До вказаного класу належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, оператори згортки тощо. Поширення результатів класичної теорії диференціальних рівнянь на випадок рівнянь з ПДО та одержання нових результатів дає змогу використовувати такі рівняння при розв'язуванні складних і важливих задач аналізу та математичної фізики, при математичному моделюванні різноманітних природничих процесів.

Дослідженням задачі Коші для еволюційних рівнянь з ПДО займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (М. Nagase, R. Shinkai, C. Tsutsumi, М. А. Шубін, М. Тейлор, Л. Хермандер, С. Д. Ейдельман, Я. М. Дрінь, А. Н. Кочубей, М. В. Федорюк, Ю. А. Дубінський, Б. Й. Пташник, В. В. Городецький, О. В. Мартинюк та ін.). Одержано

¹ Відповідальна за листування, e-mail: o.martynyuk@chnu.edu.ua.

важливі результати щодо розв'язності задачі Коші у різних функціональних просторах. При цьому часто початкові функції мають особливості в одній або кількох точках і допускають регуляризацию у певних просторах узагальнених функцій типу розподілів Соболева – Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо. Отже, задача Коші для зазначених рівнянь має природну постановку й у різних класах узагальнених функцій скінченного та нескінченного порядків.

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum_{k=0}^m \alpha_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, — фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Вказана умова трактується в класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f — узагальнена функція, тобто як граничне співвідношення

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k \lim_{t \rightarrow t_k} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

для довільної функції φ з основного простору (тут $\langle f, \cdot \rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію). Нелокальна за часом задача відноситься до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів та задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами, при описі всіх коректних задач для конкретного оператора, при побудові загальної теорії крайових задач. Огляд основних результатів, пов'язаних з нелокальними задачами для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, див. у [1, 2].

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння

$$\partial u(t, x)/\partial t + \varphi(i\partial/\partial x)u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}, \quad (1)$$

де φ — нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція, яка задовольняє певні умови. Наведено приклади, з яких випливає, що рівняння (1) охоплює рівняння з частинними похідними параболічного типу, рівняння з операторами диференціювання „нескінченного порядку”, рівняння з операторами дробового диференціювання, побудованими за функцією φ .

При дослідженні зазначеної задачі використовуються простори типу S , введені І. М. Гельфандом та Г. Є. Шиловим у [3]. Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \rightarrow \infty$ спадають швидше, ніж $\exp\{-a|x|^\alpha\}$, $a, \alpha > 0$. У працях [4–8] встановлено, що простори типу S та S' , топологічно спряжені до просторів типу S , є природними множинами початкових даних задачі Коші для рівнянь з частинними похідними параболічного типу, при яких розв'язки є нескінченно диференційовними за просторовою змінною функціями.

Встановлено, що звуження оператора $\varphi(i\partial/\partial x)$ на певні простори типу S збігається із псевдодиференціальним оператором, який будується за функцією φ як за символом. Такий підхід дозволяє ефективно використати перетворення Фур'є при дослідженні багатоточкової за часом задачі для рівняння (1) у просторах типу S та S' (на сьогодні така задача для рівняння (1) у просторах типу S та S' не досліджена). Доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (1) з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу S' , знайдено аналітичне зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою узагальненою функцією, при цьому, попередньо,

досліджені властивості фундаментального розв'язку. За допомогою перетворення Фур'є встановлено зв'язок операції згортки з операцією множення у просторах типу S та S' .

1. Простори типу S . І. М. Гельфанд і Г. Є. Шилов увели в [3] серію просторів, названих ними просторами типу S . До таких просторів відносяться простори S_α , S^β , S_α^β .

Простір S_α , $\alpha > 0$, складається з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють умову

$$\exists A > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_n > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R} : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_n A^k k^{k\alpha} \quad (2)$$

(сталі $c_n, A > 0$ залежать від функції φ).

Наведене означення еквівалентне такому [3]:

$$S_\alpha = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \exists a > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c'_n > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : \right. \\ \left. |\varphi^{(n)}(x)| \leq c'_n \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad a = \frac{\alpha}{eA^{1/\alpha}} \right\}. \quad (3)$$

Топологічна структура в S_α визначається так [3]. Символом $S_{\alpha,A}$ позначимо сукупність функцій з простору S_α , для яких виконуються нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{n,\bar{A}} \bar{A}^k k^{k\alpha}, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $\bar{A}$ — довільна стала, більша за A . $S_{\alpha,A}$ перетворюється у повний зліченно-нормований простір, якщо норми в $S_{\alpha,A}$ ввести за допомогою норм

$$\|\varphi\|_{n\delta} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ k \in \mathbb{Z}_+}} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A + \delta)^k k^{k\alpha}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \delta \in \{1/k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, то простір S_{α,A_1} неперервно вкладається в S_{α,A_2} , тому $S_\alpha = \lim_{A \rightarrow +\infty} \text{ind} S_{\alpha,A}$ ($S_\alpha = \bigcup_{A>0} S_{\alpha,A}$). Отже, послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_\alpha$ збігається до нуля в S_α при $\nu \rightarrow +\infty$, якщо $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_{\alpha,A}$ при деякому $A > 0$ і $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ збігається до нуля при $\nu \rightarrow +\infty$ за топологією цього простору. Це рівносильно тому [3], що: 1) послідовність $\{\varphi_\nu^{(n)}, \nu \geq 1\}$ рівномірно збігається до нуля при $\nu \rightarrow +\infty$ на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$); 2) при цьому виконуються нерівності

$$|\varphi_\nu^{(n)}(x)| \leq c'_n e^{-a|x|^{1/\alpha}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $c'_n, a > 0$, не залежними від ν .

Функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ називається мультиплікатором у просторі S_α , якщо $g\varphi \in S_\alpha$ для довільної функції $\varphi \in S_\alpha$ і відображення $\varphi \rightarrow g\varphi$ є лінійним і неперервним оператором у просторі S_α . Мультиплікатором у просторі S_α є кожна функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_{n\varepsilon} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : |\varphi^{(n)}(x)| \leq c_{n\varepsilon} e^{\varepsilon|x|^{1/\alpha}}$$

або умову

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c'_{n\varepsilon} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : |\varphi^{(n)}(x)| \leq c'_{n\varepsilon}.$$

Зокрема, мультиплікатором у S_α є кожна функція в S_α .

Множина $M \subset S_\alpha$ називається *обмеженою*, якщо M повністю міститься в деякому $S_{\alpha,A}$ і в ньому обмежена, тобто для всіх функцій $\varphi \in M$ виконуються оцінки (2) або (3) з деякими сталими $c_n, A > 0$ ($c'_n, a > 0$).

У просторах $S_\alpha, \alpha > 0$, визначено і неперервні оператори множення на незалежну змінну, диференціювання та зсуву $T_x: \varphi(\xi) \rightarrow \varphi(\xi+x), \varphi \in S_\alpha$, при цьому операція зсуву є диференційовною (навіть нескінченно диференційовною) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду

$$(\varphi(x+h) - \varphi(x))h^{-1} \rightarrow \varphi'(x), \quad h \rightarrow 0,$$

виконуються в сенсі збіжності за топологією простору S_α [3].

Простір $S^\beta, \beta > 0$, складається з функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists B > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_k > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R} : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_k B^n n^{n\beta}$$

(сталі $c_k, B > 0$ залежать від функції φ).

Якщо $\beta > 1$, то серед функцій $\varphi \in S^\beta$ є фінітні [3, 4]. Якщо $0 < \beta < 1$, то кожна функція $\varphi \in S^\beta$ аналітично продовжується в усю комплексну площину і задовольняє нерівність

$$|x^k \varphi(x+iy)| \leq c'_k \exp\{b|y|^{1/(1-\beta)}\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}, \quad b > \frac{1-\beta}{e} (Be)^{1/(1-\beta)}.$$

Якщо $\beta = 1$, то функція $\varphi \in S^1$ може бути аналітично продовжена в деяку смугу $|\operatorname{Im} z| < \delta, z = x + iy$, комплексної площини, де $\delta = \delta(\varphi) > 0$. Отже, простір S^β при $\beta \in (0, 1]$ фінітні функції не містить.

Символом $S_\alpha^\beta, \alpha, \beta > 0$, позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists c > 0 \quad \exists A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R} : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n k^{\alpha} n^{n\beta}.$$

Простори S_α^β можна охарактеризувати ще й так [3].

S_α^β складається з тих і лише тих функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq c B^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad c, a, B > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1 - \beta$, то S_α^β складається з функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в комплексну площину і для яких

$$|\varphi(x+iy)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, \quad c, a, b > 0, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Простір $S_\alpha^1, \alpha > 0$, складається з функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в деяку смугу $|\operatorname{Im} z| < \delta, z = x + iy$ (залежну від φ) комплексної площини, при цьому справджується нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad c, a > 0, \quad |y| < \delta, x \in \mathbb{R}.$$

Простори S_α, S^β нетривіальні при $\alpha, \beta > 0$. Простори S_α^β нетривіальні, якщо $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta \geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини. В [4] доведено, що $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$.

Топологічна структура просторів S^β , S_α^β аналогічна топологічній структурі просторів S_α . У просторах S^β , S_α^β визначені ті ж операції, що і в просторах S_α . Зауважимо, що простори типу S є досконалими, тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні.

Зупинимося ще на просторах S_α^β , де $\{\alpha, \beta\} \subset (0, 1)$, $\alpha \geq 1 - \beta$. Сукупність функцій, які є продовженням функцій з таких просторів у всю комплексну площину, позначимо символом $S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$. Із результатів, наведених у [9], випливає, що $S_\alpha^\beta(\mathbb{C}) = W_M^\Omega$, де W_M^Ω — один із просторів типу W , введених Б. Л. Гуревичем [10], який будується за функціями $M(x) = x^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\Omega(y) = y^{1/(1-\beta)}$, $0 < \beta < 1$, $x, y \geq 0$. У просторах W_M^Ω вводиться топологія індуктивної границі певних просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, $a, b > 0$. Зокрема, у випадку просторів W_M^Ω , побудованих за вказаними функціями, система норм визначається формулами

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{z \in \mathbb{C}} (|\varphi(z)| \exp\{a(1-\delta)|x|^{1/\alpha} - (b+\rho)|y|^{1/(1-\beta)}\}), \quad \{\rho, \delta\} \subset \{1/n, n \geq 2\}.$$

Звідси та з результатів, отриманих у [9], випливає, що послідовність $\{\varphi_\nu(x), \nu \geq 1\} \subset S_\alpha^\beta$, $x \in \mathbb{R}$, $\{\alpha, \beta\} \subset (0, 1)$, $\alpha + \beta \geq 1$, збігається в S_α^β до нуля при $\nu \rightarrow +\infty$ тоді й лише тоді, коли послідовність $\{\varphi_\nu(z), \nu \geq 1\} \subset S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, збігається до нуля при $\nu \rightarrow +\infty$ у просторі $S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$, тобто [9] рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини і при цьому справджуються нерівності

$$|\varphi_\nu(z)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

зі сталими $c, a, b > 0$, не залежними від ν .

Мультіплікатором у такому просторі $S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$ є кожна ціла функція $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |f(x + iy)| \leq c_\varepsilon \exp\{\varepsilon|x|^{1/\alpha} + \varepsilon|y|^{1/(1-\beta)}\},$$

при цьому $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — мультіплікатор у просторі S_α^β .

У просторах типу S клас лінійних обмежених операторів збігається з класом лінійних неперервних операторів [3].

Простори типу S пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильними є формули [3]

$$F[S_\alpha] = S^\alpha, \quad \alpha > 0; \quad F[S^\beta] = S_\beta, \quad \beta > 0; \quad F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta \geq 1.$$

При цьому оператор F є неперервним (тут $F[X]$, $X = S_\alpha, S^\beta, S_\alpha^\beta$, позначає простір Фур'є-образів

$$F[X] = \left\{ \psi(\sigma) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \varphi \in X \right\}.$$

2. Псевдодиференціальні оператори у просторах типу S . Нехай $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ — нескінченно диференційовна функція, яка задовольняє умови:

- а) $\exists \alpha > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}: \varphi(\sigma) \geq c|\sigma|^\alpha$;
- б) φ — мультіплікатор у просторі $S_{1/\alpha}$, тобто (див. [3, с. 224])

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_{n\varepsilon} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : |\varphi^{(n)}(x)| \leq c_{n\varepsilon} e^{\varepsilon|x|^{1/\alpha}}.$$

Сукупність функцій, які задовольняють умови а), б), позначатимемо символом H_α .

Нагадаємо, що $i\partial/\partial x$ — самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$ оператор зі щільною у $L_2(\mathbb{R})$ областю визначення

$$\mathcal{D}(i\partial/\partial x) = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \exists \psi' \in L_2(\mathbb{R})\}.$$

Якщо E_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, — спектральна функція оператора $i\partial/\partial x$, то внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів та операційного числення для таких операторів

$$\varphi(i\partial/\partial x)\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) dE_\lambda \psi, \quad \psi \in \mathcal{D}(i\partial/\partial x).$$

При цьому $\varphi(i\partial/\partial x)$ — невід’ємний самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$ оператор. Відомо [11], що

$$E_\lambda \psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \right\} e^{-it\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} F[\psi](\sigma) e^{-it\sigma} d\sigma.$$

Отже, $dE_\lambda \psi = \frac{1}{2\pi} F[\psi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda$, тобто

$$\varphi(i\partial/\partial x)\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) F[\psi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda = F^{-1}[\varphi(\lambda) F[\psi]].$$

Якщо $\psi \in S^{1/\alpha} \subset \mathcal{D}(i\partial/\partial x)$, то $F[\psi] \in S_{1/\alpha}$. Оскільки φ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}$, то $\varphi F[\psi] \in S_{1/\alpha}$, а $F^{-1}[\varphi F[\psi]] \in S^{1/\alpha}$. Нехай $A := \varphi(i\partial/\partial x)|_{S^{1/\alpha}}$ — звуження оператора $\varphi(i\partial/\partial x)$ на простір $S^{1/\alpha}$. Із властивостей перетворення Фур’є у просторах типу S випливає, що $A: S^{1/\alpha} \rightarrow S^{1/\alpha}$ — лінійний і неперервний оператор, який збігається із псевдодиференціальним оператором у просторі $S^{1/\alpha}$, побудованим за функцією $\varphi \in H_\alpha$ як за символом.

Зауважимо, що якщо φ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}^\beta \subset S_{1/\alpha}$, $\alpha > 1$, при певному $\beta > 0$, то в просторі $S_\beta^{1/\alpha} \subset S^{1/\alpha}$ оператор диференціювання „нескінченного порядку” визначений коректно. Для того щоб довести відповідне твердження, наведемо таке означення: у просторі $S_\beta^{1/\alpha}$ задано оператор диференціювання нескінченного порядку

$$B := \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-1)^k D_x^{2k}, \quad D_x := i\partial/\partial x,$$

побудований за функцією

$$\varphi(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \sigma^{2k} \geq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

якщо для довільної функції $\psi \in S_\beta^{1/\alpha}$ ряд

$$g(x) \equiv B\psi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-1)^k \psi^{(2k)}(x)$$

зображує деяку функцію з простору $S_\beta^{1/\alpha}$.

Теорема 1. Якщо функція φ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}^{1-1/\alpha}$, $\alpha > 1$, то в просторі $S_{1-1/\alpha}^{1/\alpha}$ визначено і неперервний оператор B , при цьому

$$B\psi = F^{-1}[\varphi(\sigma)F[\psi]] = A\psi \quad \forall \psi \in S_{1-1/\alpha}^{1/\alpha}.$$

Доведення. Враховуючи співвідношення

$$D_x^k \psi = F^{-1}[(-i\sigma)^k F[\psi]] \quad \forall \psi \in S_{1-1/\alpha}^{1/\alpha}, \quad k \in \mathbb{N},$$

отримуємо

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-1)^k D_x^{2k} \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-1)^k F[(-i\sigma)^{2k} F[\psi]](x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} F^{-1}[\sigma^{2k} F[\psi]](x). \end{aligned}$$

Із властивостей перетворення Фур'є в просторах типу S випливає, що для доведення твердження достатньо встановити, що $F[g] \in S_{1/\alpha}^{1-1/\alpha}$. Запишемо (поки що формально) співвідношення

$$\begin{aligned} F[g] &= F \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} F^{-1}[\sigma^{2k} F[\psi]] \right] = F \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_{2k} F^{-1}[\sigma^{2k} F[\psi]] \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F \left[\sum_{k=0}^n c_{2k} F^{-1}[\sigma^{2k} F[\psi]] \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_{2k} \sigma^{2k} F[\psi] \\ &= \varphi(\sigma) F[\psi](\sigma). \end{aligned} \tag{4}$$

Оскільки $F[\psi] \in S_{1/\alpha}^{1-1/\alpha}$, а φ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}^{1-1/\alpha}$, то $\varphi F[\psi] \in S_{1/\alpha}^{1-1/\alpha}$. Отже, залишилося довести коректність проведених перетворень і обґрунтувати правильність формули (4).

Функція $\varphi F[\psi]$ допускає аналітичне продовження в усю комплексну площину, при цьому $\varphi(z)F[\psi](z) \in S_{1/\alpha}^{1-1/\alpha}(\mathbb{C})$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Для доведення твердження достатньо встановити, що

$$r_n(z) := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{2k} z^{2k} F[\psi](z) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

у просторі $S_{1/\alpha}^{1-1/\alpha}(\mathbb{C})$. Іншими словами, потрібно довести, що: 1) $r_n(z) \in S_{1/\alpha}^{1-1/\alpha}(\mathbb{C})$ при кожному $n \in \mathbb{N}$; 2) послідовність $\{r_n(z), n \geq 1\}$ збігається рівномірно до нуля при $n \rightarrow \infty$ у кожній обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$, при цьому виконується нерівність

$$|r_n(z)| \leq c \exp\{-a|x|^\alpha + b|y|^{1/\alpha}\}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

зі сталими $c, a, b > 0$, не залежними від n .

Коефіцієнти Тейлора c_{2k} , $k \in \mathbb{Z}_+$, функції φ обчислюються за формулою

$$c_{2k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(z)}{z^{2k+1}} dz,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці 0 . Звідси та з умови теореми (φ — мультиплікатор в $S_{1/\alpha}^{1-1/\alpha}$) випливає (див. п. 1), що

$$|c_{2k}| \leq c_\varepsilon (\inf_R (R^{-k} \exp R^\alpha))^2.$$

Зазначимо, що вказаний інфімум досягається. Для цього розглянемо функцію $\gamma_k(R) = R^{-k} \exp R^\alpha$, $R \in (0, +\infty)$. Ця функція диференційовна на $(0, +\infty)$, до того ж

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \gamma_k(R) = +\infty, k \in \mathbb{Z}_+, \quad \lim_{R \rightarrow +0} \gamma_k(R) = \begin{cases} +\infty, & k \in \mathbb{N}, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\gamma_k(R) > 0$, $R \in (0, +\infty)$, то ця функція досягає свого інфімуму, який знаходимо за допомогою методів диференціального числення:

$$\inf \gamma_k(R) = \omega^k k^{-k/\alpha}, \quad \omega = (\alpha \varepsilon e)^{1/\alpha}.$$

Отже,

$$|c_{2k}| \leq c_\varepsilon \omega^{2k} k^{-2k/\alpha} = c_\varepsilon L^k \varepsilon^{2k/\alpha} k^{-2k/\alpha}, \quad L = (\alpha e)^{2/\alpha}.$$

Далі оцінимо функцію

$$\alpha_{2k}(z) := |c_{2k} z^{2k} F[\psi](z)|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Оскільки $F[\psi](z) \in S_{1/\alpha}^{1-1/\alpha}(\mathbb{C})$, то

$$\exists c, a, b > 0 \quad \forall z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}: |F[\psi](z)| \leq c \exp\{-a|\sigma|^\alpha + b|\tau|^\alpha\}.$$

Крім того,

$$|z|^{2k} = (\sigma^2 + \tau^2)^k \leq (2 \max\{\sigma^2, \tau^2\})^k \leq 2^k (|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \alpha_{2k}(z) &\leq c c_\varepsilon L_1^k \varepsilon^{2k/\alpha} k^{-2k/\alpha} (|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}) e^{-a|\sigma|^\alpha + b|\tau|^\alpha} \\ &= c c_\varepsilon L_1^k \varepsilon^{2k/\alpha} (k^{-2k/\alpha} |\sigma|^{2k} e^{-a|\sigma|^\alpha + b|\tau|^\alpha} \\ &\quad + k^{-2k/\alpha} |\tau|^{2k} e^{-a|\sigma|^\alpha + b|\tau|^\alpha}) = c c_\varepsilon L_1^k \varepsilon^{2k/\alpha} (\Delta'_k(z) + \Delta''_k(z)), \end{aligned}$$

де $L_1 = 2L$. Далі застосовуючи нерівність

$$|\sigma|^{2k} e^{-\frac{a}{2}|\sigma|^\alpha} \leq M_1^k k^{2k/\alpha}, \quad M_1 = \left(\frac{4}{\alpha a e} \right)^{2/\alpha},$$

отримуємо

$$\Delta'_k(z) = k^{-2k/\alpha} |\sigma|^{2k} e^{-a|\sigma|^\alpha} e^{b|\tau|^\alpha} \leq M_1^k e^{-\frac{a}{2}|\sigma|^\alpha} e^{b|\tau|^\alpha}.$$

Оцінимо $\Delta''_k(z)$. Маємо

$$|\tau|^{2k} e^{b|\tau|^\alpha} = |\tau|^{2k} e^{-|\tau|^\alpha} \cdot e^{(b+1)|\tau|^\alpha} \leq M_2^k k^{2k/\alpha} e^{(b+1)|\tau|^\alpha}, \quad M_2 = \left(\frac{2}{\alpha e}\right)^{2/\alpha}.$$

Тоді

$$\Delta_k''(z) \leq k^{-2k/\alpha} |\tau|^{2k} e^{-a|\sigma|^\alpha} \cdot e^{b|\tau|^\alpha} \leq M_2^k e^{-a|\sigma|^\alpha} e^{(b+1)|\tau|^\alpha}.$$

Враховуючи ці нерівності, одержуємо

$$\alpha_{2k}(z) \leq \tilde{c} L_2^k \varepsilon^{2k/\alpha} e^{-a_1|\sigma|^\alpha + b_1|\tau|^\alpha},$$

де $\tilde{c} = cc_\varepsilon$, $L_2 = L_1 \max\{M_1, M_2\}$, $a_1 = a/2$, $b_1 = b + 1$, причому сталі $\tilde{c}$, L_2 , a_1 , $b_1 > 0$ не залежать від k . Візьмемо $\varepsilon = (2L_2)^{-\alpha/2}$. Тоді

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} L_2^k \varepsilon^{2k/\alpha} = \frac{1}{2^n},$$

$$|r_n(z)| \leq \frac{\tilde{c}}{2^n} \exp\{-a_1|\sigma|^\alpha + b_1|\tau|^\alpha\}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

З нерівності (5) випливає, що $r_n \in S_{1-1/\alpha}^{1-1/\alpha}$ при кожному $n \in \mathbb{N}$, а послідовність $\{r_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля при $n \rightarrow \infty$ рівномірно у кожній обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$. Крім того,

$$|r_n(z)| \leq \tilde{c} \exp\{-a_1|\sigma|^\alpha + b_1|\tau|^\alpha\}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де сталі $\tilde{c}$, a_1 , $b_1 > 0$ не залежать від n . Отже, умови 1, 2 виконуються. Цим доведено, що оператор B визначений на $S_{1-1/\alpha}^{1/\alpha}$, кожную обмежену множину цього простору переводить в обмежену множину цього ж простору. Отже, вказаний оператор є неперервним, при цьому із співвідношення (4) випливає, що оператор диференціювання нескінченного порядку збігається із псевдодиференціальним оператором A у просторі $S_{1-1/\alpha}^{1/\alpha}$, побудованим за функцією-символом φ за допомогою перетворення Фур'є (прямого та оберненого).

Теорему 1 доведено.

Наведемо деякі приклади функцій із класу H_α і, відповідно, приклади операторів $\varphi(i\partial/\partial x)$.

1. Нехай

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $p \in \mathbb{N}$ фіксоване, $a_p > 0$, $a_k \geq 0$, $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(x) \geq a_p x^{2p}$, $x \in \mathbb{R}$, тобто φ задовольняє умову а) з параметром $\alpha = 2p$. Із властивостей просторів типу S випливає, що φ — мультиплікатор у просторі $S_{1/(2p)}$. Отже, $\varphi \in H_{2p}$.

Поліному φ відповідає оператор

$$\varphi\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = A_0 I + \sum_{k=1}^p a_k (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}$$

(I — одиничний оператор).

2. Розглянемо функцію

$$\varphi(x) = \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\varphi(x) \geq \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то φ задовольняє умову а) з параметром $\alpha = 2$. Переконаємося в тому, що φ — мультиплікатор у просторі $S_{1/2}$. Справді, φ допускає аналітичне продовження в усю комплексну площину і

$$|\operatorname{ch} z| \leq e^{|z|}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Зауважимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$|z| \leq \varepsilon |z|^2 + c_\varepsilon \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad c_\varepsilon = \frac{1}{4\varepsilon}.$$

Використовуючи цю нерівність, маємо

$$|\operatorname{ch} z| \leq e^{|z|} \leq e^{\varepsilon |z|^2 + c_\varepsilon} = \tilde{c}_\varepsilon e^{\varepsilon |z|^2} = c_\varepsilon e^{\varepsilon x^2 + \varepsilon y^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

З останньої нерівності випливає, що $\operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$, — мультиплікатор у просторі $S_{1/2}^{1/2}$ (див. п. 1 або теорему 3 в [3, с. 248]). Отже, $\varphi \in H_2$. Звідси та з теореми 1 випливає, що в просторі $S_{1/2}^{1/2} \subset S_{1/2}$ визначено коректно оператор диференціювання нескінченного порядку

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k D_x^{2k}}{(2k)!} = F^{-1}[\operatorname{ch} \sigma \cdot F].$$

3. Нехай

$$\varphi_\beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{((2k)!)^\beta}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $\beta \in [1, +\infty)$ — фіксоване число. Очевидно, $\varphi_\beta(x) \geq \frac{x^2}{2\beta}$, $x \in \mathbb{R}$, тобто φ_β задовольняє умову а) з параметром $\alpha = 2$.

Із формули Стірлінга випливає оцінка $k! \geq k^k e^{-k}$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{((2k)!)^\beta} &\leq \frac{2^{2k\beta}}{(2k)^{2k\beta}} = \frac{L^{2k}}{k^{2k\beta}}, \quad L = \left(\frac{e}{2}\right)^\beta, \\ |\varphi_\beta(z)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{((2k)!)^\beta} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{2k}}{k^{2k\beta}} |z|^{2k} \\ &\leq \sup_k \frac{(\sqrt{2}L)^{2k} |z|^{2k}}{k^{2k\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{\inf_k \frac{k^{2k\beta}}{|L_1 z|^{2k}}}, \quad L_1 = \sqrt{2}L, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Використовуючи відому нерівність з [3, с. 204]

$$e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}} \leq \inf_k \frac{k^{k\alpha}}{|\xi|^k} \leq ce^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}}, \quad c = e^{\frac{\alpha e}{2}},$$

при $\alpha = 2\beta$, $|\xi| = |z|^2$ одержуємо

$$\sup_k \frac{|L_1 z|^{2k}}{k^{2k\beta}} \leq e^{c_1 |z|^{1/\beta}}, \quad c_1 > 0.$$

Отже, $|\varphi_\beta(z)| \leq 2e^{c_1|z|^{1/\beta}}$, $z \in \mathbb{C}$. Оскільки $|z|^{1/\beta} \leq 1 + |z|$, $z \in \mathbb{C}$, при $\beta \geq 1$, то

$$c_1|z|^{1/\beta} \leq c_1 + c_1|z| \leq c_1 + \varepsilon|z|^2 + \frac{c_1}{4\varepsilon} = \varepsilon x^2 + \varepsilon y^2 + c_2, \quad c_2 = c_1 \left(1 + \frac{1}{4\varepsilon}\right),$$

для довільного $\varepsilon > 0$. Тоді звідси випливає, що φ_β — мультиплікатор у просторі $S_{1/2}^{1/2} \subset S_{1/2}$, тобто $\varphi_\beta \in H_2$. Зауважимо також, що $\varphi_1(x) = \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$. Отже (див. теорему 1), у просторі $S_{1/2}^{1/2}$ визначено коректно оператор

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k D_x^{2k}}{((2k)!)^\beta} = F^{-1}[\varphi_\beta F], \quad \beta \geq 1.$$

4. Розглянемо функцію

$$\varphi_{\omega,p}(x) = \left(\sum_{k=0}^p x^{2k} \right)^{\frac{\omega}{2p}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $\omega \in (0, 1]$, $p \in \mathbb{N}$ довільно фіксовані. Функція $\varphi_{\omega,p} \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi_{\omega,p}(x) \geq |x|^\omega$, $x \in \mathbb{R}$. Доведемо, що $\varphi_{\omega,p}$ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}$. Якщо $|x| \leq 1$, то

$$\varphi_{\omega,p}(x) \leq (p+1)^{\omega/(2p)} \leq (p+1) \leq (p+1)e^{\varepsilon|x|^\omega}$$

для довільного $\varepsilon > 0$. Якщо $|x| > 1$, то

$$\varphi_{\omega,p}(x) \leq (p+1)|x|^\omega \leq \frac{1}{\varepsilon}(p+1)e^{\varepsilon|x|^\omega}.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : \varphi_{\omega,p}(x) \leq c_\varepsilon \exp\{\varepsilon|x|^\omega\}, \quad c_\varepsilon = (p+1) \max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

Крім того, безпосередньо переконаємося в тому, що

$$\exists c_0, B_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} : |D_x^n \varphi_{\omega,p}(x)| \leq c_0 B_0^n n!, \quad (6)$$

де сталі c_0 , $B_0 > 0$ залежать від p . Звідси випливає, що $\varphi_{\omega,p}$ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}$. Справді, візьмемо довільну функцію $\psi \in S_{1/\omega}$. Тоді

$$\exists a > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_n > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : |D_x^n \psi(x)| \leq c_n e^{-a|x|^\omega}. \quad (7)$$

З (6), (7) випливають нерівності

$$\begin{aligned} |(\varphi_{\omega,p}(x)\psi(x))^n| &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k |\varphi_{\omega,p}^{(k)}(x)| |\psi^{(n-k)}(x)| \\ &\leq |\varphi_{\omega,p}(x)| |\psi^{(n)}(x)| + \sum_{k=1}^n C_n^k |\varphi_{\omega,p}^{(k)}(x)| |\psi^{(n-k)}(x)| \end{aligned}$$

$$\leq c_\varepsilon c_n e^{-(a-\varepsilon)|x|^\omega} + c_0 \sum_{k=1}^n C_n^k c_{n-k} B_0^k k! e^{-a|x|^\omega}.$$

Візьмемо $\varepsilon = a/2$. Тоді

$$|(\varphi_{\omega,p}(x)\psi(x))^{(n)}| \leq b_n e^{-a_1|x|^\omega}, \quad a_1 = a/2, b_n = c_\varepsilon c_n + c_0 \sum_{k=1}^n C_n^k B_0^k k! c_{n-k}.$$

Звідси випливає також, що оператор $S_{1/\omega} \ni \psi \rightarrow \varphi_{\omega,p}\psi \in S_{1/\omega}$ кожному обмежену множину простору $S_{1/\omega}$ переводить в обмежену множину цього ж простору, тобто вказаний оператор є неперервним. Цим доведено, що $\varphi_{\omega,p}$ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}$, тобто $\varphi_{\omega,p} \in H_\omega$. Оператор, який будується за функцією $\varphi_{\omega,p}$, має вигляд

$$\varphi_{\omega,p}(i\partial/\partial x) = \left(I + \sum_{k=1}^p (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \right)^{\frac{\omega}{2p}}$$

(тут I — одиничний оператор). Наприклад,

$$\varphi_{1,1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{1/2}.$$

Такий оператор використовується в теорії дробового диференціювання і називається оператором Бесселя дробового диференціювання порядку $1/2$ [12]. Інші приклади:

$$\varphi_{2/7,1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{1/7}, \quad \varphi_{2/3,2}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)^{1/6},$$

$$\varphi_{4/5,3}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^6}{\partial x^6}\right)^{2/15}.$$

Оператор $\varphi_{\omega,p}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ природно називати оператором дробового диференціювання.

3. Простори узагальнених функцій типу S' . Простори типу S (простори S_α , S^β , S_α^β) називатимемо далі просторами основних функцій.

Символом S'_α ($(S^\beta)'$, $(S_\alpha^\beta)'$) позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α (S^β , S_α^β) зі слабкою збіжністю. Елементи просторів S'_α , $(S^\beta)'$, $(S_\alpha^\beta)'$ називатимемо узагальненими функціями типу S' . Якщо f — узагальнена функція типу S' , то узагальноною функцією типу S' є кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, де $f^{(p)}$ визначається за допомогою формули

$$\langle f^{(p)}, \psi \rangle = (-1)^p \langle f, \psi^{(p)} \rangle$$

для довільної основної функції ψ .

Якщо g — мультиплікатор у просторі основних функцій, f — узагальнена функція типу S' , то gf також узагальнена функція типу S' , яка визначається формулою

$$\langle gf, \psi \rangle := \langle f, g\psi \rangle$$

для довільної основної функції ψ .

Оскільки в просторах типу S визначено операцію зсуву T_x , то згортку узагальненої функції f з основною функцією ψ задамо формулою

$$(f * \psi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x}\check{\psi}(\xi) \rangle \equiv \langle f_\xi, \psi(x - \xi) \rangle, \quad \check{\psi}(\xi) := \psi(-\xi)$$

(індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на основну функцію $T_{-x}\check{\psi}(\xi)$ як функцію аргументу ξ). Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргументу у просторах типу S випливає, що згортка $f * \psi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'_\alpha$ означимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \psi \rangle := \langle f, F[\psi] \rangle \quad \forall \psi \in S^\alpha.$$

Із наведеного означення випливає, що $F[f] \in (S^\alpha)'$. Аналогічно, $F[(S^\beta)'] = S'_\beta$, $F[(S^\beta_\alpha)'] = (S^\beta_\alpha)'$.

Нехай $f \in S'_\alpha$. Якщо $f * \psi \in S_\alpha \quad \forall \psi \in S_\alpha$ і зі співвідношення $\psi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow +\infty$ за топологією простору S_α випливає, що $f * \psi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow +\infty$ за топологією простору S_α , то функціонал f називається *згортувачем* у просторі S_α . Аналогічно визначається згортувач у просторах S^β , S^β_α . Наприклад, δ -функція Дірака ($\langle \delta, \psi \rangle := \psi(0)$) — згортувач у просторах типу S , оскільки $(\delta * \psi)(x) = \langle \delta_\xi, \psi(x - \xi) \rangle = \psi(x)$ для довільної основної функції ψ .

Теорема 2. Якщо узагальнена функція f — згортувач у просторі S_α (згортувач у просторах S^β , S^β_α), то правильною є формула

$$F[f * \psi] = F[f]F[\psi].$$

Доведення. Нехай, наприклад, узагальнена функція f — згортувач у просторі S_α , тобто $f * \psi \in S_\alpha$ для довільної функції $\psi \in S_\alpha$. Використовуючи означення перетворення Фур'є узагальненої функції з простору S'_α з основною та означення згортки узагальненої функції з основною, записуємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \forall \gamma \in S^\alpha : \langle F[f * \psi], \gamma \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * \psi)(x) F[\gamma](x) dx = \langle f * \psi, F[\gamma] \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, \psi(x - \xi) \rangle F[\gamma](x) dx = \left\langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - \xi) F[\gamma](x) dx \right\rangle \quad (8) \end{aligned}$$

(тут $f * \psi$ розуміємо як регулярну узагальнену функцію).

Нехай

$$I(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - \xi) F[\gamma](x) dx.$$

Тоді, на підставі теореми Фубіні,

$$I(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - \xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - \xi) \gamma(\sigma) e^{i\sigma x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \gamma(\sigma) e^{i\sigma t} e^{i\sigma \xi} d\sigma dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\sigma) F[\psi](\sigma) e^{i\sigma \xi} d\sigma = F[F[\psi] \cdot \gamma](\xi) \in S_\alpha.$$

Отже,

$$\langle F[f * \psi], \gamma \rangle = \langle f, F[F[\psi]\gamma] \rangle = \langle F[f], F[\psi]\gamma \rangle = \langle F[f]F[\psi], \gamma \rangle \quad \forall \gamma \in S^\alpha.$$

Звідси отримуємо рівність $F[f * \psi] = F[f]F[\psi]$.

Залишилось обґрунтувати коректність співвідношень (8). Введемо позначення

$$I_r(\xi) := \int_{-r}^r \gamma(\sigma) F[\psi](\sigma) e^{i\sigma \xi} d\sigma, \quad r > 0.$$

Для доведення (8) достатньо встановити, що $I_r(\xi) \rightarrow I(\xi)$ при $r \rightarrow +\infty$ у просторі S_α , тобто $\alpha_r(\xi) := I(\xi) - I_r(\xi) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$ за топологією простору S_α . Це означає, що: 1) сім'я функцій $\{\alpha_r^{(n)}(\xi), r > 0\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, збігається до нуля при $r \rightarrow +\infty$ рівномірно на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$; 2) $|\alpha_r^{(n)}(\xi)| \leq c_n e^{-a|\xi|^{1/\alpha}}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $c_n, a > 0$ не залежать від r .

Інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_\xi^n (\gamma(\sigma) F[\psi](\sigma) e^{i\sigma \xi}) d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} (i\sigma)^n \gamma(\sigma) F[\psi](\sigma) e^{i\sigma \xi} d\sigma$$

збігається рівномірно щодо ξ , оскільки

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : |D_\xi^n (\gamma(\sigma) F[\psi](\sigma) e^{i\sigma \xi})| \leq |\sigma^n \gamma(\sigma) F[\psi](\sigma)|, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma^n \gamma(\sigma) F[\psi](\sigma)| d\sigma < +\infty$$

(бо $\sigma^n \gamma(\sigma) F[\psi](\sigma) \in S^\alpha$ при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$). Тоді

$$|\alpha_r^{(n)}(\xi)| \leq \int_{|\sigma| \geq r} |\sigma^n \gamma(\sigma) F[\psi](\sigma)| d\sigma \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty,$$

рівномірно по ξ як залишок збіжного інтеграла. Отже, умова 1 виконується.

Перевіримо виконання умови 2. Оскільки

$$D_\xi^n \alpha_r(\xi) = D_\xi^n I(\xi) - D_\xi^n I_r(\xi),$$

то

$$|D_\xi^n \alpha_r(\xi)| \leq |D_\xi^n I(\xi)| + |D_\xi^n I_r(\xi)|.$$

Розглянемо функції

$$D_\xi^n I_{r,+}(\xi) := \max(D_\xi^n I_r(\xi), 0), \quad D_\xi^n I_{r,-}(\xi) := -\min(D_\xi^n I_r(\xi), 0),$$

які є невід'ємними, і врахуємо, що

$$|D_\xi^n I_r(\xi)| = D_\xi^n I_{r,+}(\xi) + D_\xi^n I_{r,-}(\xi) \leq 2|D_\xi^n I(\xi)|.$$

Тоді

$$|D_\xi^n \alpha_r(\xi)| \leq 3|D_\xi^n I(\xi)| \leq 3|D_\xi^n F[F[\psi] \cdot \gamma]| \quad \forall r > 0. \quad (9)$$

Оскільки $F[F[\psi] \cdot \gamma] \in S_\alpha \quad \forall \psi \in S_\alpha, \gamma \in S^\alpha$, то звідси та з (9) випливає оцінка

$$|D_\xi^n \alpha_r(\xi)| \leq 3c_n e^{-a|\xi|^{1/\alpha}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

де сталі $c_n, a > 0$ не залежать від r . Таким чином, умова 2 також виконується. Інші випадки розглядаються аналогічно.

Теорему 2 доведено.

Наслідок 1. Якщо узагальнена функція f — згортувач у просторах типу S , то її перетворення Фур'є — мультиплікатор у відповідних просторах $F[S]$.

4. Багатоточкова за часом задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\partial u(t, x)/\partial t + Au(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}, \quad (10)$$

де

$$A = \varphi(i\partial/\partial x)|_{S^\alpha} = F^{-1}[\varphi(\sigma)F], \quad \varphi \in H_\alpha,$$

— оператор, побудований у п. 2. Під розв'язком рівняння (10) розуміємо функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, яка має такі властивості: 1) $u(t, \cdot) \in C^1(0, T]$ при кожному $x \in \mathbb{R}$; 2) $u(\cdot, x) \in S^{1/\alpha}$ при кожному $t \in (0, T]$; 3) $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (10).

Для рівняння (10) сформулюємо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (10), який задовольняє умову

$$\mu u(0, x) - \mu_1 u(t_1, x) - \dots - \mu_m u(t_m, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in S^{1/\alpha}, \quad (11)$$

де $u(0, x) := \lim_{t \rightarrow +0} u(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$, $m \in \mathbb{N}$ — фіксовані числа, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$.

Розв'язок задачі (10), (11) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є, ввівши позначення $F[u(t, \cdot)] = v(t, \cdot)$. Для функції $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ отримаємо задачу з параметром σ :

$$\frac{dv(t, \sigma)}{dt} + \varphi(\sigma)v(t, \sigma) = 0, \quad (t, \sigma) \in \Omega, \quad (12)$$

$$\mu v(0, \sigma) - \sum_{k=1}^m \mu_k v(t_k, \sigma) = \tilde{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F[f](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$v(t, \sigma) = c \exp\{-t\varphi(\sigma)\}, \quad (t, \sigma) \in \Omega, \quad (14)$$

де $c = c(\sigma)$ визначається з умови (13). Підставляючи (14) у (13), одержуємо

$$c = \tilde{f}(\sigma) \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k \varphi(\sigma)\} \right)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Введемо позначення: $G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \sigma)]$, $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)$, $Q_1(t, \sigma) = \exp\{-t\varphi(\sigma)\}$, $Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1}$.

Далі, міркуючи формально, приходимо до співвідношення

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = G(t, x) * f(x).$$

Справді,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma) \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{i\sigma\xi} d\xi \right) e^{-i\sigma x} d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma) e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma \right) f(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} G(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = G(t, x) * f(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Коректність проведених тут перетворень, а отже правильність формули (15), впливає з властивостей функції Q , які наведено нижче.

Лема 1. Для похідних функції $Q_1(t, \sigma)$, $(t, \sigma) \in \Omega$, правильними є оцінки

$$|D_{\sigma}^s Q_1(t, \sigma)| \leq c_s \exp\{-at|\sigma|^{\alpha}\}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

де $a > 0$, $c_s = c_s(t) > 0$.

Доведення. Для оцінювання похідних функції $Q_1(t, \sigma)$ скористаємось формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_{\sigma}^s F(g(\sigma)) = \sum_{p=1}^s \frac{d^p F(g)}{dg^p} \sum \frac{s!}{p_1! \dots p_l!} \left(\frac{d}{d\sigma} g(\sigma) \right)^{p_1} \dots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} g(\sigma) \right)^{p_l} \quad (17)$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $p_1 + 2p_2 + \dots + lp_l = s$, $p_1 + p_2 + \dots + p_l = p$), де покладемо $F = e^g$, $g = -t\varphi(\sigma)$. Оскільки $\varphi \in H_{\alpha}$, то φ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}$, тобто φ задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall s \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall \sigma \in \mathbb{R} : |D_{\sigma}^s \varphi(\sigma)| \leq c_{s\varepsilon} e^{\varepsilon|\sigma|^{\alpha}}. \quad (18)$$

Тоді

$$D_{\sigma}^s e^{-t\varphi(\sigma)} = e^{-t\varphi(\sigma)} \sum_{p=1}^s \sum \frac{s!}{p_1! \dots p_l!} \Lambda, \quad s \in \mathbb{N},$$

де символом Λ позначено вираз

$$\Lambda := \left(\frac{d}{d\sigma} (-t\varphi(\sigma)) \right)^{p_1} \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\sigma^2} (-t\varphi(\sigma)) \right)^{p_2} \dots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} (-t\varphi(\sigma)) \right)^{p_l}.$$

Враховуючи (18) і нерівність $\varphi(\sigma) \geq a_1|\sigma|^\alpha$, $\sigma \in \mathbb{R}$, одержуємо

$$|\Lambda| \leq c_{1\varepsilon}^{p_1} \dots c_{l\varepsilon}^{p_l} e^{\varepsilon(p_1+\dots+p_l)|\sigma|^\alpha} t^{p_1+\dots+p_l} \leq \tilde{c}_{s\varepsilon}^s \tilde{T}^s e^{\varepsilon s|\sigma|^\alpha},$$

де $\tilde{c}_{s\varepsilon} = \max\{1, c_{1\varepsilon}, \dots, c_{s\varepsilon}\}$, $\tilde{T} = \max\{1, T\}$. Тоді

$$|D_\sigma^s e^{-t\varphi(\sigma)}| \leq \tilde{b}_{s\varepsilon} e^{-a_1 t|\sigma|^\alpha + \varepsilon s|\sigma|^\alpha}.$$

Беручи $\varepsilon = \frac{a_1 t}{2s}$, отримуємо оцінку

$$|D_\sigma^s e^{-t\varphi(\sigma)}| \leq \beta_s e^{-at|\sigma|^\alpha}, \quad s \in \mathbb{N},$$

де $a = a_1/2$, $\beta_s = \beta_s(t) > 0$.

Лему 1 доведено.

З оцінок (16) випливає, що $Q_1(t, \cdot) \in S_{1/\alpha}$ при кожному $t \in (0, T]$.

Лема 2. Функція Q_2 — мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}$.

Доведення. Для встановлення твердження проведемо оцінювання похідних функції Q_2 . Для цього знову скористаємося формулою (17), в якій покладемо $F = \varphi^{-1}$, $\varphi = R$, де

$$R(\sigma) = \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k \varphi(\sigma)\} = \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \sigma).$$

Тоді $Q_2(\sigma) = F(\varphi) = R^{-1}$ і

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| = \left| \sum_{p=1}^s \frac{d^p R^{-1}}{dR^p} \sum \frac{s!}{p_1! \dots p_l!} \left(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma) \right)^{p_1} \dots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} R(\sigma) \right)^{p_l} \right|, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Враховуючи оцінки (16), одержуємо

$$\left| \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\sigma^j} R(\sigma) \right| \leq \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^m \mu_k |D_\sigma^j e^{-t_k \varphi(\sigma)}| \leq \sum_{k=1}^m \mu_k c_j e^{-at_k |\sigma|^\alpha} \leq \beta_0 \beta_s, \quad j \in \{1, \dots, l\},$$

де $\beta_s = \max\{1, c_1, \dots, c_s\}$, $\beta_0 = \max\left\{1, \sum_{k=1}^m \mu_k\right\}$. Тоді

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{1}{l!} \frac{d}{d\sigma} R(\sigma) \right)^{p_1} \right| \left| \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\sigma^2} R(\sigma) \right)^{p_2} \right| \dots \left| \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} R(\sigma) \right)^{p_l} \right| \\ & \leq (\beta_0 \beta_s)^{p_1} \dots (\beta_0 \beta_s)^{p_l} \leq \beta_0^s \beta_s^s. \end{aligned}$$

Крім того,

$$\begin{aligned} \frac{d^p R^{-1}}{dR^p} &= (-1)^p p! R^{-(p+1)}, \\ R^{-1}(\sigma) &\leq \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \right)^{-1} \leq \gamma_0 > 0 \end{aligned}$$

(тут враховано, що $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$). Отже,

$$\left| \frac{d^p R^{-1}}{dR^p} \right| \leq \gamma_0^{p+1} p!, \quad |D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \leq s! \sum_{p=1}^s \gamma_0^{p+1} p! \beta_0^s \beta_s^s \equiv d_s > 0, \quad s \in \mathbb{N}.$$

З останньої нерівності, а також обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 — мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}$.

Наслідок 2. При кожному $t \in (0, T]$ функція $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, є елементом простору $S_{1/\alpha}$, при цьому справджуються оцінки

$$|D_\sigma^s Q(t, \sigma)| \leq \tilde{c}_s \exp\{-\tilde{a}t|\sigma|^\alpha\}, \quad (t, \sigma) \in \Omega,$$

де $\tilde{a} > 0$, $\tilde{c}_s = \tilde{c}_s(t) > 0$.

Враховуючи властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S , переконаємося, що функція $G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \cdot)]$ є елементом простору $S^{1/\alpha} = F^{-1}[S_{1/\alpha}]$ при кожному $t \in (0, T]$. Наведемо ще деякі властивості функції G .

Лема 3. Функція $G(t, \cdot)$, $t \in (0, T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S^{1/\alpha}$, диференційовна по t .

Доведення. З властивості неперервності перетворення Фур'є випливає, що для встановлення твердження достатньо показати, що функція $F[G(t, \cdot)] = Q(t, \cdot)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $S_{1/\alpha}$, диференційовна по t . Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t} [Q(t + \Delta t, \sigma) - Q(t, \sigma)] \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} Q(t, \sigma), \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

- 1) $D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \rightarrow D_\sigma^s (-\varphi(\sigma)Q(t, \sigma))$, $\Delta t \rightarrow 0$, рівномірно на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$;
- 2) $|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c}_s \exp\{-\bar{a}|\sigma|^\alpha\}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar{c}_s, \bar{a} > 0$ не залежать від Δt , якщо Δt достатньо мале.

Функція $Q(t, \sigma)$ диференційовна по t у звичайному розумінні, тому за теоремою Лагранжа про скінченні прирости

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\varphi(\sigma)e^{-(t+\theta\Delta t)\varphi(\sigma)}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\Delta t}(\sigma) &:= \Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t} Q(t, \sigma) = -\varphi(\sigma)[e^{-(t+\theta\Delta t)\varphi(\sigma)} - e^{-t\varphi(\sigma)}] \\ &= \varphi^2(\sigma)e^{-(t+\theta_1\Delta t)\varphi(\sigma)}\theta_1\Delta t, \quad 0 < \theta_1 < 1. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} D_\sigma^s \Psi_{\Delta t}(\sigma) &= \sum_{k=0}^s C_s^k D_\sigma^k \varphi^2(\sigma) D_\sigma^{s-k} e^{-(t+\theta_1\Delta t)\varphi(\sigma)} \theta_1 \Delta t, \\ |D_\sigma^s \Psi_{\Delta t}(\sigma)| &\leq 2 \sum_{k=0}^s C_s^k \left(\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i |D_\sigma^i \varphi(\sigma)| |D_\sigma^{k-i} \varphi(\sigma)| \right) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\times |D_{\sigma}^{s-k} e^{-(t+\theta_1 \Delta t)\varphi(\sigma)}| |\Delta t|.$$

Оскільки, за умовою, $\varphi \in H_{\alpha}$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall s \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_{s\varepsilon} > 0 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R} : |D_{\sigma}^s \varphi(\sigma)| \leq c_{s\varepsilon} e^{\varepsilon |\sigma|^{\alpha}}. \quad (20)$$

З (19), (20) та оцінок (16), які задовольняють похідні функції $Q(t, \sigma)$, випливає, що $D_{\sigma}^s \Psi_{\Delta t}(\sigma) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ рівномірно на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$, що рівносильно виконанню умови 1.

Аналогічно, з нерівності

$$|D_{\sigma}^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \sum_{k=0}^s C_s^k |D_{\sigma}^k \varphi(\sigma)| |D_{\sigma}^{s-k} e^{-(t+\theta \Delta t)\varphi(\sigma)}|$$

випливає, що умова 2 також виконується.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, \cdot)) = f * \frac{\partial G(t, \cdot)}{\partial t}, \quad f \in (S^{1/\alpha})', \quad t \in (0, T].$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною

$$f * G(t, \cdot) = \langle f_{\xi}, T_{-x} \check{G}(t, \xi) \rangle, \quad \check{G}(t, \xi) = G(t, -\xi).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, \cdot)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(f * G(t + \Delta t, \cdot)) - (f * G(t, \cdot))] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle f_{\xi}, \frac{1}{\Delta t} [T_{-x} \check{G}(t + \Delta t, \xi) - T_{-x} \check{G}(t, \xi)] \right\rangle. \end{aligned}$$

На підставі леми 3 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t} [T_{-x} \check{G}(t + \Delta t, \xi) - T_{-x} \check{G}(t, \xi)] \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} T_{-x} \check{G}(t, \xi)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S^{1/\alpha}$. Тому, з урахуванням неперервності функціонала f ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, \cdot)) &= \left\langle f_{\xi}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [T_{-x} \check{G}(t + \Delta t, \xi) - T_{-x} \check{G}(t, \xi)] \right\rangle \\ &= \left\langle f_{\xi}, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x} \check{G}(t, \xi) \right\rangle = \left\langle f_{\xi}, T_{-x} \frac{\partial}{\partial t} \check{G}(t, \xi) \right\rangle = f * \frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Лема 5. *У просторі $(S^{1/\alpha})'$ виконуються такі співвідношення:*

- 1) $G(t, \cdot) \rightarrow F^{-1}[Q_2], t \rightarrow +0$;
- 2) $\mu G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k G(t_k, \cdot) \rightarrow \delta, t \rightarrow +0$ (тут δ — дельта-функція Дірака).

Доведення. 1. З огляду на властивість неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S' , для встановлення твердження достатньо показати, що

$$F[G(t, \cdot)] = Q_1(t, \cdot)Q_2(\cdot) \rightarrow Q_2(\cdot), \quad t \rightarrow +0,$$

у просторі $(S_{1/\alpha})'$. Для цього візьмемо довільну функцію $\psi \in S_{1/\alpha}$ і, скориставшись тим, що Q_2 — мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}$, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, отримаємо

$$\begin{aligned} \langle Q_1(t, \cdot)Q_2(\cdot), \psi \rangle &= \langle Q_1(t, \cdot), Q_2(\cdot)\psi(\cdot) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma \xrightarrow{t \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma = \langle 1, Q_2(\cdot)\psi(\cdot) \rangle = \langle Q_2, \psi \rangle, \end{aligned}$$

звідси й випливає твердження 1 леми 5.

2. З урахуванням твердження 1 маємо

$$\begin{aligned} \mu G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k G(t_k, \cdot) &\xrightarrow{t \rightarrow +0} \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^m \mu_k G(t_k, \cdot) \\ &= \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^m \mu_k F^{-1}[Q_1(t_k, \cdot)Q_2(\cdot)] \\ &= F^{-1} \left[\mu Q_2 - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \cdot)Q_2(\cdot) \right] = F^{-1} \left[\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \cdot) \right) Q_2(\cdot) \right] \\ &= F^{-1} \left[\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \cdot) \right) \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \cdot) \right)^{-1} \right] = F^{-1}[1] = \delta. \end{aligned}$$

Отже, твердження 2 виконується у просторі $(S^{1/\alpha})'$.

Лемі 5 доведено.

Зауваження 1. Якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, то задача (10), (11) — задача Коші для рівняння (10). У цьому випадку $Q_2(\sigma) = 1$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $G(t, \cdot) = F^{-1}[e^{-t\varphi(\sigma)}]$ і $G(t, \cdot) \rightarrow F^{-1}[1] = \delta$ у просторі $(S^{1/\alpha})'$.

Лема 6. Нехай

$$\omega(t, x) = f * G(t, x), \quad f \in (S_*^{1/\alpha})', \quad (t, x) \in \Omega$$

(тут $(S_*^{1/\alpha})'$ — клас згортувачів у просторі $S^{1/\alpha}$). Тоді у просторі $(S^{1/\alpha})'$ виконується граничне співвідношення

$$\mu \omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \omega(t_k, \cdot) \rightarrow f, \quad t \rightarrow +0.$$

Доведення. Для встановлення твердження достатньо показати, що граничне співвідношення

$$F \left[\mu \omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \omega(t_k, \cdot) \right] \rightarrow F[f], \quad t \rightarrow +0,$$

виконується у просторі $(S_{1/\alpha})' = F[(S^{1/\alpha})']$. Згідно з умовою, узагальнена функція f — згортувач у просторі $S^{1/\alpha}$, $G(t, \cdot) \in S^{1/\alpha}$ при кожному $t \in (0, T]$, тому

$$F[\omega(t, \cdot)] = F[f * G(t, \cdot)] = F[f]Q(t, \cdot).$$

Оскільки $Q(t, \cdot) \rightarrow Q_2(\cdot)$ при $t \rightarrow +0$ у просторі $S'_{1/\alpha}$ (див. доведення твердження 1 леми 5), а $F[f]$ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}$, то в просторі $S'_{1/\alpha}$ виконується граничне співвідношення

$$\begin{aligned} F\left[\mu\omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \omega(t_k, \cdot)\right] &= F[f]\left(\mu Q(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k Q(t_k, \cdot)\right) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +0} F[f]\left(\mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \cdot)Q_2(\cdot)\right) \\ &= F[f]\left(\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \cdot)\right)Q_2(\cdot)\right) \\ &= F[f]\left[\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \cdot)\right)\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \cdot)\right)^{-1}\right] = F[f]. \end{aligned}$$

Лему 6 доведено.

Функція $\omega(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, є розв'язком рівняння (10). Справді, оскільки f — згортувач у просторі $S^{1/\alpha}$, то

$$\begin{aligned} A\omega(t, \cdot) &= F^{-1}[\varphi(\sigma)F[f * G(t, \cdot)]] = F^{-1}[\varphi(\sigma)F[f]Q(t, \cdot)] \\ &= -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t, \cdot)F[f]\right] = -F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t}G(t, \cdot)\right]F[f]\right] \\ &= -F^{-1}\left[F\left[f * \frac{\partial}{\partial t}G(t, \cdot)\right]\right] = -f * \frac{\partial}{\partial t}G(t, \cdot). \end{aligned}$$

З іншого боку (див. лему 4),

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t, \cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, \cdot)) = f * \frac{\partial}{\partial t}G(t, \cdot).$$

Звідси випливає, що функція $\omega(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (10).

З леми 6 випливає, що для рівняння (10) нелокальну багатоточкову за часом задачу можна сформулювати так: знайти розв'язок рівняння (10), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k u(t_k, \cdot) = f, \quad f \in (S_*^{1/\alpha})', \quad (21)$$

де граничне співвідношення (21) розглядається в просторі $(S^{1/\alpha})'$ (обмеження на параметри μ , $\mu_1, \dots, \mu_m$, $t_1, \dots, t_m$ такі ж, як і у випадку задачі (10), (11)).

Із доведеного раніше випливає, що функція $u(t, x) = f * G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, є розв'язком рівняння (10). Якщо $f = \delta \in (S_*^{1/\alpha})'$, то $f * G(t, x) = G(t, x)$, тобто $G(t, x)$ також є розв'язком рівняння (10). Урахувавши цей факт, а також співвідношення 2 з леми 5, функцію $G(t, x)$ називатимемо фундаментальним розв'язком задачі (10), (21).

Теорема 3. *Задача (10), (21) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t, x) = f * G(t, x), \quad (t, x) \in \Omega.$$

Доведення. Функція $f * G(t, x)$ задовольняє рівняння (10). Розв'язок неперервно залежить від f в умові (21) у тому розумінні, що якщо $\{f, f_n, n \geq 1\} \subset (S_*^{1/\alpha})'$ і $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ у просторі $(S_*^{1/\alpha})'$, то

$$u_n = f_n * G(t, x) \rightarrow u = f * G(t, x), \quad n \rightarrow \infty,$$

у просторі $(S_*^{1/\alpha})'$. Ця властивість випливає з властивості неперервності згортки.

Переконаємося в тому, що задача (10), (21) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A^* v, \quad (t, x) \in [0, t_0) \times \mathbb{R}, \quad 0 \leq t < t_0 \leq T, \quad (22)$$

$$v(t, \cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in (S_*^{1/\alpha})', \quad (23)$$

де A^* — звуження спряженого оператора до оператора A на простір $S^{1/\alpha} \subset (S_*^{1/\alpha})'$. Умову (23) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (22), (23) є розв'язною при кожному $t \in [0, t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t: (S_*^{1/\alpha})' \rightarrow S^{1/\alpha}$ — оператор, який зіставляє функції $\psi \in (S_*^{1/\alpha})'$ розв'язок задачі (22), (23). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних $0 \leq t < t_0 \leq T$ і має такі властивості:

$$\forall \psi \in (S_*^{1/\alpha})': \quad \frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} = A^* Q_{t_0}^t \psi, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається у просторі $(S^{1/\alpha})'$).

Розв'язок $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, розумітимемо як регулярний функціонал із простору $(S_*^{1/\alpha})' \supset S^{1/\alpha}$. Доведемо, що задача (10), (21) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(S_*^{1/\alpha})'$. Для цього достатньо встановити, що єдиним розв'язком рівняння (10) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t, x) = 0$ при кожному $t \in (0, T]$. Застосуємо функціонал u до функції $Q_{t_0}^t \psi$, де ψ — довільний елемент з простору $S^{1/\alpha} \subset (S_*^{1/\alpha})'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (10), (22), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle u(t, \cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q_{t_0}^t \psi}{\partial t} \right\rangle = \langle -Au, Q_{t_0}^t \psi \rangle + \langle u, A^* Q_{t_0}^t \psi \rangle \\ &= \langle -Au, Q_{t_0}^t \psi \rangle + \langle Au, Q_{t_0}^t \psi \rangle = 0, \quad t \in [0, t_0). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\langle u(t, \cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \langle u(t, \cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle = \langle u(t_0, \cdot), \psi \rangle = c_0 \equiv c_0(t_0)$$

у довільній точці $t_0 \in (0, T]$. Отже, якщо в (21) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} \langle u(t, \cdot), \psi \rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \langle u(t_k, \cdot), \psi \rangle = \mu c_0 - \sum_{k=1}^m \mu_k c_k = 0.$$

Звідси випливає, що $c_0 = c_1 = \dots = c_m = 0$.

Справді, нехай це не так. Наприклад, $c_0 \neq 0$. Тоді маємо співвідношення

$$\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \beta_k = 0,$$

де $\beta_k = c_k/c_0$, тобто $\mu = \sum_{k=1}^m \mu_k \beta_k$. Оскільки, за умовою, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, де $\mu_1, \dots, \mu_m$ фіксовані, то одержана суперечність доводить, що $c_0 = 0$. Аналогічно переконуємося в тому, що $c_1 = \dots = c_m = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0, \cdot), \psi \rangle = 0$ для довільного $\psi \in S^{1/\alpha}$, тобто $u(t_0, \cdot)$ — нульовий функціонал із простору $(S_*^{1/\alpha})'$. Оскільки $t_0 \in (0, T]$ і t_0 вибрано довільним чином, то $u(t, x) = 0$ для всіх $t \in (0, T]$.

Теорему 3 доведено.

Наведемо приклад узагальненої функції з простору $(S_*^{1/\alpha})'$, де $1/\alpha > 1$. Нехай

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\{|x|^{-\gamma}\}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad \gamma > 0, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Відомо [13], що f допускає регуляризацию у просторі $(S^\beta)'$, де $1 < \beta < 1 + 1/\gamma$, тобто f є регулярною узагальненою функцією з простору $(S^\beta)'$. Якщо покласти $\beta = 1/\alpha$, то

$$\frac{1}{\gamma} > \beta - 1 = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

Отже, якщо $\gamma < \frac{\alpha}{1 - \alpha}$, то $f_\gamma \in (S^{1/\alpha})'$. Для прикладу візьмемо $\alpha = 1/2$, тоді $\gamma < 1$. Отже, функція

$$f_{1/2}(x) = \begin{cases} \exp\{|x|^{-1/2}\}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

породжує регулярний функціонал з простору $(S^2)'$. Оскільки носій $(\text{supp } f_{1/2})$ — відрізок $[-1, 1]$, то $f_{1/2}$ — фінітна узагальнена функція, а отже, $f_{1/2}$ — згортувач у просторі S^2 , оскільки кожна фінітна функція з $(S^2)'$ є згортувачем у просторі S^2 . Ця властивість впливає із загального результату, який відноситься до теорії досконалих просторів [3, с. 173]: якщо Φ — досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ . Фінітні узагальнені функції утворюють досить широкий клас. Зокрема, кожна обмежена замкнена множина $F \subset \mathbb{R}$ є носієм деякої узагальненої функції (див., наприклад, [6, с. 118]).

Висновки. Формального розширення класу рівнянь з частинними похідними параболического типу можна домогтися, приєднавши до класу таких рівнянь рівняння з оператором $\varphi(i\partial/\partial x)$, побудованим за певними функціями. Звуження таких операторів на простори типу S (простори $S^{1/\alpha}$) збігається з псевдодиференціальними операторами у таких просторах, побудованими за функціями φ — мультиплікаторами у просторах типу S . Такий підхід дозволяє ефективно використовувати метод перетворення Фур'є для дослідження багатоточкової за часом задачі (зокрема, задачі Коші) для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання нескінченного порядку та операторами дробового диференціювання і початковою функцією, яка може мати у певній точці особливість навіть „експоненціального” характеру.

Від імені всіх авторів відповідальна за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, *Параболічні псевдодиференціальні рівняння з аналітичними символами у просторах типу S* , Технодрук, Чернівці (2019).
2. В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, *Задача Коші та нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною*, Видавничий дім „Родовід”, Чернівці (2015).
3. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, Москва (1958).
4. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наук. думка, Киев (1984).
5. М. Л. Горбачук, П. И. Дудников, *О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы*, Докл. АН УССР. Сер. А, № 4, 9–11 (1981).
6. В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболического типу*, Рута, Чернівці (1998).
7. В. В. Городецький, *Множини початкових значень гладких розв'язків дифференціально-операторних рівнянь параболического типу*, Рута, Чернівці (1998).
8. В. В. Городецький, *Еволюційні рівняння в зліченно нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій*, Рута, Чернівці (2008).
9. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Физматгиз, Москва (1958).
10. Б. Л. Гуревич, *Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем*, Докл. АН СССР, **99**, № 6, 893–896 (1954).
11. В. В. Городецький, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев, *Методы решения задач по функциональному анализу*, Высш. шк., Киев (1990).
12. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).
13. В. В. Городецький, Я. М. Дрінь, М. І. Нагнибида, *Узагальнені функції. Методи розв'язування задач*, Книги-XXI, Чернівці (2011).

Одержано 26.02.23