

НОРМАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЕЛ У ТЕРМІНАХ ЇХНЬОГО ЗОБРАЖЕННЯ РЯДАМИ ПЕРРОНА

We examine the representation of real numbers by the Perron series (P -representation) given by

$$(0; 1] \ni x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(p_1 - 1)p_1 \dots (p_n - 1)p_n p_{n+1}} = \Delta_{p_1 p_2 \dots}^P, \quad \text{where } r_n, p_n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} \geq r_n + 1,$$

and its transcoding ($\bar{P}$ -representation)

$$x = \Delta_{g_1 g_2 \dots}^{\bar{P}}, \quad \text{where } g_n = p_n - r_{n-1}.$$

We establish the properties of $\bar{P}$ -representations typical of almost all numbers with respect to the Lebesgue measure (normal properties of the representations of numbers). We also examine the conditions of existence of the frequency of a digit i in the $\bar{P}$ -representation of a number $x = \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}}$ defined by the equality

$$\nu_i^{\bar{P}}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_i^{\bar{P}}(x, k)}{k},$$

where $N_i^{\bar{P}}(x, k)$ denotes the amount of numbers n such that $g_n = i$ and $n \leq k$. In particular, we establish conditions under which the frequency $\nu_i^{\bar{P}}(x)$ exists and is constant for almost all $x \in (0; 1]$. In addition, we also determine the conditions under which the digits in $\bar{P}$ -representations are encountered finitely or infinitely many times for almost all numbers from $(0; 1]$.

Вивчаються зображення чисел рядами Перрона (P -зображення)

$$(0; 1] \ni x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(p_1 - 1)p_1 \dots (p_n - 1)p_n p_{n+1}} = \Delta_{p_1 p_2 \dots}^P, \quad \text{де } r_n, p_n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} \geq r_n + 1,$$

та його перекодування ($\bar{P}$ -зображення)

$$x = \Delta_{g_1 g_2 \dots}^{\bar{P}}, \quad \text{де } g_n = p_n - r_{n-1}.$$

Знайдено властивості $\bar{P}$ -зображення, які мають майже всі в розумінні міри Лебега числа (нормальні властивості зображень чисел). Вивчаються умови існування у $\bar{P}$ -зображенні числа $x = \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}}$ частоти цифри i , яка означається рівністю

$$\nu_i^{\bar{P}}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_i^{\bar{P}}(x, k)}{k},$$

де $N_i^{\bar{P}}(x, k)$ — кількість номерів n таких, що $g_n = i$ та $n \leq k$. Зокрема, встановлено умови, за яких частота $\nu_i^{\bar{P}}(x)$ існує й однакова для майже всіх $x \in (0; 1]$. Також знайдено умови, за яких цифри у $\bar{P}$ -зображенні зустрічаються скінченно (нескінченно) кількість разів для майже всіх чисел з $(0; 1]$.

1. Вступ. Ряди Перрона, $\bar{P}$ -зображення чисел. Сьогодні в математиці та її застосуваннях використовуються різні моделі дійсного числа: у формі ряду, ланцюгового дробу, нескінченного добутку тощо. Кожна з форм існування числа має свої переваги у певному аспекті, а в сукупності вони є взаємодоповнюючими і складають потужний арсенал засобів задання та вивчення математичних об'єктів зі складною локальною тополого-метричною структурою і фрактальними властивостями.

¹ E-mail: moroznik22@gmail.com.

У теорії сингулярних функцій та розподілів імовірностей, теорії фракталів, метричній теорії динамічних систем, різних теоріях хаосу важливу роль відіграють нормальні властивості зображення чисел у тій чи іншій системі зображення чисел. Класичними в цьому відношенні є результати Бореля [6] для s -кового зображення дійсних чисел та Хінчина [4] для зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.

Як виявилось, зображення чисел одиничного проміжку рядами Люрота [9–12, 15], Енгеля [1, 3, 5, 7, 13], Сильвестера [8, 14] мають багато спільного, до того ж існує загальна модель, частковими випадками якої вони є. Саме їй присвячено цю статтю.

Означення 1 [2]. Рядом Перрона будемо називати числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(p_1 - 1)p_1(p_2 - 1)p_2 \dots (p_n - 1)p_n p_{n+1}}, \quad (1)$$

де $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ — довільна послідовність натуральних чисел, $p_n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq r_{n-1} + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Зауваження 1. Далі під дробом $\frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(p_1 - 1)p_1(p_2 - 1)p_2 \dots (p_n - 1)p_n p_{n+1}}$ при умові $n = 0$ будемо розуміти дріб $\frac{r_0}{p_1}$.

Лема 1 [2]. Ряд Перрона (1) є збіжним, до того ж його сума є числом з $(0; 1]$.

Нехай функції $\varphi_n(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_0 = \text{const} \in \mathbb{N}$. Через P позначатимемо фіксовану послідовність функцій $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$.

Означення 2 [2]. Нехай число $x \in (0; 1]$ є сумою ряду (1), до того ж $r_0 = \varphi_0$ і $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді розклад числа x у ряд (1) будемо називати його P -поданням, скорочений запис $\Delta_{p_1 p_2 \dots p_n \dots}^P$ — його P -зображенням, а число p_i — i -ю цифрою його P -зображення.

Теорема 1 [2]. При довільній послідовності P функцій φ_i кожен $x \in (0; 1]$ має єдине P -подання, тобто існує єдина послідовність натуральних чисел $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(p_1 - 1)p_1 \dots (p_n - 1)p_n p_{n+1}} \equiv \Delta_{p_1 \dots p_n \dots}^P,$$

де $r_0 = \varphi_0$, $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$ і $p_n \geq r_{n-1} + 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Означення 3 [2]. P -циліндром рангу k з основою $c_1 \dots c_k$ будемо називати непорожню множину $\Delta_{c_1 \dots c_k}^P$ чисел з $(0; 1]$, для яких існує P -зображення вигляду $\Delta_{c_1 \dots c_k p_{k+1} \dots}^P$, тобто

$$\Delta_{c_1 \dots c_k}^P = \left\{ x : x \in (0; 1], x = \Delta_{c_1 \dots c_k p_{k+1} p_{k+2} \dots}^P \right\}.$$

Означення 4 [2]. Різницеvim поданням ряду Перрона будемо називати запис ряду (1) у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 r_1 \dots r_n}{(r_0 + g_1 - 1)(r_0 + g_1) \dots (r_{n-1} + g_n - 1)(r_{n-1} + g_n)(r_n + g_{n+1})}, \quad (2)$$

де $g_n = p_n - r_{n-1}$ і $g_n \in \mathbb{N}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Нехай P — послідовність функцій $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$. Розглянемо функції $\bar{\varphi}_n$ такі, що $\bar{\varphi}_0 = \varphi_0 = \text{const} \in \mathbb{N}$ і

$$\bar{\varphi}_n(g_1, \dots, g_n) = \varphi_n(p_1, \dots, p_n),$$

де $r_0 = \varphi_0$, $p_n = r_{n-1} + g_n$, $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Послідовність функцій $(\bar{\varphi}_n)_{n=0}^\infty$ позначимо як $\bar{P}$.

Означення 5 [2]. Нехай число $x \in (0; 1]$ є сумою ряду (2), до того ж $r_0 = \bar{\varphi}_0$ і $r_n = \bar{\varphi}_n(g_1, \dots, g_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді розклад числа x у ряд (2) будемо називати його $\bar{P}$ -поданням, скорочений запис $\Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}}$ ряду (2) — $\bar{P}$ -зображенням числа x , а число g_i — i -ю цифрою його $\bar{P}$ -зображення.

Означення 6 [2]. $\bar{P}$ -циліндром рангу k з основою $c_1 \dots c_k$ будемо називати множину $\Delta_{c_1 \dots c_k}^{\bar{P}}$ всіх чисел з $(0; 1]$, для яких існує $\bar{P}$ -зображення вигляду $\Delta_{c_1 \dots c_k g_{k+1} \dots}^{\bar{P}}$, тобто

$$\Delta_{c_1 \dots c_k}^{\bar{P}} = \left\{ x : x \in (0; 1], x = \Delta_{c_1 \dots c_k g_{k+1} g_{k+2} \dots}^{\bar{P}} \right\}.$$

Як і кожен P -циліндр, всі $\bar{P}$ -циліндри є числовими проміжками вигляду $(a; b]$. Довжину $\bar{P}$ -циліндра $\Delta_{c_1 \dots c_k}^{\bar{P}}$ будемо позначати $|\Delta_{c_1 \dots c_k}^{\bar{P}}|$. Всі властивості $\bar{P}$ -зображення та $\bar{P}$ -циліндрів аналогічні відповідним властивостям P -зображення [2] та безпосередньо випливають з них, а всі рівності лише змінюють свою форму запису завдяки підстановці $p_n = r_{n-1} + g_n$.

Таким чином, для $\bar{P}$ -циліндрів справджуються рівності

$$|\Delta_{c_1 \dots c_k}^{\bar{P}}| = \frac{r_0 r_1 \dots r_{k-1}}{(r_0 + c_1 - 1)(r_0 + c_1) \dots (r_{k-1} + c_k - 1)(r_{k-1} + c_k)}, \quad (3)$$

$$(0; 1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i^{\bar{P}}, \quad \Delta_{c_1 \dots c_k}^{\bar{P}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_k i}^{\bar{P}}, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_i^{\bar{P}}| = 1, \quad |\Delta_{c_1 \dots c_k}^{\bar{P}}| = \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_{c_1 \dots c_k i}^{\bar{P}}|, \quad (5)$$

в яких $r_0 = \bar{\varphi}_0$ та $r_n = \bar{\varphi}_n(c_1, \dots, c_n)$ для кожного $n = 1, \dots, k$.

Лема 2 [2] (основне метричне відношення).

$$\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_k i}^{\bar{P}}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_k}^{\bar{P}}|} = \frac{r_k}{(r_k + i - 1)(r_k + i)},$$

де $r_k = \bar{\varphi}_k(c_1, \dots, c_k)$.

Лема 3 [2]. Якщо $\Delta_{b_1 \dots b_n}^{\bar{P}}$ і $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{\bar{P}}$ — два різні $\bar{P}$ -циліндри, то можливі лише два випадки їх взаємного розміщення:

$\Delta_{b_1 \dots b_n}^{\bar{P}} \cap \Delta_{c_1 \dots c_m}^{\bar{P}} = \emptyset$, якщо існує натуральне $k \leq \min\{n, m\}$ таке, що $b_i = c_i$ для всіх $i < k$ та $b_k \neq c_k$;

$\Delta_{b_1 \dots b_n}^{\bar{P}} \subset \Delta_{c_1 \dots c_m}^{\bar{P}}$, якщо $n > m$ і $b_i = c_i$ для всіх $i \leq m$.

2. Нормальні властивості чисел, що пов'язані з кількістю різних цифр у їхньому $\bar{P}$ -зображенні. Розглянемо $\bar{P}$ -зображення, що визначене послідовністю функцій $(\bar{\varphi}_n)_{n=0}^\infty$.

Теорема 2. Якщо ряд $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\min \bar{\varphi}_n}$ збіжний, то для майже всіх чисел з $(0; 1]$ кожна цифра в їхніх $\bar{P}$ -зображеннях зустрічається скінченну кількість разів.

Доведення. Використаємо ймовірнісний підхід, скориставшись лемою Бореля–Кантеллі. Для цього розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, де $\Omega = (0; 1]$, $\mathcal{F}$ – σ -алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини Ω , λ – міра Лебега.

Нехай $A_k^i = \{x : g_k(x) = i\}$. Подію A_k^i можна подати у вигляді

$$A_k^i = \bigcup_{g_1=1}^\infty \dots \bigcup_{g_{k-1}=1}^\infty \Delta_{g_1 \dots g_{k-1} i}^{\bar{P}}.$$

Оскільки $\bar{P}$ -циліндри $\Delta_{g_1 \dots g_{k-1} i}^{\bar{P}}$ попарно не перетинаються, то

$$\lambda(A_k^i) = \sum_{g_1=1}^\infty \dots \sum_{g_{k-1}=1}^\infty \left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1} i}^{\bar{P}} \right|.$$

Із рівності (3) випливає, що для кожного $i \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1} i}^{\bar{P}} \right| \leq \left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1} 1}^{\bar{P}} \right|$. Тоді, враховуючи лему 2, отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda(A_k^i) &\leq \lambda(A_k^1) = \sum_{g_1=1}^\infty \dots \sum_{g_{k-1}=1}^\infty \left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1} 1}^{\bar{P}} \right| = \sum_{g_1=1}^\infty \dots \sum_{g_{k-1}=1}^\infty \left(\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \frac{\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1} 1}^{\bar{P}} \right|}{\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right|} \right) \\ &= \sum_{g_1=1}^\infty \dots \sum_{g_{k-1}=1}^\infty \left(\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \frac{1}{\bar{\varphi}_{k-1}(g_1, \dots, g_{k-1}) + 1} \right) \\ &\leq \sum_{g_1=1}^\infty \dots \sum_{g_{k-1}=1}^\infty \left(\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \frac{1}{\min \bar{\varphi}_{k-1} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{\min \bar{\varphi}_{k-1} + 1} \sum_{g_1=1}^\infty \dots \sum_{g_{k-1}=1}^\infty \left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| = \frac{1}{\min \bar{\varphi}_{k-1} + 1} < \frac{1}{\min \bar{\varphi}_{k-1}}. \end{aligned}$$

Якщо ряд $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\min \bar{\varphi}_{k-1}}$ збіжний, то згідно з ознакою порівняння ряд $\sum_{k=1}^\infty \lambda(A_k^i)$ також є збіжним.

Нехай $A^i = \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k^i = \bigcap_{n=1}^\infty \left(\bigcup_{k=n}^\infty A_k^i \right)$. Зрозуміло, що множина A^i містить ті й лише ті числа, $\bar{P}$ -зображення яких містять цифру i нескінченну кількість разів. Оскільки ряд $\sum_{k=1}^\infty \lambda(A_k^i)$ збіжний, то згідно з лемою Бореля–Кантеллі $\lambda(A^i) = 0$. Тому кожна цифра i зустрічається скінченну кількість разів у $\bar{P}$ -зображеннях майже всіх чисел з $(0; 1]$.

Наслідок 1. Нехай $\bar{P}$ -зображення таке, що, починаючи з деякого номера n_0 , $\bar{\varphi}_k = \text{const}$ для всіх $k \geq n_0$. Тоді якщо ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\bar{\varphi}_k}$ збіжний, то для майже всіх чисел з $(0; 1]$ кожна цифра в їхніх $\bar{P}$ -зображеннях зустрічається скінченну кількість разів.

Лема 4. Якщо для деякого $k \in \mathbb{N}$ функція $\bar{\varphi}_{k-1}$ є сталою, то

$$\lambda(A_k^i) = \frac{\bar{\varphi}_{k-1}}{(\bar{\varphi}_{k-1} + i - 1)(\bar{\varphi}_{k-1} + i)}. \quad (6)$$

Доведення. Оскільки $A_k^i = \bigcup_{g_1=1}^{\infty} \dots \bigcup_{g_{k-1}=1}^{\infty} \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}}$, то

$$\begin{aligned} \lambda(A_k^i) &= \sum_{g_1=1}^{\infty} \dots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| = \sum_{g_1=1}^{\infty} \dots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \left(\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \frac{\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right|}{\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right|} \right) \\ &= \sum_{g_1=1}^{\infty} \dots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \left(\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \frac{\bar{\varphi}_{k-1}}{(\bar{\varphi}_{k-1} + i - 1)(\bar{\varphi}_{k-1} + i)} \right) \\ &= \frac{\bar{\varphi}_{k-1}}{(\bar{\varphi}_{k-1} + i - 1)(\bar{\varphi}_{k-1} + i)} \sum_{g_1=1}^{\infty} \dots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| = \frac{\bar{\varphi}_{k-1}}{(\bar{\varphi}_{k-1} + i - 1)(\bar{\varphi}_{k-1} + i)}. \end{aligned}$$

Теорема 3. Нехай $\bar{P}$ -зображення таке, що, починаючи з деякого номера n_0 , $\bar{\varphi}_k = \text{const}$ для всіх $k \geq n_0$. Тоді для кожного $i \in \mathbb{N}$ випадкові події $A_k^i = \{x : g_k(x) = i\}$, де $k \geq n_0 + 1$, незалежні в сукупності.

Доведення. Нехай $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\bar{\varphi}_k = \text{const}$ для всіх $k \geq n_0$. Розглянемо довільний скінченний набір випадкових подій $A_{k_j}^i$, де $j \in \{1, \dots, n\}$, $k_j \geq n_0 + 1$. Згідно з лемою 4 маємо

$$\lambda(A_{k_j}^i) = \frac{\bar{\varphi}_{k_j-1}}{(\bar{\varphi}_{k_j-1} + i - 1)(\bar{\varphi}_{k_j-1} + i)}.$$

Знайдемо вираз для $\lambda(A_{k_1}^i \cap \dots \cap A_{k_n}^i)$. Нехай $t_1, \dots, t_s$ — зростаюча послідовність всіх тих номерів, що менші за k_n і не збігаються з жодним із номерів k_j . Тоді міра Лебега $\bar{P}$ -циліндра $\Delta_{g_1 \dots g_{k_n}}^{\bar{P}}$ рангу k_n , де $g_{k_j} = i$ при всіх $j \in \{1, \dots, n\}$, має вигляд

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_{g_1 \dots g_{k_n}}^{\bar{P}}) &= \prod_{j=1}^n \frac{r_{k_j-1}}{(r_{k_j-1} + i - 1)(r_{k_j-1} + i)} \prod_{j=1}^s \frac{r_{t_j-1}}{(r_{t_j-1} + g_{t_j} - 1)(r_{t_j-1} + g_{t_j})} \\ &= \prod_{j=1}^n \lambda(A_{k_j}^i) \prod_{j=1}^s \frac{r_{t_j-1}}{(r_{t_j-1} + g_{t_j} - 1)(r_{t_j-1} + g_{t_j})}, \end{aligned}$$

$r_n = \bar{\varphi}_n(g_1, \dots, g_n)$, $r_0 = \bar{\varphi}_0$. Тому

$$\lambda(A_{k_1}^i \cap \dots \cap A_{k_n}^i) = \sum_{g_{t_1}=1}^{\infty} \dots \sum_{g_{t_s}=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n \lambda(A_{k_j}^i) \prod_{j=1}^s \frac{\bar{\varphi}_{t_j-1}}{(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j} - 1)(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j})} \right)$$

$$= \prod_{j=1}^n \lambda(A_{k_j}^i) \sum_{g_{t_1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{t_s}=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^s \frac{\bar{\varphi}_{t_j-1}}{(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j} - 1)(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j})} \right).$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \sum_{g_{t_s}=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^s \frac{\bar{\varphi}_{t_j-1}}{(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j} - 1)(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j})} \right) &= \prod_{j=1}^{s-1} \frac{\bar{\varphi}_{t_j-1}}{(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j} - 1)(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j})} \\ &\times \sum_{g_{t_s}=1}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_{t_s-1}}{(\bar{\varphi}_{t_s-1} + g_{t_s} - 1)(\bar{\varphi}_{t_s-1} + g_{t_s})} = \prod_{j=1}^{s-1} \frac{\bar{\varphi}_{t_j-1}}{(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j} - 1)(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j})}. \end{aligned}$$

Виконавши s таких перетворень, отримаємо рівність

$$\sum_{g_{t_1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{t_s}=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^s \frac{\bar{\varphi}_{t_j-1}}{(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j} - 1)(\bar{\varphi}_{t_j-1} + g_{t_j})} \right) = 1.$$

Таким чином, $\lambda(A_{k_1}^i \cap \dots \cap A_{k_n}^i) = \prod_{j=1}^n \lambda(A_{k_j}^i)$, а тому випадкові події A_k^i незалежні в сукупності.

Теорема 4. Нехай $\bar{P}$ -зображення таке, що, починаючи з деякого номера n_0 , $\bar{\varphi}_k = \text{const}$ для всіх $k \geq n_0$. Для того щоб для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ кожна цифра i в їхніх $\bar{P}$ -зображеннях зустрічалася нескінченну кількість разів, необхідно та достатньо, щоб ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\bar{\varphi}_k}$ був розбіжним.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що за умов теореми ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\bar{\varphi}_k}$ є збіжним. Тоді згідно з наслідком 1 для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ рівність $g_n(x) = i$ виконується для скінченної кількості номерів n . Тому необхідно, щоб ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\bar{\varphi}_k}$ був розбіжним.

Достатність. Нехай виконуються умови теореми. Тоді на підставі леми 4 для всіх $k \geq n_0 + 1$ справджується рівність

$$\lambda(A_k^i) = \frac{\bar{\varphi}_{k-1}}{(\bar{\varphi}_{k-1} + i - 1)(\bar{\varphi}_{k-1} + i)}.$$

Нехай $A^i = \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k^i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^i \right)$. Множина A^i містить ті й лише ті числа, $\bar{P}$ -зображення яких містять цифру i нескінченну кількість разів. Події A_k^i , $k \geq n_0 + 1$, незалежні в сукупності (теорема 3). Тому, згідно з лемою Бореля – Кантеллі, для того, щоб $\lambda(A^i) = 1$, достатньо, щоб ряд

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_{k-1}}{(\bar{\varphi}_{k-1} + i - 1)(\bar{\varphi}_{k-1} + i)} = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_k}{(\bar{\varphi}_k + i - 1)(\bar{\varphi}_k + i)}$$

був розбіжним.

Покажемо, що цей ряд розбіжний тоді й лише тоді, коли розбіжним є ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\bar{\varphi}_k}$. Для цього розглянемо два випадки.

Якщо $\bar{\varphi}_n \not\rightarrow \infty$, то загальні члени обох цих рядів не прямують до 0, а тому обидва ряди розбіжні.

Нехай $\bar{\varphi}_n \rightarrow \infty$. Знайдемо границю відношення членів цих рядів:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\bar{\varphi}_k} : \frac{\bar{\varphi}_k}{(\bar{\varphi}_k + i - 1)(\bar{\varphi}_k + i)} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\bar{\varphi}_k + i - 1)(\bar{\varphi}_k + i)}{\bar{\varphi}_k^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i - 1}{\bar{\varphi}_k} \right) \left(1 + \frac{i}{\bar{\varphi}_k} \right) = 1. \end{aligned}$$

Згідно з граничною ознакою порівняння рядів ці ряди одночасно збіжні або одночасно розбіжні. Отже, якщо ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\bar{\varphi}_k}$ розбіжний, то ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_k}{(\bar{\varphi}_k + i - 1)(\bar{\varphi}_k + i)}$ також є розбіжним, а отже $\lambda(A^i) = 1$. Звідси маємо, що для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ рівність $g_n(x) = i$ виконується для нескінченної кількості номерів n .

Наслідок 2. Якщо $\bar{\varphi}_n = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто $\bar{P}$ -подання є різницеvim поданням чисел рядами Люрота, то для кожного $i \in \mathbb{N}$ рівність $g_n(x) = i$ виконується для нескінченної кількості номерів n для майже всіх $x \in (0; 1]$.

Лема 5. Якщо $\bar{P}$ -зображення таке, що $\bar{\varphi}_k(g_1, \dots, g_k) \geq \bar{\varphi}_{k-1}(g_1, \dots, g_{k-1}) + g_k$ для довільного набору $g_1, \dots, g_k$, то $\lambda(A_{k+1}^1) \leq \frac{1}{2} \lambda(A_k^1)$.

Доведення. В доведенні теореми 2 було показано, що

$$\lambda(A_k^1) = \sum_{g_1=1}^{\infty} \dots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \left(\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \frac{1}{\bar{\varphi}_{k-1}(g_1, \dots, g_{k-1}) + 1} \right).$$

Тоді виконується нерівність

$$\begin{aligned} \lambda(A_{k+1}^1) &= \sum_{g_1=1}^{\infty} \dots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \sum_{g_k=1}^{\infty} \left(\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1} g_k}^{\bar{P}} \right| \frac{1}{\bar{\varphi}_k + 1} \right) \\ &\leq \sum_{g_1=1}^{\infty} \dots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \sum_{g_k=1}^{\infty} \left(\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1} g_k}^{\bar{P}} \right| \frac{1}{\bar{\varphi}_{k-1} + g_k + 1} \right) \\ &= \sum_{g_1=1}^{\infty} \dots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \sum_{g_k=1}^{\infty} \left(\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \frac{\bar{\varphi}_{k-1}}{(\bar{\varphi}_{k-1} + g_k - 1)(\bar{\varphi}_{k-1} + g_k)(\bar{\varphi}_{k-1} + g_k + 1)} \right). \end{aligned}$$

Знайдемо „внутрішню” суму для довільного фіксованого набору $g_1, \dots, g_{k-1}$:

$$\begin{aligned} &\sum_{g_k=1}^{\infty} \left(\left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \frac{\bar{\varphi}_{k-1}}{(\bar{\varphi}_{k-1} + g_k - 1)(\bar{\varphi}_{k-1} + g_k)(\bar{\varphi}_{k-1} + g_k + 1)} \right) \\ &= \left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \bar{\varphi}_{k-1} \sum_{g_k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(\bar{\varphi}_{k-1} + g_k - 1)(\bar{\varphi}_{k-1} + g_k)(\bar{\varphi}_{k-1} + g_k + 1)} \right) \\ &= \left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \bar{\varphi}_{k-1} \frac{1}{2\bar{\varphi}_{k-1}(\bar{\varphi}_{k-1} + 1)} = \frac{1}{2} \left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \frac{1}{\bar{\varphi}_{k-1} + 1}. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо нерівність

$$\lambda(A_{k+1}^1) \leq \sum_{g_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{g_{k-1}=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left| \Delta_{g_1 \dots g_{k-1}}^{\bar{P}} \right| \frac{1}{\bar{\varphi}_{k-1} + 1} \right) = \frac{1}{2} \lambda(A_k^1).$$

Теорема 5. Нехай $\bar{P}$ -зображення таке, що, починаючи з деякого номера n_0 , для всіх $k \geq n_0$ нерівність $\bar{\varphi}_k(g_1, \dots, g_k) \geq \bar{\varphi}_{k-1}(g_1, \dots, g_{k-1}) + g_k$ виконується для довільного набору $g_1, \dots, g_k$. Тоді для кожного $i \in \mathbb{N}$ рівність $g_n(x) = i$ для майже всіх $x \in (0; 1]$ справджується для скінченної кількості номерів n .

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Тоді

$$\begin{aligned} \lambda(A_{k+1}^i) &\leq \lambda(A_{k+1}^1) \leq \frac{1}{2} \lambda(A_k^1), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k^i) &= \sum_{k=1}^{n_0} \lambda(A_k^i) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_{n_0+k}^i) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_0} \lambda(A_k^i) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \lambda(A_{n_0}^1) \right) = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda(A_k^i) + \lambda(A_{n_0}^1). \end{aligned}$$

Отже, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k^i)$ збіжний, а тому $\lambda(A^i) = 0$. Таким чином, для кожного $i \in \mathbb{N}$ рівність $g_n(x) = i$ для майже всіх $x \in (0; 1]$ виконується для скінченної кількості номерів n .

Наслідок 3. Якщо $\bar{\varphi}_n = \bar{\varphi}_{n-1} + g_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто $\bar{P}$ -зображення є різницевою формою зображення чисел модифікованими рядами Енгеля, то для кожного $i \in \mathbb{N}$ рівність $g_n(x) = i$ справджується для скінченної кількості номерів n для майже всіх $x \in (0; 1]$.

Наслідок 4. Якщо $\bar{\varphi}_n = (\bar{\varphi}_{n-1} + g_n - 1)(\bar{\varphi}_{n-1} + g_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто $\bar{P}$ -зображення є різницевою формою зображення чисел рядами Сильвестера, то для кожного $i \in \mathbb{N}$ рівність $g_n(x) = i$ справджується для скінченної кількості номерів n для майже всіх $x \in (0; 1]$.

3. Нормальні властивості чисел, що пов'язані з асимптотичною частотою цифр у їхньому $\bar{P}$ -зображенні. Нехай $x = \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^{\bar{P}}$. Через $N_i^{\bar{P}}(x, k)$ позначимо кількість номерів n таких, що $g_n = i$ та $n \leq k$.

Означення 7. Якщо для числа x існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_i^{\bar{P}}(x, k)}{k} = \nu_i^{\bar{P}}(x),$$

то число $\nu_i^{\bar{P}}(x)$ називають асимптотичною частотою цифри i в $\bar{P}$ -зображенні числа x .

Якщо цифра i зустрічається скінченну кількість разів у $\bar{P}$ -зображенні числа x , то $\nu_i^{\bar{P}}(x) = 0$. Тому цікавим є лише той випадок, коли цифра i в $\bar{P}$ -зображенні числа зустрічається нескінченну кількість разів.

Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, де $\Omega = (0; 1]$, $\mathcal{F}$ — σ -алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини Ω , λ — міра Лебега.

Нехай випадкові величини ξ_k^i такі, що

$$\xi_k^i(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } g_k(x) \neq i, \\ 1, & \text{якщо } g_k(x) = i. \end{cases}$$

Лема 6. Нехай $\bar{P}$ -зображення таке, що, починаючи з деякого номера n_0 , $\bar{\varphi}_k = \text{const}$ для всіх $k \geq n_0$. Тоді для послідовності випадкових величин $\{\xi_k^i, k \geq n_0 + 1\}$ виконується посилений закон великих чисел.

Доведення. З теореми 3 випливає, що випадкові величини ξ_k^i незалежні в сукупності. Тоді, згідно з теоремою Колмогорова про посилений закон великих чисел, достатньо показати, що $D\xi_k^i < \infty$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_{n+n_0}^i}{n^2}$ є збіжним.

Зрозуміло, що математичне сподівання $M\xi_k^i$ випадкової величини ξ_k^i обчислюється за формулою $M\xi_k^i = \lambda(A_k^i)$. Звідси безпосередньо випливає, що для дисперсії $D\xi_k^i$ випадкової величини ξ_k^i має місце співвідношення

$$D\xi_k^i = \lambda(A_k^i)(1 - \lambda(A_k^i)) < 1 < \infty.$$

Як наслідок, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_{n+n_0}^i}{n^2}$ є збіжним.

Отже, для послідовності випадкових величин $\{\xi_k^i, k \geq n_0 + 1\}$ виконується посилений закон великих чисел.

Теорема 6. Нехай $\bar{P}$ -зображення таке, що, починаючи з деякого номера n_0 , $\bar{\varphi}_k = \text{const}$ для всіх $k \geq n_0$. Тоді якщо існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{n=n_0}^{k-1} \frac{\bar{\varphi}_n}{(\bar{\varphi}_n + i - 1)(\bar{\varphi}_n + i)} \right) = \nu_i, \quad (7)$$

то для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ існує, до того ж одна й та ж сама, асимптотична частота цифри i , що дорівнює ν_i .

Доведення. Для випадкових величин $\{\xi_k^i, k \geq n_0 + 1\}$ виконується посилений закон великих чисел, тобто для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{n=n_0+1}^k \xi_n^i(x)}{k - n_0} - \frac{M\left(\sum_{n=n_0+1}^k \xi_n^i\right)}{k - n_0} \right) = 0.$$

Оскільки

$$\sum_{n=n_0+1}^k \xi_n^i(x) = N_i^{\bar{P}}(x, k) - N_i^{\bar{P}}(x, n_0)$$

і

$$M\left(\sum_{n=n_0+1}^k \xi_n^i\right) = \sum_{n=n_0+1}^k M\xi_n^i = \sum_{n=n_0+1}^k \lambda(A_n^i) = \sum_{n=n_0}^{k-1} \frac{\bar{\varphi}_n}{(\bar{\varphi}_n + i - 1)(\bar{\varphi}_n + i)},$$

то цю границю можна записати таким чином:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{N_i^{\bar{P}}(x, k)}{k - n_0} - \frac{N_i^{\bar{P}}(x, n_0)}{k - n_0} - \frac{1}{k - n_0} \sum_{n=n_0}^{k-1} \frac{\bar{\varphi}_n}{(\bar{\varphi}_n + i - 1)(\bar{\varphi}_n + i)} \right) = 0.$$

Зрозуміло, що $\frac{N_i^{\bar{P}}(x, n_0)}{k - n_0} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а заміна знаменника $k - n_0$ на k не впливає на значення границі. Тому для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{N_i^{\bar{P}}(x, k)}{k} - \frac{1}{k} \sum_{n=n_0}^{k-1} \frac{\bar{\varphi}_n}{(\bar{\varphi}_n + i - 1)(\bar{\varphi}_n + i)} \right) = 0.$$

Тоді, якщо існує границя (7), для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ справджується рівність

$$\nu_i^{\bar{P}}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_i^{\bar{P}}(x, k)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{n=n_0}^{k-1} \frac{\bar{\varphi}_n}{(\bar{\varphi}_n + i - 1)(\bar{\varphi}_n + i)} \right) = \nu_i.$$

Наслідок 5. Нехай $\bar{P}$ -зображення таке, що, починаючи з деякого номера n_0 , $\bar{\varphi}_k = \text{const}$ для всіх $k \geq n_0$. Тоді якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_k = \infty$, то для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ і кожного $i \in \mathbb{N}$ справджується рівність $\nu_i^{\bar{P}}(x) = 0$.

Доведення. З теореми Штольца випливає, що для того, щоб існувала границя (7), достатньо, щоб існувала границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{\varphi}_k}{(\bar{\varphi}_k + i - 1)(\bar{\varphi}_k + i)}$. При цьому ці границі будуть рівними між собою. Тому якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_k = \infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{\varphi}_k}{(\bar{\varphi}_k + i - 1)(\bar{\varphi}_k + i)} = 0$ для кожного натурального i . Звідси випливає, що для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ і кожного $i \in \mathbb{N}$ має місце рівність $\nu_i^{\bar{P}}(x) = 0$.

Зауваження 2. Нехай $\bar{P}$ -зображення таке, що, починаючи з деякого номера n_0 , $\bar{\varphi}_k = \text{const}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_k = \infty$ для всіх $k \geq n_0$, але при цьому ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\bar{\varphi}_k}$ розбіжний. Тоді для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ кожна цифра i зустрічається нескінченну кількість разів у $\bar{P}$ -зображенні числа x , але при цьому має нульову асимптотичну частоту.

Наслідок 6. Якщо функції $\bar{\varphi}_k$ такі, що починаючи з деякого номера, $\bar{\varphi}_k \equiv r$, то для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ і кожного $i \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$\nu_i^{\bar{P}}(x) = \frac{r}{(r + i - 1)(r + i)}.$$

Наслідок 7. Якщо $\bar{\varphi}_k \equiv 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, тобто $\bar{P}$ -зображення є різницевою формою зображення чисел рядами Люрота, то для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ та кожного $i \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$\nu_i^{\bar{P}}(x) = \frac{1}{i(i + 1)}.$$

Означення 8. Нехай $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів деякої множини X , a^* — деякий елемент цієї множини, $N_{a^*}(k)$ — кількість номерів $n \leq k$ таких, що $a_n = a^*$. Якщо для послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ та елемента a^* існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_{a^*}(k)}{k} = \theta(a^*),$$

то число $\theta(a^*)$ називатимемо асимптотичною частотою елемента a^* в послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 7. Нехай функції $\bar{\varphi}_k$ такі, що, починаючи з деякого номера k_0 , їхні значення залежать тільки від номера k , $\theta(n)$ — асимптотична частота числа $n \in \mathbb{N}$ в послідовності $(\bar{\varphi}'_k)_{k=1}^{\infty}$, де $\bar{\varphi}'_k = \bar{\varphi}_{k+k_0-1}$, до того ж $\sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) = 1$. Тоді для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ та кожного $i \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$\nu_i^{\bar{P}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\theta(n) \frac{n}{(n + i - 1)(n + i)} \right).$$

Доведення. Згідно з теоремою 6, якщо існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{m=k_0}^{k-1} \frac{\bar{\varphi}_m}{(\bar{\varphi}_m + i - 1)(\bar{\varphi}_m + i)} \right) = \nu_i,$$

то для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ існує, до того ж одна й та ж сама, асимптотична частота цифри i , що дорівнює ν_i . Нехай послідовність $(\bar{\varphi}'_k)_{k=1}^\infty$ така, що для кожного числа $n \in \mathbb{N}$ існує його асимптотична частота $\theta(n)$ в цій послідовності, а $N_n(k)$ — кількість разів, які число n зустрічається в цій послідовності до k -го місця включно. Тоді одночасно існують та рівні (або не існують) такі границі:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{m=k_0}^{k-1} \frac{\bar{\varphi}_m}{(\bar{\varphi}_m + i - 1)(\bar{\varphi}_m + i)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \frac{\bar{\varphi}'_m}{(\bar{\varphi}'_m + i - 1)(\bar{\varphi}'_m + i)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^\infty N_n(k) \frac{n}{(n + i - 1)(n + i)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^\infty \frac{N_n(k)}{k} \frac{n}{(n + i - 1)(n + i)}. \end{aligned}$$

Покажемо, що остання границя існує, до того ж справджується рівність

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^\infty \frac{N_n(k)}{k} \frac{n}{(n + i - 1)(n + i)} = \sum_{n=1}^\infty \theta(n) \frac{n}{(n + i - 1)(n + i)}.$$

Звідси безпосередньо буде випливати існування границі (7).

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^\infty \theta(n)$ збіжний, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $t \in \mathbb{N}$, що

$$\sum_{n=t+1}^\infty \theta(n) < \varepsilon.$$

Оскільки $\theta(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_n(k)}{k}$, то існує таке $K > t$, що для всіх $k \geq K$ та всіх $n \leq t$ виконується нерівність

$$\left| \theta(n) - \frac{N_n(k)}{k} \right| < \frac{\varepsilon}{t}.$$

Тоді для всіх $k \geq K$ маємо

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n=1}^k \theta(n) \frac{n}{(n + i - 1)(n + i)} - \sum_{n=1}^\infty \frac{N_n(k)}{k} \frac{n}{(n + i - 1)(n + i)} \right| \\ &< \sum_{n=1}^t \left| \theta(n) - \frac{N_n(k)}{k} \right| \frac{n}{(n + i - 1)(n + i)} + \sum_{n=t+1}^k \theta(n) + \sum_{n=t+1}^\infty \frac{N_n(k)}{k} \\ &< \sum_{n=1}^t \left| \theta(n) - \frac{N_n(k)}{k} \right| + \varepsilon + \sum_{n=t+1}^\infty \frac{N_n(k)}{k} < \frac{\varepsilon}{t} t + \varepsilon + \sum_{n=t+1}^\infty \frac{N_n(k)}{k} \\ &= 2\varepsilon + \sum_{n=t+1}^\infty \frac{N_n(k)}{k}. \end{aligned}$$

Оцінимо значення суми $\sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{N_n(k)}{k}$. Оскільки для всіх $k \geq K$ і всіх $n \leq t$ виконується нерівність $\left| \theta(n) - \frac{N_n(k)}{k} \right| < \frac{\varepsilon}{t}$, то $\frac{N_n(k)}{k} > \theta(n) - \frac{\varepsilon}{t}$. Звідси випливає, що

$$\sum_{n=1}^t \frac{N_n(k)}{k} > \sum_{n=1}^t \theta(n) - \varepsilon.$$

Тоді

$$\sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{N_n(k)}{k} = 1 - \sum_{n=1}^t \frac{N_n(k)}{k} < 1 - \sum_{n=1}^t \theta(n) + \varepsilon = \sum_{n=t+1}^{\infty} \theta(n) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке K , що для кожного $k \geq K$ виконується нерівність

$$\left| \sum_{n=1}^k \theta(n) \frac{n}{(n+i-1)(n+i)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n(k)}{k} \frac{n}{(n+i-1)(n+i)} \right| < 4\varepsilon.$$

Оскільки, згідно з ознакою порівняння, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) \frac{n}{(n+i-1)(n+i)}$ збіжний, то з останньої нерівності випливає, що існує також границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n(k)}{k} \frac{n}{(n+i-1)(n+i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) \frac{n}{(n+i-1)(n+i)}.$$

Звідси безпосередньо випливає твердження теореми.

Лема 7. Нехай послідовність $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ елементів деякої множини періодична, починаючи з деякого номера k_0 , до того ж цей період складається з чисел $c_1, \dots, c_j$, що містяться в ньому $h_1, \dots, h_j$ разів відповідно. Тоді існує асимптотична частота елементів $c_1, \dots, c_j$ в даній послідовності, до того ж

$$\theta(c_n) = \frac{h_n}{h_1 + \dots + h_j}.$$

Доведення. Нехай $h = h_1 + \dots + h_j$, $k > k_0$, до того ж $k = (k_0 - 1) + hd + t$, де d — кількість повних періодів до номера k включно, $t \in \{0, \dots, h-1\}$. Тоді має місце така оцінка числа $N_{c_n}(k)$, де $N_{c_n}(k)$ — кількість чисел c_n в послідовності $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ до k -го місця включно:

$$N_{c_n}(k_0 - 1) + h_n d \leq N_{c_n}(k) \leq N_{c_n}(k_0 - 1) + h_n(d + 1).$$

Звідси випливає, що

$$\theta(c_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_{c_n}(k)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_n d}{k} = \frac{h_n}{h} = \frac{h_n}{h_1 + \dots + h_j}.$$

Наслідок 8. Нехай функції $\bar{\varphi}_k$ такі, що, починаючи з деякого номера n_0 , їхні значення залежать тільки від номера k . Також нехай послідовність $(\bar{\varphi}_k)_{k=n_0}^{\infty}$ періодична, починаючи з деякого номера, до того ж цей період складається з чисел $c_1, \dots, c_j$, що містяться в ньому $h_1, \dots, h_j$ разів відповідно. Тоді для майже всіх чисел $x \in (0; 1]$ та для кожної цифри i справджується рівність

$$\nu_i^{\bar{P}}(x) = \sum_{n=1}^j \left(\frac{h_n}{h_1 + \dots + h_j} \frac{c_n}{(c_n + i - 1)(c_n + i)} \right).$$

4. Приклади. Наведемо приклади кількох $\bar{P}$ -зображень, що відмінні від згаданих зображень рядами Енгеля, Люрота і Сильвестера, та визначимо їхні нормальні властивості згідно з доведеними вище теоремами.

Приклад 1. Нехай $\bar{P}$ -зображення таке, що $\bar{\varphi}_0 = 1$ і $\bar{\varphi}_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді у $\bar{P}$ -зображеннях майже всіх чисел з $(0; 1]$ кожна цифра зустрічається нескінченну кількість разів з нульовою асимптотичною частотою.

Приклад 2. Нехай $\bar{P}$ -зображення таке, що $\bar{\varphi}_0 = 1$ і $\bar{\varphi}_n = r^{g_1 + \dots + g_n}$, $r \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді у $\bar{P}$ -зображеннях майже всіх чисел з $(0; 1]$ кожна цифра зустрічається скінченну кількість разів.

Приклад 3. Нехай $\bar{P}$ -зображення таке, що $\bar{\varphi}_{3n} = 1$, $\bar{\varphi}_{3n+1} = 1$ і $\bar{\varphi}_{3n+2} = 2$, $n \geq 0$. Тоді у $\bar{P}$ -зображеннях майже всіх чисел з $(0; 1]$ кожна цифра зустрічається нескінченну кількість разів з асимптотичною частотою

$$\nu_i^{\bar{P}} = \frac{4}{3i(i+2)}.$$

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Б. І. Гетьман, *Порівняльний аналіз метричних теорій представлень чисел рядами Енгеля і Остроградського та ланцюговими дробами*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, Сер. 1, Фіз.-мат. науки, № 12, 130–139 (2011).
2. М. П. Мороз, *Зображення дійсних чисел рядами Перрона, їхня геометрія та деякі застосування*, Нелінійні коливання, **26**, № 2, 247–260 (2023).
3. М. В. Працьовитий, Б. І. Гетьман, *Ряди Енгеля та їх застосування*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, Сер. 1, Фіз.-мат. науки, № 7, 105–116 (2006).
4. А. Я. Хинчин, *Целые дроби*, Наука, Москва (1978).
5. О. Baranovskyi, M. Pratsiovytyi, *One class of continuous functions with complicated local properties related to Engel series*, Funct. Approx. Comment. Math. Adv. Publ., 1–20 (2022).
6. М. Ё. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Mat. Palermo (1884-1940), **27**, 247–271 (1909).
7. F. Engel, *Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen*, Verhandl. d. 52 Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Marburg, vol. 29, September bis 3. Oktober (1913), Leipzig, 190–191 (1914).
8. P. Erdős, A. Rényi, P. Szűsz, *On Engel's and Sylvester's series*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math., **1**, 7–32 (1958).
9. J. Lüroth, *Über eine eindeutige Entwicklung von Zahlen in eine unendliche Reihe*, Math. Ann., **21**, 411–423 (1883).
10. O. Perron, *Irrationalzahlen*, Walter de Gruyter & Co., Berlin (1960).
11. M. Pratsiovytyi, Yu. Khvorostina, *Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements*, Random Oper. and Stoch. Equat., **21**, № 4, 385–401 (2013).
12. M. V. Pratsiovytyi, Yu. V. Khvorostina, *A random variable whose digits in the $\tilde{L}$ -representation have the Markovian dependence*, Theor. Probab. and Math. Statist., № 91, 157–168 (2015).
13. A. Rényi, *A new approach to the theory of Engel's series*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math., **5**, 25–32 (1962).
14. J. J. Sylvester, *On a point in the theory of vulgar fractions*, Amer. J. Math., **3**, № 4, 332–335 (1880).
15. Yu. Zhykharyeva, M. Pratsiovytyi, *Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers*, Algebra and Discrete Math., **14**, № 1, 145–160 (2012).

Одержано 24.02.23