DOI: 10.37863/umzh.v75i7.7523

УДК 517.5

Анатолій Сердюк, Тетяна Степанюк[1] (Інститут математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ

We establish asymptotically unimprovable interpolation analogs of Lebesgue-type inequalities for 2π-periodic functions f that can be represented in the form of generalized Poisson integrals of functions φ from the space $L_p,\ 1\le p\le\infty$. In these inequalities, the moduli of deviations of the interpolation Lagrange polynomials $|f(x)-\tilde{S}_{n-1}(f;x)|$ for every $x\in\mathbb{R}$ are expressed via the best approximations $E_n(\varphi)_{L_p}$ of the functions φ by trigonometric polynomials in the L_p-metrics. We also deduce asymptotic equalities for the exact upper bounds of pointwise approximations of the generalized Poisson integrals of functions that belong to the unit balls in the spaces $L_p,\ 1\le p\le\infty$, by interpolating trigonometric polynomials on the classes $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$.

Встановлено асимптотично непокращувані інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега для 2π-періодичних функцій f, які зображуються узагальненими інтегралами Пуассона функцій φ з простору $L_p,\ 1\le p\le\infty$. В зазначених нерівностях модулі відхилень $|f(x)-\tilde{S}_{n-1}(f;x)|$ інтерполяційних поліномів Лагранжа при кожному $x\in\mathbb{R}$ оцінюються через найкращі наближення $E_n(\varphi)_{L_p}$ функцій φ тригонометричними поліномами в L_p-метриках. Знайдено також асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ узагальнених інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничним кулям просторів $L_p,\ 1\le p\le\infty$.

1. Вступ. Нехай $L_p,\ 1\le p<\infty$, — простір 2π-періодичних сумовних у p-му степені на $[0,2\pi)$ функцій f з нормою

$$\|f\|_{L_p}=\|f\|_p:=\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}};$$

L_∞ — простір вимірних і суттєво обмежених 2π-періодичних функцій f з нормою

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_t|f(t)|;$$

C — простір неперервних 2π-періодичних функцій f з нормою

$$\|f\|_C=\max_t|f(t)|.$$

Через $C^{\alpha,r}_\beta\mathfrak{N},\ \alpha>0,\ r>0,\ \mathfrak{N}\in L_1$, позначимо множину 2π-періодичних функцій $f(x)$, які при всіх $x\in\mathbb{R}$ можна зобразити у вигляді згортки

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt,\quad a_0\in\mathbb{R},\quad \varphi\in\mathfrak{N},\quad \varphi\perp 1, \tag{1}$$

з фіксованими ядрами вигляду

$$P_{\alpha,r,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\quad \alpha,r>0,\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

[1] Відповідальна за листування, e-mail: stepaniuk.tet@gmail.com.

Функцію f у рівності (1) називають узагальненим інтегралом Пуассона функції φ і позначають через $\mathcal{J}_\beta^{\alpha,r}\varphi$. З іншого боку, функцію φ у рівності (1) називають узагальненою похідною функції f і позначають через $f_\beta^{\alpha,r}$ (тобто $\varphi(\cdot) = f_\beta^{\alpha,r}(\cdot)$). Ядра $P_{\alpha,r,\beta}(\cdot)$ вигляду (2) називають узагальненими ядрами Пуассона.

Зрозуміло, що якщо для заданої функції φ виконується рівність (1), то ця ж рівність виконуватиметься і для довільної іншої функції з L_1, яка може відрізнятись від $\varphi(\cdot)$ на множині міри нуль. Тому далі рівність $\varphi = f_\beta^{\alpha,r}$ будемо розуміти в тому сенсі, що серед усіх похідних $f_\beta^{\alpha,r}$ є конкретна функція φ.

При довільних $r > 0$ множини $C_\beta^{\alpha,r}\mathfrak{N}$ належать до множини D^∞ нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій, тобто $C_\beta^{\alpha,r}\mathfrak{N} \subset D^\infty$ (див., наприклад, [19, с. 139; 23, с. 1408]). При $r = 1$ множини $C_\beta^{\alpha,r}\mathfrak{N}$ є множинами звичайних інтегралів Пуассона і складаються із функцій, що допускають регулярне продовження у смугу $|\operatorname{Im} z| < \alpha$ комплексної площини (див., наприклад, [19, с. 142]). При $r > 1$ класи $C_\beta^{\alpha,r}\mathfrak{N}$ складаються з функцій, регулярних в усій комплексній площині (див., наприклад, [19, с. 142]). Крім того, як випливає з теореми 1 роботи [24], при кожному $r > 0$ має місце вкладення $C_\beta^{\alpha,r}\mathfrak{N} \subset J_{1/r}$, де J_a, $a > 0$, — відомі класи Жевре

$$J_a = \left\{ f \in D^\infty : \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\|f^{(k)}\|_C}{(k!)^a} \right)^{1/k} < \infty \right\}.$$

Ми вивчаємо апроксимативні властивості множин узагальнених інтегралів Пуассона $C_\beta^{\alpha,r}\mathfrak{N}$, коли роль $\mathfrak{N}$ відіграють або всі простори C чи L_p, $1 \le p \le \infty$, або одиничні кулі просторів L_p, тобто множини $U_p = \{\varphi \in L_p : ||\varphi||_p \le 1\}$ (далі для зручності класи $C_\beta^{\alpha,r}U_p$ будемо позначати через $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$), а в якості агрегатів наближення використовують класичні інтерполяційні тригонометричні поліноми Лагранжа, що задані непарним числом рівномірно розподілених вузлів.

Для будь-якої функції $f(x)$ із C через $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у вузлах $x_k^{(n-1)} = \dfrac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-2. \tag{3}$$

Поліноми $\widetilde{S}_{n-1}(f;\cdot)$ однозначно задаються інтерполяційними умовами (3), називаються інтерполяційними поліномами Лагранжа і можуть бути зображені в явному вигляді через ядра Діріхле

$$D_{n-1}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos kt = \frac{\sin\left(n - \dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}$$

таким чином:

$$\tilde{S}_{n-1}(f;x) = \frac{2}{2n-1} \sum_{k=0}^{2n-2} f(x_k^{(n-1)}) D_{n-1}(x - x_k^{(n-1)}). \tag{4}$$

Нехай $\mathcal{T}_{2n-1}$ — простір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку $n-1$ і $E_n(f)_{L_p}$ — найкраще наближення функції $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, в L_p-метриці тригонометричними поліномами $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, тобто величина

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_p,$$

а $E_n(f)_C$ — найкраще рівномірне наближення функції $f \in C$ тригонометричними поліномами t_{n-1}, тобто величина

$$E_n(f)_C = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C.$$

Позначимо через $\tilde{\rho}_n(f;\cdot)$ відхилення від функції $f \in C$ її інтерполяційного полінома Лагранжа $\tilde{S}_{n-1}(f;\cdot)$:

$$\tilde{\rho}_n(f;x) = f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f;x). \tag{5}$$

Для модулів величин вигляду (5) виконується нерівність (див., наприклад, [2, 20])

$$\Big| f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f;x) \Big| \le (1 + \bar{L}_n(x)) E_n(f)_C, \quad f \in C, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

де

$$\bar{L}_n(x) = \frac{2}{2n-1} \sum_{k=0}^{2n-2} \Big| D_{n-1}(x - x_k^{(n-1)}) \Big|. \tag{7}$$

Нерівність (6) є інтерполяційним аналогом класичної нерівності Лебега, а функцію $\bar{L}_n(x)$ вигляду (7) називають функцією Лебега оператора $\tilde{S}_{n-1}$ вигляду (4).

Асимптотичну поведінку функції Лебега $\bar{L}_n(x)$ при $n \to \infty$ описує формула

$$\bar{L}_n(x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \ln n + \mathcal{O}(1), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

в якій $\mathcal{O}(1)$ — величина, що рівномірно обмежена по x і n.

З урахуванням (8) нерівність (6) можна записати у вигляді

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \le \left(\frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \ln n + \mathcal{O}(1) \right) E_n(f)_C, \quad f \in C, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Незважаючи на загальність, ця оцінка є асимптотично точною для кожного фіксованого $x \neq \dfrac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, на відомих класах W^r, $r \in \mathbb{N}$, 2π-періодичних функцій, що мають абсолютно неперервні похідні $f^{(k)}$ до $(r-1)$-го порядку включно і такі, що $\|f^{(r)}\|_\infty \le 1$. Цей факт випливає із роботи С. М. Нікольського [3], в якій на основі (9) при $r \in \mathbb{N}$ встановлено асимптотичну формулу

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(W^r_\infty; x) = \sup_{f \in W^r_\infty} \Big| f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f;x) \Big| = \frac{2K_r}{\pi} \frac{\ln n}{n^r} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^r} \right), \tag{10}$$

де $K_r = \dfrac{4}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{v(r+1)}}{(2v+1)^{r+1}}$ — константи Фавара, а величина $\mathcal{O}$ рівномірно обмежена по x і n.

Однак при подальшому збільшенні гладкості, зокрема для класів нескінченно диференційовних, аналітичних чи цілих функцій, оцінки відхилень $|\tilde{\rho}_n(f;x)|$, що базуються на використанні (6) (чи (9)), вже не є асимптотично точними і навіть можуть бути не точними за порядком.

Точні порядкові оцінки $\|\tilde{\rho}_n(f;x)\|_C$ на класах

$$C(\varepsilon) = \{f \in C\colon E_k(f)_C \le \varepsilon_k,\ \ k \in \mathbb{N}\}$$

і

$$L_p(\varepsilon) = \big\{f \in L_p\colon E_k(f)_{L_p} \le \varepsilon_k,\ \ k \in \mathbb{N}\big\}, \quad 1 < p < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{k^{1-\frac{1}{p}}} < \infty,$$

які задаються послідовностями $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ невід'ємних чисел, що монотонно прямують до нуля, було знайдено в роботах [4, 27].

У даній роботі для функцій з множин узагальнених інтегралів Пуассона $C^{\alpha,r}_{\beta} L_p$, $\alpha > 0$, $r \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, встановлено інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега, в яких оцінки зверху величин $|\tilde{\rho}_n(f;x)|$ виражаються через найкращі наближення $E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}$. Також в ній доведено асимптотичну непокращуваність отриманих нерівностей на множинах $C^{\alpha,r}_{\beta} L_p$. Слід зауважити, що при $p = \infty$ такі нерівності було встановлено в роботі [7] (теорема 3).

Крім того, в даній роботі при всіх $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \in (0,1)$, $1 \le p \le \infty$ розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для інтерполяційних поліномів Лагранжа $\tilde{S}_{n-1}(f;x)$ вигляду (4) на класах узагальнених інтегралів Пуассона, тобто встановлено асмиптотичні при $n \to \infty$ рівності для величин

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x) = \sup_{f \in C^{\alpha,r}_{\beta,p}} |\tilde{\rho}_n(f;x)|. \tag{11}$$

Зазначимо, що при $r \ge 1$, $1 \le p \le \infty$, асимптотичні рівності для зазначених величин було знайдено в роботах [5, 6, 8, 21].

У роботі [21] показано, що якщо $r = 1$, $p = \infty$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, то при $n \to \infty$ справджується асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,\infty};x) = e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{16}{\pi^2}\mathbf{K}(e^{-\alpha}) + \mathcal{O}(1)\frac{e^{-\alpha n}}{n(1-e^{-\alpha n})}\right), \tag{12}$$

в якій $\mathbf{K}(q) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$ — повний еліптичний інтеграл першого роду, а $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, x, α і β.

Як випливає з [6], для величин вигляду (11) при всіх $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку $r = 1$ і $1 < p \le \infty$ виконується асимптотична при $n \to \infty$ рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,p};x)$$
$$= e^{-\alpha n}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi}\|\cos t\|_{p'} F^{1/p'}\left(\frac{p'}{2},\frac{p'}{2};1;e^{-2\alpha}\right) + \mathcal{O}(1)\frac{e^{-\alpha}}{n(1-e^{-\alpha})^{s(p)}}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

в якій $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1,\ F(a,b;c;z)$ — гіпергеометрична функція Гаусса

$$F(a,b;c;z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!},$$

$$(y)_k:=y(y+1)(y+2)\ldots(y+k-1),$$

$s(p)$ задається формулою

$$s(p)=\begin{cases}1, & p=\infty,\\ 2, & 1\le p<\infty,\end{cases}$$

а у випадку $r=1$ і $p=1$ — рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,1};x)=e^{-\alpha n}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{1-e^{-\alpha}}+\mathcal{O}(1)\frac{e^{-\alpha}}{n(1-e^{-\alpha})^2}\right),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{14}$$

У формулах (13) і (14) величини $\mathcal{O}(1)$ рівномірно обмежені щодо параметрів $x,\ n,\ \beta,\ \alpha$ і p.

Оскільки при $p=\infty$ $(p'=1)$ $\|\cos t\|_{p'}=\|\cos t\|_1=4$ і

$$F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{p'}{2},\frac{p'}{2};1;e^{-2\alpha}\right)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;e^{-2\alpha}\right)=\frac{2}{\pi}\mathbf{K}(e^{-\alpha}),$$

то з (13) випливає (12).

Зауважимо також, що в роботі [9] для величини вигляду (11) при $r=1,\ p=2,\ \alpha>0,$ $\beta\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$ встановлено рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,2};x)$$
$$=e^{-\alpha n}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\frac{2}{\sqrt{\pi(1-e^{-2\alpha})}}\left(\frac{1+e^{-2\alpha(2n-1)}}{1-2e^{-2\alpha(2n-1)}\cos(2n-1)x+e^{-4\alpha(2n-1)}}\right)^{\frac{1}{2}},\quad x\in\mathbb{R}. \tag{15}$$

І навіть більше, як випливає з [9, 10], при $p=2$ та всіх $r>0,\ \alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$ для величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,2};x)$ справджується рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,2};x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sin^2\frac{(2n-1)mx}{2}\sum_{k=m(2n-1)-n+1}^{m(2n-1)+n-1}e^{-2\alpha k^r}\right)^{\frac{1}{2}},\quad x\in\mathbb{R}, \tag{16}$$

що є справедливою при всіх $\beta\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$.

У випадку $r>1$, як випливає з [6, 8], для величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x),\ \alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R}$ при $p=\infty$ має місце асимптотична при $n\to\infty$ рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty};x)$$
$$=e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi}+\mathcal{O}(1)\left(\frac{e^{2\alpha n^r}}{e^{2\alpha(n+1)^r}}+\left(1+\frac{1}{\alpha r(n+2)^{r-1}}\right)\frac{e^{\alpha n^r}}{e^{\alpha(n+1)^r}}\right)\right),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{17}$$

а при $1 \le p < \infty$ — рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x)$$
$$= e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi}\|\cos t\|_{p'} + \mathcal{O}(1)\left(1+\frac{1}{\alpha r(n+1)^{r-1}}\right)\frac{e^{\alpha n^r}}{e^{\alpha(n+1)^r}}\right), \quad x\in\mathbb{R}. \quad (18)$$

У формулах (17) і (18) величини $\mathcal{O}(1)$ рівномірно обмежені по $x,\ n,\ r,\ \alpha,\ \beta$ і p.

Зазначимо також, що в роботі [11] для класів $C^{\alpha,r}_{\beta,1},\ \alpha > 0,\ r > 1,\ \beta \in \mathbb{R}$, встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень інтерполяційних поліномів $\tilde{S}_{n-1}(f;\cdot)$ в довільних L_p-метриках ($1 \le p \le \infty$).

Що стосується випадку $0 < r < 1$, то асимптотичні рівності для величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x)$, $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$, за винятком наведеного вище випадку $p = 2$, були відомі лише при $p = \infty$ завдяки роботам [7, 22], з яких випливає, що при $n \to \infty$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty};x) = e^{-\alpha n}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}\ln n^{1-r} + \mathcal{O}(1)\right), \quad x\in\mathbb{R}, \quad (19)$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена по $x,\ n$ і β.

В даній роботі буде доведено, зокрема, що для довільних $0 < r < 1,\ \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ і $x \in \mathbb{R}$ при $1 < p < \infty$ та $n \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x)$$
$$= e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right) + \mathcal{O}(1)\frac{1}{n^{\min\{r,\frac{1-r}{p}\}}}\right), \quad (20)$$

де $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'} = 1,\ F(a,b;c;z)$ — гіпергеометрична функція Гаусса, $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена по $x,\ n$ і β, а при $p = 1$ — рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1};x) = e^{-\alpha n^r} n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi\alpha r} + \mathcal{O}(1)\frac{1}{n^{\min\{r,1-r\}}}\right). \quad (21)$$

При цьому в роботі в явному вигляді записано оцінки залишкового члена у формулах (20), (21) через параметри задачі, що може бути корисним для практичного застосування отриманих в ній результатів. Отже, на класах узагальнених інтегралів Пуассона $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ при всіх $\alpha > 0$, $r > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ і $1 \le p \le \infty$ повністю розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для інтерполяційних поліномів Лагранжа, яка полягає у встановленні для кожного $x \in \mathbb{R}$ сильної асимптотики величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x)$ вигляду (11) при $n \to \infty$.

Головний член A_n в асимптотичному розкладі величини (11), записаному у вигляді

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x) = e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|(A_n + o(A_n)),$$

природно назвати константою Колмогорова – Нікольського для інтерполяційних поліномів Лагранжа на класах $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$. У таблиці наведено точні значення зазначених констант в залежності від співвідношень між параметрами r і p.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">A_n</td><td colspan="3">$\boldsymbol{r}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{(0,1)}$</td><td>$\mathbf{1}$</td><td>$\mathbf{(1,\infty)}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\boldsymbol{p}$</td><td>∞</td><td>Степанець, Сердюк [22]
Сердюк [7]
$\dfrac{8}{\pi^2}(1-r)\ln n$</td><td>Степанець,
Сердюк [21]
$\dfrac{16}{\pi^2}\mathbf{K}(e^{-\alpha})$</td><td>Сердюк [5]
Степанець,
Сердюк [21]
$\dfrac{8}{\pi}$</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{(1,\infty)}$</td><td>**Результати авторів роботи**
$\boldsymbol{n^{\frac{1-r}{p}}\dfrac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}}$
$\boldsymbol{\times F^{\frac{1}{p'}}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3-p'}{2};\dfrac{3}{2};1\right)}$</td><td>Сердюк [6]
$\dfrac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi}$
$\times F^{\frac{1}{p'}}\left(\dfrac{p'}{2},\dfrac{p'}{2};1;e^{-2\alpha}\right)$</td><td>Сердюк,
Войтович [8]
$\dfrac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{1}$</td><td>**Результати авторів роботи**
$\boldsymbol{n^{1-r}\dfrac{2}{\pi\alpha r}}$</td><td>Сердюк [6]
$\dfrac{2}{\pi(1-e^{-\alpha})}$</td><td>Сердюк,
Войтович [8]
$\dfrac{2}{\pi}$</td></tr>
</table>

2. Нерівності типу Лебега для інтерполяційних поліномів Лагранжа на множинах узагальнених інтегралів Пуассона. При довільних фіксованих $\alpha > 0,\ r \in (0,1)$ і $1 \le p \le \infty$ позначимо через $n_* = n_*(\alpha, r, p)$ найменший з номерів n такий, що

$$\frac{\ln \pi n}{\alpha r n^r} + \frac{\alpha r \chi(p)}{n^{1-r}} \le \begin{cases} \dfrac{1}{14}, & p = 1, \\ \dfrac{1}{(3\pi)^3}\dfrac{p-1}{p}, & 1 < p < \infty, \\ \dfrac{1}{(3\pi)^3}, & p = \infty, \end{cases} \tag{22}$$

де $\chi(p) = p$ при $1 \le p < \infty$ і $\chi(p) = 1$ при $p = \infty$.

Теорема 2.1. *Нехай* $0 < r < 1,\ \alpha > 0,\ 1 < p < \infty,\ \beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді для всіх* $x \in \mathbb{R}$ *і довільної функції* $f \in C^{\alpha,r}_{\beta}L_p$ *при* $n \ge n_*(\alpha, r, p)$ *виконується нерівність*

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \le 2e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)\right.$$

$$\left. + \gamma^*_{n,p}\left(\left(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r}\right)\right) E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}. \tag{23}$$

Крім того, для довільної функції $f \in C^{\alpha,r}_{\beta}L_p$ *можна вказати функцію* $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(f;n;x,\cdot)$ *таку, що* $E_n(\mathcal{F}^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p} = E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}$ *і для* $n \ge n_*(\alpha, r, p)$ *справджується рівність*

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F};x)| = 2e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)\right.$$

$$+\gamma^*_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}+\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}n^r}\right)\Bigg)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_p}. \qquad (24)$$

В (23) *і* (24) *величини* $\gamma^*_{n,p}=\gamma^*_{n,p}(\alpha,r,\beta,f,x)$ *такі, що* $|\gamma^*_{n,p}|<20\pi^4$.

Доведення. Згідно з лемою 1 роботи [21], для довільної функції $f\in C^{\alpha,r}_\beta L_p,\ 1\le p\le\infty$, $\alpha>0,\ r>0,\ \beta\in\mathbb{R}$, у кожній точці $x\in\mathbb{R}$ має місце інтегральне зображення величини $\tilde\rho_n(f;x)$:

$$\tilde\rho_n(f;x)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t+x)\left(\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)+r_n(t)\right)dt, \qquad (25)$$

в якому $\delta_n(\tau)=f^{\alpha,r}_\beta(\tau)-t_{n-1}(\tau),\ t_{n-1}$ — довільний тригонометричний поліном із множини $\mathcal{T}_{2n-1}$, а r_n і γ_n означені за допомогою рівностей

$$r_n(t)=r_n(\alpha;r;\beta;x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty}e^{-\alpha\nu^r}\sin\left(\nu t+\left(k+\frac{1}{2}\right)(2n-1)x+\frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad (26)$$

$$\gamma_n=\gamma_n(\beta;x)=\frac{(2n-1)x+\pi(\beta-1)}{2}. \qquad (27)$$

Для знаходження оцінки зверху модуля залишкового члена $r_n(t)$ у формулі (25) буде корисним таке твердження.

Лема 2.1. *Нехай* $\alpha>0,\ r\in(0,1)$, *а номер* $n,\ n\in\mathbb{N}$, *такий, що виконується нерівність*

$$\frac{1}{\alpha r n^r}+\frac{\alpha r}{n^{r-1}}\le\frac{1}{14}. \qquad (28)$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{v=(2k+1)n-k}^{\infty}e^{-\alpha v^r}<\frac{636}{169}\frac{n^{1-r}}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}. \qquad (29)$$

Доведення леми 2.1 наведено у пункті 4 даної роботи.

Зіставивши нерівності (22) і (28), легко переконатись, що якщо $n\ge n_*(\alpha,r,p)$ при довільних фіксованих $\alpha>0,\ r\in(0,1)$ і $1\le p\le\infty$, то при вказаних $n,\ \alpha$ і r умова (28) також виконується, а разом з нею і нерівність (29).

Тому, з урахуванням (26) при $n\ge n_*(\alpha,r,p),\ 1\le p\le\infty$, одержуємо

$$|r_n(t)|\le\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{v=(2k+1)n-k}^{\infty}e^{-\alpha v^r}<\frac{636}{169}\frac{n^{1-r}}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}. \qquad (30)$$

Покажемо, що при довільних $n\ge n_*(\alpha,r,p),\ r\in(0,1),\ \alpha>0,\ 1\le p\le\infty$,

$$\frac{n^{1-r}}{\alpha r}<\frac{1}{\pi}e^{\alpha((3n-1)^r-n^r)}. \qquad (31)$$

Справді, на підставі (22)

$$\frac{\ln(\pi n)}{\alpha r n^r} \leq \frac{1}{14}, \quad \frac{n^{1-r}}{\alpha r} \geq 14, \tag{32}$$

а отже,

$$\frac{\ln \dfrac{\pi n}{\alpha r n^r}}{\alpha r n^r} < \frac{\ln \dfrac{\pi n}{\alpha r n^r} + \ln \alpha r n^r}{\alpha r n^r} = \frac{\ln \pi n}{\alpha r n^r} \leq \frac{1}{14},$$

звідки

$$\ln \frac{\pi n}{\alpha r n^r} \leq \frac{\alpha r n^r}{14},$$

або, що те саме,

$$\frac{\pi n}{\alpha r n^r} \leq e^{\frac{\alpha r n^r}{14}}. \tag{33}$$

Оскільки

$$\frac{r}{2^{1-r}} < 2^r - 1 < r, \quad r \in (0,1),$$

то

$$e^{\frac{\alpha r n^r}{14}} < e^{\frac{\alpha r n^r}{2^{1-r}}} < e^{\alpha n^r (2^r - 1)} \leq e^{\alpha n^r ((3 - \frac{1}{n})^r - 1)} = e^{\alpha((3n-1)^r - n^r)}. \tag{34}$$

Об'єднуючи (33) і (34), отримуємо (31).

Із (30) і (31) випливає оцінка для $|r_n(t)|$:

$$|r_n(t)| < \frac{636}{169\pi} e^{-\alpha n^r}, \quad n \geq n_*(\alpha, r, p), \quad \alpha > 0, \quad r \in (0,1), \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{35}$$

Беручи в (25) в якості t_{n-1} поліном t^*_{n-1} найкращого наближення у просторі L_p функції $f^{\alpha,r}_\beta(\cdot)$, тобто такий, що

$$\|f^{\alpha,r}_\beta - t^*_{n-1}\|_p = E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_p} = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f^{\alpha,r}_\beta - t_{n-1}\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{36}$$

і застосовуючи нерівність Гельдера

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h(t) g(t)| dt \leq \|h\|_p \|g\|_{p'}, \quad h \in L_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, g \in L_{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{37}$$

та оцінку (35), для довільної функції $f \in C^{\alpha,r}_\beta L_p$ при $n \geq n_*(\alpha, r, p)$ отримуємо

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \leq 2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{1}{\pi} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos(kt + \gamma_n) \right\|_{p'} + \theta_{n,p} e^{-\alpha n^r} \right) E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_p}, \tag{38}$$

де γ_n означена формулою (27), а для величини $\theta_{n,p} = \theta_{n,p}(\alpha, r, \beta, x)$ виконується оцінка $|\theta_{n,p}| < \dfrac{1272}{169\pi}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Із [13 – 15] випливає, що при довільних $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$ і $n \ge n_0(\alpha, r, p)$, де $n_0(\alpha, r, p)$ — найменший з номерів n, такий, що

$$\frac{1}{\alpha r n^r} + \frac{\alpha r \chi(p)}{n^{1-r}} \le \begin{cases} \dfrac{1}{14}, & p = 1, \\ \dfrac{1}{(3\pi)^3} \dfrac{p-1}{p}, & 1 < p < \infty, \\ \dfrac{1}{(3\pi)^3}, & p = \infty, \end{cases} \tag{39}$$

мають місце оцінки

$$\frac{1}{\pi} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos(kt + \xi) \right\|_{p'}$$
$$= e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) + \gamma_{n,p}^{(1)} \left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}} I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} \right) \right), \tag{40}$$

$$\frac{1}{\pi} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos(kt + \xi) - \lambda \right\|_{p'}$$
$$= e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) + \gamma_{n,p}^{(2)} \left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}} I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} \right) \right), \tag{41}$$

в яких $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1,\ I_s(v) := \left\| \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right\|_{L_s[0,v]}$,

$$I_s(v) := \left\| \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right\|_{L_s[0,v]} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^v \left| \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right|^s dt \right)^{\frac{1}{s}}, & 1 \le s < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,v]} \left| \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right|, & s = \infty, \end{cases} \tag{42}$$

а для величин $\gamma_{n,p}^{(i)} = \gamma_{n,p}^{(i)}(\alpha, r, \xi),\ i = 1, 2,$ виконуються нерівності $|\gamma_{n,p}^{(i)}| \le (14\pi)^2$.

Враховуючи, що згідно з (22) і (39) $n_0(\alpha, r, p) \le n_*(\alpha, r, p)$, то, застосовуючи формулу (40) при $\xi = \gamma_n$, де γ_n означена формулою (27), із (37) і (38) при $n \ge n_*(\alpha, r, p)$ отримуємо

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \le 2e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma_{n,p}^{(1)}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}} I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) \frac{1}{n^r} + \left(\gamma_{n,p}^{(1)} + \theta_{n,p}\right) \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} \right) E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{43}$$

Як встановлено в [15], при $1 < p < \infty$ і $n \geq n_0(\alpha, r, p)$

$$I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) = F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1\right) + \frac{\Theta^{(1)}_{\alpha,r,p,n}}{p'-1}\left(\frac{\alpha r}{\pi n^{1-r}}\right)^{p'-1}, \tag{44}$$

де $|\Theta^{(1)}_{\alpha,r,p,n}| < 2$, і, крім того,

$$I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) < p^{\frac{1}{p'}}. \tag{45}$$

Із (44), (45), а також з очевидної нерівності

$$\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} > \frac{1}{n^{(1-r)(p'-1)}}$$

випливає, що при $n \geq n_0(\alpha, r, p),\ 1 < p < \infty,\ \xi \in \mathbb{R}$ співвідношення (40) і (41) приводять до оцінок

$$\frac{1}{\pi}\left\|\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)\right\|_{p'} = e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)\right.$$
$$\left. + \bar{\gamma}^{(1)}_{n,p}\left(\left(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r}\right)\right), \tag{46}$$

$$\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi) - \lambda\right\|_{p'} = e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)\right.$$
$$\left. + \bar{\gamma}^{(2)}_{n,p}\left(\left(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r}\right)\right), \tag{47}$$

де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, а для величин $\bar{\gamma}^{(i)}_{n,p} = \bar{\gamma}^{(i)}_{n,p}(\alpha, r, \xi)$ виконуються нерівності $|\bar{\gamma}^{(i)}_{n,p}| \leq (14\pi)^2$.

Застосовуючи формулу (46) при $\xi = \gamma_n$, де γ_n означена рівністю (27), і враховуючи, що $n_0(\alpha, r, p) \geq n_*(\alpha, r, p)$, із (35) при $n \geq n_*(\alpha, r, p),\ 1 < p < \infty$, маємо

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \leq 2e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)\right.$$
$$\left. + \left(\bar{\gamma}^{(1)}_{n,p}\left(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right) + \theta_{n,p}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \bar{\gamma}^{(1)}_{n,p}\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r}\right) E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}. \tag{48}$$

Оскільки $|\bar{\gamma}^{(1)}_{n,p} + \theta_{n,p}| < 20\pi^4$, то з (48) випливає оцінка (23).

Далі доведемо справедливість другої частини теореми 2.1. Використовуючи інтегральне зображення (25) та беручи до уваги ортогональність функції $r_n(t)$ вигляду (26) до будь-якого тригонометричного полінома $t_n \in \mathcal{T}_{2n-1}$, для довільної функції $f \in C^{\alpha,r}_{\beta} L_p$, $1 \le p \le \infty$, в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ можемо записати

$$\tilde{\rho}_n(f;x) = f(x) - \tilde{S}_n(f;x)$$

$$= 2\sin\frac{2n-1}{2}x \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\alpha,r}_{\beta}(t+x)\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t+x)r_n(t)dt \right), \tag{49}$$

де $\delta_n(\cdot) = f^{\alpha,r}_{\beta}(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)$, t_{n-1} — довільний поліном з $\mathcal{T}_{2n-1}$, а $r_n(t)$ і $\gamma_n = \gamma_n(\beta;x)$ означені за допомогою рівностей (26) та (27) відповідно. Для функції

$$g_x(\cdot) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\alpha,r}_{\beta}(t+x)\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt, \tag{50}$$

яка належить множині $C^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi} L_p$, при фіксованому $x \in \mathbb{R}$ відхилення її частинних сум Фур'є $S_{n-1}(g_x,\cdot)$ порядку $n-1$ підпорядковані рівності

$$\rho(g_x;\cdot) = g_x(\cdot) - S_{n-1}(g_x,\cdot) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\alpha,r}_{\beta}(t+\cdot)\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt, \tag{51}$$

і, зокрема,

$$\rho(g_x;x) = g_x(x) - S_{n-1}(g_x,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\alpha,r}_{\beta}(t+x)\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt. \tag{52}$$

У відповідності з теоремою 1 роботи [16] для функції $g_x(\cdot)$ при кожному $n \in \mathbb{N}$ знайдеться функція $G(\cdot) = G(f;n;x;\cdot)$ така, що

$$E_n(G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi})_{L_p} = E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}, \quad 1 < p < \infty, \tag{53}$$

і при $n \ge n_0(\alpha,r,p)$

$$\|\rho_n(G;\cdot)\|_C = \|f(x) - S_n(f;x)\|_C$$

$$= e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right) \right.$$

$$\left. + \gamma_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r}\right)\right) E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}, \tag{54}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

де $\gamma_{n,p}=\gamma_{n,p}(\alpha,r,\beta,x)$ підпорядкована нерівності $|\gamma_{n,p}|\le(14\pi)^2$.

Виберемо точку x_0 таким чином, щоб справджувалась рівність

$$|\rho_n(G;x_0)|=\|\rho_n(G;\cdot)\|_C. \tag{55}$$

Покладемо

$$\mathcal{F}(t):=\mathcal{J}_\beta^{\alpha,r}G_{2\gamma_n/\pi}^{\alpha,r}(t-x+x_0). \tag{56}$$

За означенням $\mathcal{F}(t)\in C_\beta^{\alpha,r}L_p$. Покажемо, що вона є шуканою функцією. Справді, оскільки згідно з (56) $\mathcal{F}_\beta^{\alpha,r}(t)=G_{2\gamma_n/\pi}^{\alpha,r}(t-x+x_0)$, то з урахуванням (54) та інваріантності L_p-норми щодо зсуву аргументу отримуємо

$$E_n(\mathcal{F}_\beta^{\alpha,r})_{L_p}=E_n(G_{2\gamma_n/\pi}^{\alpha,r})_{L_p}=E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p},\ 1<p<\infty. \tag{57}$$

Крім того, на підставі (49), (53) – (55), (30) і (38) для довільного заданого значення аргументу $x\in\mathbb{R}$ при $n\ge n_*(\alpha,r,p)$ маємо

$$|\tilde\rho_n(\mathcal{F};x)|$$

$$=2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}G_{2\gamma_n/\pi}^{\alpha,r}(x_0+t)\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt\right|+\theta_{n,p}e^{-\alpha n^r}E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p}\right)$$

$$=2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Big(|\rho_n(G;x_0)|+\theta_{n,p}e^{-\alpha n^r}E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p}\Big)$$

$$=2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Big(\|\rho_n(G;\cdot)\|_C+\theta_{n,p}e^{-\alpha n^r}E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p}\Big)$$

$$=2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right)\right.$$

$$\left.+\gamma_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}+\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}n^r}\right)+\frac{\theta_{n,p}}{n^{\frac{1-r}{p}}}\right)E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p}, \tag{58}$$

де для величин $\gamma_{n,p}$ і $\theta_{n,p}$ виконуються оцінки $|\gamma_{n,p}|\le(14\pi)^2$, $|\theta_{n,p}|<\dfrac{1272}{169\pi}$ і $|\theta_{n,p}+\gamma_{n,p}|<20\pi^4$. Із рівностей (58) випливає (24).

Теорему 2.1 доведено.

Теорема 2.2. *Нехай* $0<r<1$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ *і* $n\in\mathbb{N}$. *Тоді для будь-якого* $x\in\mathbb{R}$ *і довільної функції* $f\in C_\beta^{\alpha,r}L_1$ *при* $n\ge n_*(\alpha,r,1)$ *виконується нерівність*

$$|\tilde\rho_n(f;x)|\le 2e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{1}{\pi\alpha r}+\gamma_{n,1}^*\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{1-r}}\right)\right)E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_1}. \tag{59}$$

Крім того, для довільної функції $f\in C_\beta^{\alpha,r}L_1$ *можна вказати функцію* $\mathcal{F}(\cdot)=\mathcal{F}(f;n;x,\cdot)$ *з множини* $C_\beta^{\alpha,r}L_1$ *таку, що* $E_n(\mathcal{F}_\beta^{\alpha,r})_{L_1}=E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_1}$ *і при* $n\ge n_*(\alpha,r,1)$ *справджується рівність*

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F};x)| = 2e^{-\alpha n^r} n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{1}{\pi\alpha r} + \gamma^*_{n,1}\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}}\right)\right)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}. \quad (60)$$

В (59) *і* (60) *величини* $\gamma^*_{n,1} = \gamma^*_{n,1}(\alpha,r,\beta,f,x)$ *такі, що* $|\gamma^*_{n,1}| < 20\pi^4$.

Доведення. Для встановлення нерівності (59) використаємо формулу (43) при $p=1$, згідно з якою при довільних $x\in\mathbb{R},\ f\in C^{\alpha,r}_\beta L_1$ і $n\ge n_*(\alpha,r,1)$

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \le 2e^{-\alpha n^r} n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{\|\cos t\|_\infty}{\pi\alpha r}\left\|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right\|_{L_\infty[0,\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}]}\right.$$
$$\left. + \frac{\gamma^{(1)}_{n,1}}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}\left\|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right\|_{L_\infty[0,\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}]} + (\gamma^{(1)}_{n,1}+\theta_{n,1})\frac{1}{n^{1-r}}\right)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}$$
$$= 2e^{-\alpha n^r} n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{1}{\pi\alpha r} + \frac{\gamma^{(1)}_{n,1}}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r} + (\gamma^{(1)}_{n,1}+\theta_{n,1})\frac{1}{n^{1-r}}\right)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}, \quad (61)$$

де $|\gamma_{n,1}| \le (14\pi)^2,\ |\theta_{n,1}| < \dfrac{1272}{169\pi}$. Оскільки $|\gamma^{(1)}_{n,1}+\theta_{n,1}| < 20\pi^4$, то з (61) випливає оцінка (59).

Доведемо другу частину теореми 2.2. Для довільної $f\in C^{\alpha,r}_\beta L_1$ і довільного фіксованого $x\in\mathbb{R}$ має місце рівність (49), в якій $f^{\alpha,r}_\beta \in L_1$. Розглянемо функцію $g_x(\cdot)$ вигляду (50), що належить множині $C^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi}L_1$. Для відхилень частинних сум Фур'є $S_{n-1}(g_x;\cdot)$ порядку $n-1$ від функції $g_x(\cdot)$ виконується рівність (51) (а отже, і (52)). Відповідно до теореми 2 роботи [16] для функції $g_x(\cdot)$ при кожному $n\in\mathbb{N}$ знайдеться функція $G(\cdot)=G(f,n;x;\cdot)$ така, що

$$E_n(G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi})_{L_1} = E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1} \quad (62)$$

і при $n\ge n_0(\alpha,r,1)$

$$\|\rho_n(G,\cdot)\|_C = \|G(\cdot)-S_{n-1}(G;\cdot)\|_C$$
$$= e^{-\alpha n^r} n^{1-r}\left(\frac{1}{\pi\alpha r} + \gamma_{n,1}\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{1-r}}\right)\right)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}, \quad (63)$$

де $\gamma_{n,1}=\gamma_{n,1}(\alpha,r,\beta,x)$ підпорядкована умові $|\gamma_{n,1}|\le(14\pi)^2$.

Виберемо точку x_0 таким чином, щоб виконувалась рівність (55). Розглянемо функцію $\mathcal{F}(t)$, означену рівністю (56), яка належить множині $C^{\alpha,r}_\beta L_1$, і покажемо, що ця функція є шуканою. Для функції $\mathcal{F}(t)$ з урахуванням формул (62), (56) та інваріантності L_1-норми щодо зсуву аргументу маємо

$$E_n(\mathcal{F}^{\alpha,r}_\beta)_{L_1} = E_n(G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi})_{L_1} = E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}. \quad (64)$$

Крім того, на підставі (49), (62), (63), (55), (35) і (37) для довільного заданого значення аргументу $x\in\mathbb{R}$ при $n\ge n_*(\alpha,r,1)$ отримуємо

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F};x)| &= 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \\
&\quad\times\left(\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi}(x_0+t)\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt\right| + \theta_{n,1}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}\right) \\
&= 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Big(|\rho_n(G,x_0)| + \theta_{n,1}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}\Big) \\
&= 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Big(\|\rho_n(G,\cdot)\|_C + \theta_{n,1}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}\Big) \\
&= 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left(\frac{1}{\pi\alpha r} + \gamma_{n,1}\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}}\right) + \frac{\theta_{n,1}}{n^{1-r}}\right)E_n(\varphi)_{L_1},
\end{aligned}
\tag{65}
$$

де для величин $\gamma_{n,1}$ і $\theta_{n,1}$ виконуються оцінки $|\gamma_{n,1}| \le (14\pi)^2$, $|\theta_{n,1}| < \dfrac{1272}{169\pi}$ і $|\gamma_{n,1}+\theta_{n,1}| < 20\pi^4$. Із рівності (65) випливає (60).

Теорему 2.2 доведено.

Теорема 2.3. *Нехай $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ і довільної функції $f \in C^{\alpha,r}_\beta L_\infty$ при $p = \infty$ і $n \ge n_*(\alpha, r, \infty)$ виконується нерівність*

$$
|\tilde{\rho}_n(f;x)| \le 2e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r} + \gamma^*_{n,\infty}\right)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_\infty}, \tag{66}
$$

де для величини $\gamma^*_{n,\infty}(\alpha,r,\beta,x)$ має місце оцінка $|\gamma^*_{n,\infty}| < 20\pi^4$.

Крім того, для довільної функції $f \in C^{\alpha,r}_\beta C$ можна вказати функцію $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f;n;x;\cdot)$ з множини $C^{\alpha,r}_\beta C$ таку, що $E_n(\mathcal{F}^{\alpha,r}_\beta)_C = E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C$ і для $n \ge n_*(\alpha,r,\infty)$ виконується рівність

$$
|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F};x)| = 2e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r} + \gamma^{**}_{n,\infty}\right)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C. \tag{67}
$$

У формулі (67) *для величини $\gamma^{**}_{n,\infty} = \gamma^{**}_{n,\infty}(\alpha,r,\beta,f,x)$ має місце оцінка $|\gamma^{**}_{n,\infty}| < 1951$.*

Зрозуміло, що якщо в умовах теореми 2.3 $f \in C^{\alpha,r}_\beta C$, то в нерівності (66) величину $E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_\infty}$ можна замінити на $E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C$.

Доведення. Для встановлення нерівності (66) скористаємось оцінкою (43) при $p = \infty$, а також оцінкою (див. формулу (112) із [14])

$$
I_1\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r} + \Theta_{\alpha,r,n}, \quad 0 < \Theta_{\alpha,r,n} < 1, \tag{68}
$$

де $I_1(v)$ означена формулою (42) при $s = p' = 1$.

Отже, як випливає з (43) і (68), при $n \ge n_*(\alpha,r,\infty)$ для довільної функції $f \in C^{\alpha,r}_\beta L_\infty$ отримуємо

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \leq 2e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Bigg(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\frac{4}{\pi^2}\Theta_{\alpha,r,n}$$
$$+\gamma_{n,\infty}^{(1)}\left(\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\Theta_{\alpha,r,n}\right)\frac{1}{\alpha r n^r}+\gamma_{n,\infty}^{(1)}+\theta_{n,\infty}\Bigg)E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_\infty}. \qquad (69)$$

Оскільки при $n \geq n_*(\alpha, r, \infty)$

$$\frac{4}{\pi^2}(\ln\pi+\Theta_{\alpha,r,n})+|\gamma_{n,\infty}^{(1)}|\left(\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\Theta_{\alpha,r,n}\right)\frac{1}{\alpha r n^r}+|\gamma_{n,\infty}^{(1)}+\theta_{n,\infty}|$$
$$<\frac{4(1+\ln\pi)}{\pi^2}+\frac{2(14\pi)^2}{(3\pi)^3}+(14\pi)^2+\frac{1272}{169\pi}<20\pi^4, \qquad (70)$$

то з (69) і (70) випливає оцінка (66).

Доведемо другу частину теореми 2.3. Для довільної функції $f \in C_\beta^{\alpha,r}C$ і будь-якого фіксованого значення $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність (49), в якій $f_\beta^{\alpha,r} \in C$. Розглянемо функцію $g_x(\cdot)$ вигляду (50) з множини $C_{2\gamma_n/\pi}^{\alpha,r}C$. Для відхилень $\rho_n(g_x,\cdot)$ частинних сум Фур'є $S_{n-1}(g_x;\cdot)$ порядку $n-1$ від функції $g_x(\cdot)$ виконується рівність (51) (а отже, і (52)). Відповідно до теореми 1 роботи [17] для функції g_x при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ знайдеться функція $G(\cdot) = G(f;n;x;\cdot)$ з множини $C_{2\gamma_n/\pi}^{\alpha,r}C$ така, що

$$E_n(G_{2\gamma_n/\pi}^{\alpha,r})_C = E_n(f_\beta^{\alpha,r})_C \qquad (71)$$

і при всіх $n \geq n_1(\alpha,r)$, де $n_1(\alpha,r)$ — найменше натуральне число, що задовольняє нерівність

$$\frac{1}{\alpha r n^r}\left(1+\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)+\frac{\alpha r}{n^{1-r}}<\frac{1}{(3\pi)^3}, \quad \alpha>0, \quad r\in(0,1), \qquad (72)$$

виконується рівність

$$\|\rho_n(G,\cdot)\|_C = \|G(\cdot)-S_{n-1}(G,\cdot)\|_C = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\bar{\gamma}_{n,\infty}\right)E_n(f_\beta^{\alpha,r})_C, \qquad (73)$$

де $\bar{\gamma}_{n,\infty} = \bar{\gamma}_{n,\infty}(\alpha,r,\beta,x)$ підпорядкована умові $|\bar{\gamma}_{n,\infty}| \leq 20\pi^4$.

Покажемо, що

$$n_1(\alpha,r) \leq n_*(\alpha,r,\infty), \qquad (74)$$

тобто при будь-яких $\alpha>0$ і $r\in(0,\infty)$ з умови

$$\frac{\ln\pi n}{\alpha r n^r}+\frac{\alpha r}{n^{1-r}} \leq \frac{1}{(3\pi)^3} \qquad (75)$$

випливає нерівність (72). Справді, із (75) безпосередньо отримуємо, що

$$\alpha r n^r \geq (3\pi)^3\ln\pi n \geq (3\pi)^3\ln\pi,$$

а тому

$$1 - \ln \alpha r n^r \leq 1 - \ln(3\pi)^3 \ln \pi < 0. \tag{76}$$

Отже, за виконання (75) з урахуванням (76) можемо записати

$$\frac{1}{\alpha r n^r}\left(1 + \ln \frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) + \frac{\alpha r}{n^{1-r}} = \frac{1}{\alpha r n^r}(1 - \ln \alpha r n^r + \ln \pi n) + \frac{\alpha r}{n^{1-r}}$$

$$< \frac{\ln \pi n}{\alpha r n^r} + \frac{\alpha r}{n^{1-r}} \leq \frac{1}{(3\pi)^3},$$

звідки випливає (72). Тим самим нерівність (74) доведено.

Виберемо точку x_0 таким чином, щоб виконувалась рівність (55). Розглянемо, як і раніше, функцію $\mathcal{F}$, що задається формулою (56). Ця функція з множини $C^{\alpha,r}_{\beta}C$ і буде шуканою. Для неї з урахуванням (71) та інваріантності рівномірної норми щодо зсуву аргументу маємо

$$E_n(\mathcal{F}^{\alpha,r}_{\beta})_C = E_n(G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi})_C = E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_C. \tag{77}$$

Крім того, на підставі (49), (77), (73), (55), (35) – (37) і (74) для довільного значення аргументу $x \in \mathbb{R}$ при $n \geq n_*(\alpha, r, \infty)$ отримуємо

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| = 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|$$

$$\times \left(\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi}(x_0 + t)\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos(kt + \gamma_n)dt\right| + \theta_{n,\infty}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_C\right)$$

$$= 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Big(|\rho_n(G; x_0)| + \theta_{n,\infty}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_C\Big)$$

$$= 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Big(\|\rho_n(G; \cdot)\|_C + \theta_{n,\infty}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_C\Big)$$

$$= 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r} + \bar{\gamma}_{n,\infty} + \theta_{n,\infty}\right)E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_C, \tag{78}$$

де для величин $\bar{\gamma}_{n,\infty}$ і $\theta_{n,\infty}$ виконуються оцінки $|\bar{\gamma}_{n,\infty}| \leq 20\pi^4$, $|\theta_{n,\infty}| < \dfrac{1272}{169\pi}$ і $|\bar{\gamma}_{n,\infty} + \theta_{n,\infty}| < 1951$.

Теорему 2.3 доведено.

3. Розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для інтерполяційних поліномів Лагранжа на класах узагальнених інтегралів Пуассона $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$. Із теорем 2.1 – 2.3 даної роботи випливає, що нерівності (23), (59) і (66) є асимптотично непокращуваними на множинах узагальнених інтегралів Пуассона $C^{\alpha,r}_{\beta}L_p$ при всіх $x \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $r \in (0, 1)$ і $1 \leq p \leq \infty$. Зрозуміло, що зазначені нерівності мають місце і для довільних підмножин із $C^{\alpha,r}_{\beta}L_p$, якими є множини $C^{\alpha,r}_{\beta}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L_p$ і, зокрема, класи

$$C^{\alpha,r}_{\beta,p} = C^{\alpha,r}_{\beta}U_p, \quad U_p = \{\varphi \in L_p \colon |\varphi\|_p \leq 1\}.$$

Розглядаючи точні верхні межі в обох частинах кожної з нерівностей (23), (59) і (66) по класу $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ при $p \in (1, \infty)$, $p = 1$ та $p = \infty$ відповідно і враховуючи, що для довільної

$f \in C^{\alpha,r}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, $E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_p} \le 1$, отримуємо, що при $n \ge n_*(\alpha,r,p)$ і всіх $x \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x) \le 2e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right) + \bar{\gamma}^*_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r}\right)\right), \quad 1<p<\infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{79}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1};x) \le 2e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{1}{\pi\alpha r} + \bar{\gamma}^*_{n,1}\left(\frac{1}{(\alpha r)^2 n^r} + \frac{1}{n^{1-r}}\right)\right), \tag{80}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty};x) \le 2e^{-\alpha n^r} \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r} + \bar{\gamma}^*_{n,\infty}\right), \tag{81}$$

де $|\bar{\gamma}^*_{n,p}| < 20\pi^4$ при $1 \le p \le \infty$.

Виявляється, що в (79)–(81) знак $\le$ можна замінити на знак $=$. Цей факт випливатиме з такого твердження.

Теорема 3.1. *Нехай* $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$ *і* $x \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $n \ge n_*(\alpha,r,1)$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1};x) = e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{2}{\pi\alpha r} + \delta^*_{n,1}\left(\frac{1}{n^{1-r}} + \frac{1}{(\alpha r)^2 n^r}\right)\right), \tag{82}$$

при $n \ge n_*(\alpha,r,p)$ *і* $1<p<\infty$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x) = e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right) + \delta^*_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r}\right)\right), \tag{83}$$

а при $n \ge n_*(\alpha,r,\infty)$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty};x) = e^{-\alpha n^r} \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{8}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r} + \delta^*_{n,\infty}\right). \tag{84}$$

У формулах (82)–(84) *для величин* $\delta^*_{n,p} = \delta^*_{n,p}(\alpha,r,\beta,x)$ *виконується оцінка* $|\delta^*_{n,p}| < 40\pi^4$.

Доведення. Будемо відштовхуватись від інтегрального зображення (25), в якому $f \in C^{\alpha,r}_\beta$, $1 \le p \le \infty$. Розглядаючи точні верхні межі модулів обох частин рівності (25) при $t_{n-1} \equiv 0$ по класу $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ та враховуючи інваріантність множини

$$U^0_p = \left\{\varphi \in L_p \colon \|\varphi\|_p \le 1, \int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt = 0\right\}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

щодо зсуву аргументу при всіх $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ 1 \leq p \leq \infty$ і $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x) = \sup_{f\in C^{\alpha,r}_{\beta,p}} |\tilde{\rho}_n(f;x)|$$

$$= 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\sup_{\varphi\in U^0_p}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt + \xi_n\|r_n(\cdot)\|_C\right), \quad (85)$$

де γ_n і $r_n(t)$ означені рівностями (27) і (26) відповідно, а для величини $\xi_n = \xi_n(\alpha,r,\beta,p)$ виконується нерівність $|\xi_n| \leq 2$.

Із співвідношень двоїстості (див., наприклад, [2, с. 27]) отримуємо

$$\sup_{\varphi\in U^0_p}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt = \frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)-\lambda\right\|_{p'}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \quad (86)$$

Розглянемо випадок $p = 1$. Із [13 – 15] випливає, що при довільних $r \in (0,1),\ \alpha > 0,\ \xi \in \mathbb{R}$ і $n \geq n_0(\alpha,r,1)$, де $n_0(\alpha,r,1)$ — найменший з номерів n такий, що задовольняє нерівність (39) при $p = 1$, мають місце оцінки

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)\right\|_{\infty} = e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left(\frac{1}{\pi\alpha r}+\bar{\gamma}^{(1)}_{n,1}\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{1-r}}\right)\right), \quad (87)$$

$$\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)-\lambda\right\|_{p'} = e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left(\frac{1}{\pi\alpha r}+\bar{\gamma}^{(2)}_{n,1}\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{1-r}}\right)\right), \quad (88)$$

в яких для величин $\bar{\gamma}^{(i)}_{n,1} = \bar{\gamma}^{(i)}_{n,1}(\alpha,r,\xi),\ i = 1,2,$ виконуються нерівності $|\bar{\gamma}^{(i)}_{n,1}| \leq (14\pi)^2$.

Застосовуючи формулу (88) при $\xi = \gamma_n$, де γ_n означена рівністю (27), і враховуючи, що $n_0(\alpha,r,1) \leq n_*(\alpha,r,1)$, із (85), (86), (88) і (35) для $n \geq n_*(\alpha,r,1)$ маємо

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1};x) = 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left(\frac{1}{\pi\alpha r}+\bar{\gamma}^{(2)}_{n,1}\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{1-r}}\right)+\theta_{n,1}e^{-\alpha n^r}\right)\right)$$

$$= e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi\alpha r}+2\bar{\gamma}^{(2)}_{n,1}\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+2\left(\bar{\gamma}^{(2)}_{n,1}+\theta_{n,1}\right)\frac{1}{n^{1-r}}\right), \quad (89)$$

де $|\theta_{n,1}| < \dfrac{1272}{169\pi}$. Оскільки $2\left(|\bar{\gamma}^{(2)}_{n,1}|+|\theta_{n,1}|\right) < 40\pi^4$, то із (89) випливає (82).

Нехай $p \in (0,1)$. В цьому випадку має місце оцінка (47), що справджується при всіх $n \geq n_0(\alpha,r,p),\ 1 < p < \infty$. Застосовуючи (47) при $\xi = \gamma_n$, де γ_n означена формулою (27), і враховуючи, що $n_0(\alpha,r,p) \leq n_*(\alpha,r,p),\ 1 < p < \infty$, із (85), (86) і (35) при $n \geq n_*(\alpha,r,p)$ отримуємо

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x) = 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right)\right.\right.$$

$$+\ \bar{\gamma}_{n,p}^{(2)}\left(\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}+\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}n^r}\right)\right)+\theta_{n,p}e^{-\alpha n^r}\right)$$

$$=e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right)\right.$$

$$\left.+\ 2\bar{\gamma}_{n,p}^{(2)}\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}}\frac{1}{n^r}+\left(2\bar{\gamma}_{n,p}^{(2)}\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)+2\theta_{n,p}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}\right), \qquad (90)$$

де $|\theta_{n,p}|<\dfrac{1272}{169\pi}$.

Враховуючи, що $2\Big(|\bar{\gamma}_{n,p}^{(2)}|+|\theta_{n,p}|\Big)<40\pi^4$, із (90) одержуємо (83).

Нехай, нарешті, $p=\infty$. На підставі (68) і формул (46), (47), застосованих при $p=\infty$, для всіх номерів $n\geq n_0(\alpha,r,\infty)$ і довільних $\alpha>0,\ r\in(0,1),\ \gamma\in\mathbb{R}$ мають місце оцінки

$$\frac{1}{\pi}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)\right\|_1$$

$$=e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\frac{4}{\pi^2}\Theta_{\alpha,r,n}+\gamma_{n,\infty}^{(1)}\left(\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\Theta_{\alpha,r,n}\right)\frac{1}{\alpha r n^r}+\gamma_{n,\infty}^{(1)}\right), \qquad (91)$$

$$\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)-\lambda\right\|_1$$

$$=e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\frac{4}{\pi^2}\Theta_{\alpha,r,n}+\gamma_{n,\infty}^{(2)}\left(\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\Theta_{\alpha,r,n}\right)\frac{1}{\alpha r n^r}+\gamma_{n,\infty}^{(2)}\right), \qquad (92)$$

де $|\gamma_{n,\infty}^{(i)}|\leq(14\pi)^2,\ i=1,2$, а $0<\Theta_{\alpha,r,n}<1$.

При $n\geq n_1(\alpha,r)$, де $n_1(\alpha,r)$ — найменше натуральне число, яке задовольняє нерівність (72), мають місце оцінки

$$\frac{4}{\pi^2}(\ln\pi+\Theta_{\alpha,r,n})+|\gamma_{n,\infty}^{(i)}|\left(\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\Theta_{\alpha,r,n}\right)\frac{1}{\alpha r n^r}+|\gamma_{n,\infty}^{(i)}|$$

$$<\frac{4(1+\ln\pi)}{\pi^2}+(14\pi)^2\left(\frac{1}{(3\pi)^3}+1\right)<1938. \qquad (93)$$

Із (91), (92) з урахуванням нерівності $n_1(\alpha,r)>n_0(\alpha,r,\infty)$ отримуємо, що при $\alpha>0$, $r\in(0,1),\ \gamma\in\mathbb{R}$ і $n\geq n_1(\alpha,r)$

$$\frac{1}{\pi}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)\right\|_1=e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\bar{\gamma}_{n,\infty}^{(1)}\right), \qquad (94)$$

$$\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)-\lambda\right\|_1=e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\bar{\gamma}_{n,\infty}^{(2)}\right), \qquad (95)$$

де $|\bar{\gamma}_{n,\infty}^{(i)}|<1938,\ i=1,2$.

Застосовуючи формулу (95) при $\xi = \gamma_n$, де γ_n означена рівністю (27), і враховуючи (74), із (85), (86) і (35) для $n \geq n_*(\alpha, r, \infty)$ маємо

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty}; x) = 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r} + \bar{\gamma}^{(2)}_{n,\infty}\right) + \theta_{n,\infty}e^{-\alpha n^r}\right)$$

$$= e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r} + 2\left(\bar{\gamma}^{(2)}_{n,\infty} + \theta_{n,\infty}\right)\right), \tag{96}$$

де $|\theta_{n,\infty}| < \dfrac{1272}{169\pi}$.

Враховуючи, що $2\left(|\bar{\gamma}^{(2)}_{n,\infty}| + |\theta_{n,\infty}|\right) < 40\pi^4$, із (96) отримуємо (84).

Теорему 3.1 доведено.

Зауважимо, що оцінка (84) уточнює оцінку (45) роботи [7].

Також зазначимо, що оцінки (82)–(84), з яких випливають асимптотичні рівності величин $\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p}; x)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \in (0,1)$, при $n \to \infty$, є інтерполяційними аналогами отриманих в [14] (див. також [13, 15, 18]) відповідних оцінок для величин

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C = \sup_{f \in C^{\alpha,r}_{\beta,p}} \|f - S_{n-1}(f)\|_C, \tag{97}$$

де $S_{n-1}(f)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$ функції f.

Зіставляючи формули (82)–(84) з оцінками (17), (18), (30) роботи [14], переконуємось у виконанні граничного співвідношення для величин (11) і (97) при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p}; x)}{\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C} = 2, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \alpha > 0, \quad r \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{98}$$

Для класів функцій скінченної гладкості ситуація принципово інша.

Нехай, як і раніше, W^r_∞ — клас 2π-періодичних функцій f таких, що їхні похідні $f^{(k)}$ до $(r-1)$-го порядку включно абсолютно неперервні, а $\|f^{(r)}\|_\infty \leq 1$. Як показав А. М. Колмогоров [1],

$$\mathcal{E}_n(W^r_\infty)_C = \sup_{f \in W^r_\infty} \|f - S_{n-1}(f)\|_C = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad r \in \mathbb{N}. \tag{99}$$

Зіставлення оцінки Колмогорова (99) для сум Фур'є з оцінкою Нікольського (10) для інтерполяційних поліномів дозволяє записати при $x \neq \dfrac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{\mathcal{E}}_n(W^r_\infty; x)}{\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\mathcal{E}_n(W^r_\infty)_C} = 2\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^{v(r+1)}}{(2v+1)^{r+1}}, \quad r \in \mathbb{N}. \tag{100}$$

Як видно із (100), границя співідношення $\dfrac{\widetilde{\mathcal{E}}_n(W^r_\infty; x)}{\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\mathcal{E}_n(W^r_\infty)_C}$ при $n \to \infty$ залежить від показника гладкості.

Стосовно уточнень та узагальнень оцінки (99) див., наприклад, [12, 19, 25, 26].

4. Доведення леми 2.1. Нехай $n \in \mathbb{N}$ таке, що виконується нерівність (28). Покажемо, що при вказаних n має місце оцінка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=(2k+1)n-k}^{\infty} e^{-\alpha v^r} < \frac{636}{169} \frac{n^{1-r}}{\alpha r} e^{-\alpha(3n-1)^r}.$$

Насамперед зауважимо, що для довільної додатної і спадної функції $\xi(u)$ такої, що $\int_m^{\infty} \xi(u)du < \infty$, виконується співвідношення

$$\sum_{j=m}^{\infty} \xi(j) < \xi(m) + \int_m^{\infty} \xi(u)du. \tag{101}$$

У роботі [14] (формула (22)) було встановлено оцінку

$$\int_m^{\infty} e^{-\alpha t^r} t^{\delta} dt = \frac{e^{-\alpha m^r}}{\alpha r} m^{\delta+1-r} \left(1 + \Theta_{\alpha,m}^{r,\delta} \frac{|\delta+1-r|}{\alpha r} \frac{1}{m^r}\right), \quad |\Theta_{\alpha,m}^{r,\delta}| \le \frac{14}{13}, \tag{102}$$

яка виконується при всіх $\alpha > 0$, $r > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ і номерах m таких, що $m \ge \left(\frac{14|\delta+1-r|}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}}$.

На підставі (101), (102) і умови (28)

$$\sum_{v=(2k+1)n-k}^{\infty} e^{-\alpha v^r} < e^{-\alpha((2k+1)n-k)^r} + \int_{(2k+1)n-k}^{\infty} e^{-\alpha t^r} dt$$

$$\le \frac{e^{-\alpha((2k+1)n-k)^r}}{\alpha r} ((2k+1)n-k)^{1-r} \left(\frac{\alpha r}{((2k+1)n-k)^{1-r}} + 1 + \frac{14}{13} \frac{1-r}{\alpha r((2k+1)n-k)^r}\right)$$

$$< \frac{14}{13} \frac{e^{-\alpha((2k+1)n-k)^r}}{\alpha r} (2k+1)n-k)^{1-r}. \tag{103}$$

Внаслідок (28) і монотонного спадання функції $e^{-\alpha t^r} t^{1-r}$ на $[n, \infty)$ при n, що задовольняють умову (28), з урахуванням (103) і рівності (102), застосованої при $\delta = 1-r$, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=(2k+1)n-k}^{\infty} e^{-\alpha v^r} < \frac{14}{13} \frac{1}{\alpha r} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha((2k+1)n-k)^r} (2k+1)n-k)^{1-r}$$

$$< \frac{14}{13} \frac{1}{\alpha r} \left(e^{-\alpha(3n-1)^r} (3n-1)^{1-r} + \int_1^{\infty} e^{-\alpha((2n-1)u+n)^r} (2n-1)u+n)^{1-r} du\right)$$

$$= \frac{14}{13} \frac{1}{\alpha r} \left(e^{-\alpha(3n-1)^r} (3n-1)^{1-r} + \frac{1}{2n-1} \int_{3n-1}^{\infty} e^{-\alpha t^r} t^{1-r} dt\right)$$

$$\le \frac{14}{13} \frac{1}{\alpha r} \left(e^{-\alpha(3n-1)^r} (3n-1)^{1-r} + \frac{1}{2n-1} \frac{e^{-\alpha(3n-1)^r}}{\alpha r} (3n-1)^{2(1-r)} \left(1 + \frac{14}{13} \frac{2(1-r)}{\alpha r(3n-1)^r}\right)\right)$$

$$< \frac{14}{13}\frac{1}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}(3n-1)^{1-r}\left(1+\frac{(3n-1)^{1-r}}{(2n-1)\alpha r}\left(1+\frac{14}{13}\frac{2}{\alpha r(3n-1)^r}\right)\right)$$

$$= \frac{14}{13}\frac{1}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}(3n-1)^{1-r}\left(1+\frac{3n-1}{2n-1}\frac{1}{\alpha r(3n-1)^r}\left(1+\frac{28}{13}\frac{1}{\alpha r(3n-1)^r}\right)\right)$$

$$< \frac{14}{13}\frac{1}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}(3n-1)^{1-r}\left(1+2\cdot\frac{1}{14}\left(1+2\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{1}{14}\right)\right)$$

$$= \frac{212}{169}e^{-\alpha(3n-1)^r}\frac{(3n-1)^{1-r}}{\alpha r} < \frac{636}{169}\frac{n^{1-r}}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}.$$

Лему 2.1 доведено.

Роботу частково підтримано грантом H2020-MSCA-RISE-2019, номер проєкту 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology), а також фондом Фольксвагена (VolkswagenStiftung), програмою “From Modeling and Analysis to Approximation”.

Від імені всіх авторів відповідальна за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. A. Kolmogoroff, *Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen*, Ann. Math. (2), **36**, № 2, 521 – 526 (1935).
2. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, Москва (1987).
3. С. М. Никольский, *Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **15** (1945).
4. K. I. Oskolkov, *Inequalities of the* “*large size*” *type and applications to problems of trigonometric approximation*, Anal. Math., **12**, 143 – 166 (1986).
5. А. С. Сердюк, *Про асимптотично точні оцінки похибки наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами функцій високої гладкості*, Доп. НАН України, № 8, 29 – 33 (1999).
6. А. С. Сердюк, *Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах періодичних аналітичних функцій*, Укр. мат. журн., **64**, № 5, 698 – 712 (2012).
7. А. С. Сердюк, *Наближення нескінченно диференційовних періодичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами*, Укр. мат. журн., **56**, № 4, 495 – 505 (2004).
8. А. С. Сердюк, В. А. Войтович, *Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена*, Теорія наближення функцій та суміжні питання, **7**, № 1, 274 – 297 (2010).
9. А. С. Сердюк, І. В. Соколенко, *Наближення класів* (ψ,β)*-диференційовних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **13**, № 1, 289 – 299 (2016).
10. А. С. Сердюк, І. В. Соколенко, *Апроксимація класів згорток періодичних функцій лінійними методами, побудованими на основі коефіцієнтів Фур'є – Лагранжа*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14**, № 1, 238 – 248 (2017).
11. А. С. Сердюк, І. В. Соколенко, *Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів* L_p *на класах періодичних цілих функцій*, Укр. мат. журн., **71**, № 2, 283 – 292 (2019).
12. А. С. Сердюк, І. В. Соколенко, *Наближення сумами Фур'є на класах диференційовних у сенсі Вейля – Надя функцій із високим показником гладкості*, Укр. мат. журн., **74**, № 5, 685 – 700 (2022).
13. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк, *Рівномірні наближення сумами Фур'є на класах згорток з інтегралами Пуассона*, Допов. НАН України, № 11, 10 – 16 (2016).
14. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk, *Uniform approximations by Fourier sums on classes of generalized Poisson integrals*, Anal. Math., **45**, № 1, 201 – 236 (2019).

15. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк, *Наближення класів узагальнених інтегралів Пуассона сумами Фур'є в метриках просторів*, Укр. мат. журн., **69**, № 5, 695 – 704 (2017).
16. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk, *Asymptotically best possible Lebesque-type inequalities for the Fourier sums on sets of generalized Poisson integrals*, Filomat, **34**, № 14, 4697 – 4707 (2020).
17. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk, *About Lebesgue inequalities on the classes of generalized Poisson integrals*, Jaen J. Approx., **12**, 25 – 40 (2021).
18. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк, *Рівномірні наближення сумами Фур'є на множинах згорток періодичних функцій високої гладкості*, Укр. мат. журн., **75**, № 4, 542 – 567 (2023).
19. А. И. Степанец, *Методы теории приближений*: в 2 ч., Пр. Ін-ту математики НАН України, **40**, ч. I (2002).
20. А. И. Степанец, *Методы теории приближений*: В 2 ч., Пр. Ін-ту математики НАН України, **40**, ч. II (2002).
21. А. И. Степанец, А. С. Сердюк, *Приближение периодических аналитических функций интерполяционными тригонометрическими многочленами*, Укр. мат. журн., **59**, № 12, 1689 – 1701 (2000).
22. О. І. Степанець, А. С. Сердюк, *Оцінка залишку наближення інтерполяційними тригонометричними многочленами на класах нескінченно диференційовних функцій*, Теорія наближення функцій та її застосування, Праці Ін-ту математики НАН України, **31**, 446 – 460 (2000).
23. О. І. Степанець, А. С. Сердюк, А. Л. Шидліч, *Про деякі нові критерії нескінченної диференційовності періодичних функцій*, Укр. мат. журн., **59**, № 10, 1399 – 1409 (2007).
24. А. И. Степанец, А. С. Сердюк, А. Л. Шидлич, *О связи классов* $(\psi, \overline{\beta})$*-дифференцируемых функций с классами Жевре*, Укр. мат. журн., **61**, № 1, 140 – 145 (2009).
25. С. Б. Стечкин, *Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций*, Приближение функций полиномами и сплайнами, Тр. МИАН СССР, **145**, 126 – 151 (1980).
26. С. А. Теляковский, *О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости*, Укр. мат. журн., **41**, № 4, 510 – 518 (1989).
27. I. I. Sharapudinov, *On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation*, Anal. Math., **9**, 223 – 234 (1983).

Одержано 09.03.23