

ПРО ВАРІАЦІЙНУ ПОСТАНОВКУ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ІЗ ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ РОЗДІЛУ

With the help of Clebsch's potentials, we propose a Bateman – Luke-type variational principle for a boundary-value problem with a free (unknown) interface between two ideal compressible barotropic fluids (liquid and gas) admitting rotational flows.

Використовуючи потенціали Клебша, запропоновано варіаційний принцип типу Бейтмена – Люка для крайової задачі із вільною (невідомою) поверхнею розділу двох ідеальних стисливих (баротропних) середовищ (рідина та газ), які допускають вихрові потоки.

У цій статті узагальнено результати робіт [1, 2], об'єктами яких є диференціальні та варіаційні постановки задачі динаміки двох стисливих ідеальних баротропних середовищ, зовнішня межа яких рухається за заданим законом. З фізичної точки зору така задача може описувати акустичне позиціонування рідини в умовах мікрогравітації чи акустично левітуючу краплю. У вищезгаданих статтях розглядалися безвихрові течії. Було показано як відповідна крайова задача з вільною поверхнею розділу впливає з варіаційних принципів Гамільтона – Остроградського і Бейтмена – Люка. Останній принцип є важливим інструментом модального моделювання динаміки рідини в баках та (з відокремленням швидкого і повільного часів у функціоналі найменшої дії) виводу функціонала квазіпотенціальної енергії віброрівноваги двох середовищ. Припущення про вихрові потоки є фізично обґрунтованим [3, 4], зокрема, через обертальні рухи краплі. Допускаючи, на відміну від робіт [1, 2], такі вихрові потоки, воно вимагає узагальнити відповідні варіаційні принципи, як це недавно було зроблено в [5] для задачі про коливання рідини в баках. Зазначене узагальнення наведено у цій статті.

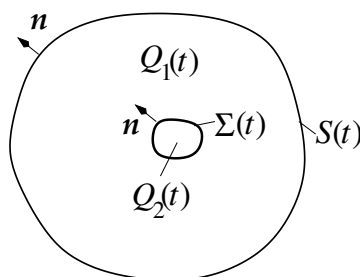
Розглянемо два стисливих баротропних суцільних середовища, зовнішній газ $Q_1(t)$ і рідину $Q_2(t)$, як це схематично показано на рисунку. Тут $\Sigma(t)$ позначає невідому *a priori* поверхню розділу, неявно задану рівнянням $Z(x, y, z, t) = 0$, а поверхня $S(t)$, що обмежує зовнішній газ та й всю систему, є заданою та описується рівнянням $Y(z, y, z, t) = 0$, де Y – відома функція. Вектори зовнішніх нормалей $\mathbf{n}$ визначаються через $-\nabla Z/|\nabla Z|$ на $\Sigma(t)$ і $-\nabla Y/|\nabla Y|$ на $S(t)$. Суцільні середовища мають густини $\rho_1(x, y, z)$ і $\rho_2(x, y, z)$, виконується умова збереження маси

$$\int_{Q_i(t)} \rho_i dQ = M_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

що розглядається як геометрична в'язь на $Q_i(t)$; $U(x, y, z) = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – потенціал гравітаційного поля. Поля швидкостей у $Q_i(t)$ визначаються (взагалі кажучи, неоднозначно [3]) потенціалами Клебша $\varphi_i(x, y, z, t)$, $m_i(x, y, z, t)$ і $\phi_i(x, y, z, t)$,

$$\mathbf{v}_i = \nabla \varphi_i + m_i \nabla \phi_i, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

¹ E-mails: tim@imath.kiev.ua, atimokha@gmail.com.



Схематичне зображення двох середовищ та введені позначення.

Використовуючи означення з [6, с. 47], вводимо лагранжиан типу Бейтмена

$$L(\rho_i, \varphi_i, m_i, \phi_i, Z) = - \sum_{i=1}^2 \int_{Q_i(t)} \rho_i \left[\partial_t \varphi_i + m_i \partial_t \phi_i + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_i|^2 + U + E_i(\rho_i) \right] dQ, \quad (3)$$

де $E_i(\rho_i)$ — внутрішня енергія баротропних середовищ, в яких тиск постулюється як

$$p_i = \rho_i^2 E'_i(\rho_i). \quad (4)$$

Для лагранжиана (3) вводимо функціонал найменшої дії

$$W(\rho_i, \varphi_i, m_i, \phi_i, Z) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^2 [L(\rho_i, \varphi_i, m_i, \phi_i, Z) - \mu_i M_i] dt \quad \text{для } t_1 < t_2, \quad (5)$$

де $\mu_i = \mu_i(t)$ — множники Лагранжа, пов'язані з геометричними в'язями (1).

Зауваження. Функціонал найменшої дії (5) залежить від невідомих: густини ρ_i , потенціалів Клебша φ_i, m_i, ϕ_i , $i = 1, 2$, та поверхні розділу $\Sigma(t)$, а також від відомої зовнішньої межі $S(t)$ (див. рисунок). У випадку безвихрових потоків та високочастотних (акустичних) вібрацій $S(t)$, розглянутих в роботах [1, 2], було можливим ввести середню за часом поверхню $S_0 = \langle S(t) \rangle$ так, щоб $Q_1(t)$ лежала між рухомою поверхнею $\Sigma(t)$ та нерухомою S_0 . У такому випадку лагранжиан містив додатковий інтегральний член на S_0 , з якого випливала відповідна умова Неймана крайової задачі, що задає нормальну швидкість „вібратора”.

Далі припускаємо, що потенціали Клебша та їхні треті похідні є гладкими функціями в області $Q_1(t) \cup Q_2(t)$ для будь-якого моменту часу, а також допускають аналітичне продовження через $\Sigma(t)$. Транспортна теорема Рейнольдса, інтегральні теореми Гріна та Гаусса [7] (додаток А) дають змогу довести такі твердження.

Лема 1. Відповідно до наведеного вище припущення щодо гладкості умова

$$\delta_{\varphi_i} W = 0 \quad \text{для} \quad \delta \varphi_i|_{t_1, t_2} = 0 \quad (6)$$

еквівалентна рівнянню неперервності

$$\partial_t \rho_i + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i) = 0 \quad \text{в} \quad Q_i(t) \quad (7)$$

і умовам Неймана

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} = - \frac{\partial_t Z}{|\nabla Z|} \quad \text{на} \quad \Sigma(t), \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = - \frac{\partial_t Y}{|\nabla Y|} \quad \text{на} \quad S(t). \quad (8)$$

Доведення базується на таких викладках із підстановкою умови (6):

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{Q_i(t)} \rho_i [\partial_t \delta \varphi_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla (\delta \varphi_i)] dQ dt \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{d}{dt} \int_{Q_i(t)} \rho_i \delta \varphi_i dQ - \int_{Q_i(t)} \delta \varphi_i [\partial_t \rho_i + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i)] dQ \right. \\
 & \quad \left. + (-1)^i \int_{\Sigma(t)} \rho_i \left[\frac{\partial_t Z}{|\nabla Z|} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} \right] \delta \varphi_i dS \right\} + \int_{S(t)} \rho_1 \left[\frac{\partial_t Y}{|\nabla Y|} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} \right] \delta \varphi_1 dS dt.
 \end{aligned}$$

Лема 2. Відповідно до наведеного вище припущення гладкості умова

$$\delta_{m_i} W = 0 \quad (9)$$

еквівалентна рівнянню

$$d_t \phi_i = \partial_t \phi_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \phi_i = 0, \quad (10)$$

з чого випливає, що потенціали Клебша ϕ_i залишаються незмінними під час руху частинок рідини (вихрові лінії рухаються разом з рідинами і завжди містять ті самі частинки).

Доведення безпосередньо випливає з виразу для першої варіації

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{Q_i(t)} \rho_i \delta m_i [\partial_t \phi_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \phi_i] dQ dt = 0.$$

Лема 3. Відповідно до припущень гладкості та умови нульової варіації (6) для дії (еквівалентної (7) та (8)) умова

$$\delta_{\phi_i} W = 0 \quad \text{для} \quad \delta \phi_i|_{t_1, t_2} = 0 \quad (11)$$

еквівалентна рівності

$$d_t m_i = \partial_t m_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla m_i = 0, \quad (12)$$

що має таке саме гідродинамічне трактування, як (10), але для потенціалу Клебша m_i .

Доведення базується на таких викладках:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{Q_i(t)} \rho_i [m_i \partial_t \delta \phi_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla (m_i \delta \phi_i)] dQ dt \\
 & = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{d}{dt} \int_{Q_i(t)} \rho_i m_i \delta \phi_i dQ - \int_{Q_i(t)} \delta \phi_i [\partial_t (m_i \rho_i) + \nabla \cdot (m_i \rho_i \mathbf{v}_i)] dQ \right.
 \end{aligned}$$

$$+ (-1)^i \int_{\Sigma(t)} \rho_i m_i \left[\frac{\partial_t Z}{|\nabla Z|} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} \right] \delta \phi_i dS \left\} + \int_{S(t)} \rho_1 m_1 \left[\frac{\partial_t Y}{|\nabla Y|} + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} \right] \delta \phi_1 dS dt, \quad (13)$$

де потрібно врахувати рівність $\delta \phi_i|_{t_1, t_2} = 0$ та крайові умови (8), щоб показати, що

$$\partial_t(m_i \rho_i) + \nabla \cdot (m_i \rho_i \mathbf{v}_i) = m_i[\partial_t \rho_i + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i)] + \rho_i[\partial_t m_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla m_i] = 0.$$

Звідси, враховуючи рівняння (7), отримуємо (12).

Лема 4. Відповідно до наведеного вище припущення гладкості умова

$$\delta_{\rho_i} W = 0 \quad (14)$$

еквівалентна рівності

$$\partial_t \varphi_i + m_i \partial_t \phi_i + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_i|^2 + U + E_i(\rho_i) + \rho_i E'_i(\rho_i) + \mu_i(t) = 0 \quad \text{в} \quad Q_i(t), \quad (15)$$

яку можна розглядати як інтеграл Лагранжа–Коші для рівняння Ейлера

$$d_t \mathbf{v}_i = \partial_t \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i = -\nabla U - \frac{\nabla p_i}{\rho_i} \quad \text{в} \quad Q_i(t) \quad (16)$$

за умови рівності нулю перших варіацій (9) і (11) та означення (4).

Доведення рівняння (15) стає очевидним після обчислення першої варіації функціонала найменшої дії (5) по ρ_i . Щоб підтвердити справедливність рівняння Ейлера (16), слід застосувати операцію градієнта до (15) та врахувати означення (4), з якого випливає, що

$$\frac{\nabla p_i}{\rho_i} = [2E'_i(\rho_i) + \rho_i E''_i(\rho_i)] \nabla \rho_i = \nabla [E_i(\rho_i) + \rho_i E'_i(\rho_i)].$$

Крім того, ліву частину рівняння (16) можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} d\mathbf{v}_i &= d(\nabla \varphi_i + m_i \nabla \phi_i) = [\nabla \partial_t \varphi_i + m_i \nabla \partial_t \phi_i + \partial_t m_i \nabla \phi_i] + \underbrace{\{\mathbf{v}_i \cdot \nabla (\nabla \varphi_i + m_i \nabla \phi_i)\}}_{\mathbf{v}_i \nabla \nabla \varphi_i + m_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla \nabla \phi_i + \nabla \phi_i (\nabla m_i \cdot \mathbf{v}_i)} \\ &= \nabla \partial_t \varphi_i + m_i \nabla \partial_t \phi_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \nabla \varphi_i + m_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla \nabla \phi_i + \nabla \phi_i [dm_i]. \end{aligned} \quad (17)$$

Застосовуючи операцію градієнта до перших трьох величин у (15), отримуємо

$$\begin{aligned} &\nabla \left(\partial_t \varphi_i + m_i \partial_t \phi_i + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_i|^2 \right) \\ &= [\nabla \partial_t \varphi_i + m_i \nabla \partial_t \phi_i + \partial_t \phi_i \nabla m_i] + \mathbf{v}_i \nabla \nabla \varphi_i + m_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla \nabla \phi_i + \nabla m_i (\nabla \phi_i \cdot \mathbf{v}_i) \\ &= \nabla \partial_t \varphi_i + m_i \nabla \partial_t \phi_i + \mathbf{v}_i \nabla \nabla \varphi_i + m_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla \nabla \phi_i + \nabla m_i [d\phi_i]. \end{aligned} \quad (18)$$

Праві частини в тотожностях (17) і (18) є ідентичними, забезпеченими (10) і (12), що випливають з (9) і (11).

Лема 5. Відповідно до наведеного вище припущення гладкості умова

$$\delta_Z W = 0 \quad (19)$$

еквівалентна умові на поверхні розділу

$$\begin{aligned} \rho_1 \left[\partial_t \varphi_1 + m_1 \partial_t \phi_1 + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_1|^2 + U + E_1(\rho_1) + \mu_1(t) \right] \\ = \rho_2 \left[\partial_t \varphi_2 + m_2 \partial_t \phi_2 + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_2|^2 + U + E_2(\rho_2) + \mu_2(t) \right] \quad \text{на} \quad \Sigma(t), \end{aligned} \quad (20)$$

що є традиційною динамічною умовою

$$p_1 = p_2 \quad \text{на} \quad \Sigma(t), \quad (21)$$

з урахуванням (6), (9), (11) і означення (5).

Доведення. Рівність (20) випливає з умови (19):

$$-\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^2 \int_{Q_i(t)} \rho_i \left[\partial_t \varphi_i + m_i \partial_t \phi_i + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_i|^2 + U + E_i(\rho_i) + \mu_i(t) \right] \frac{(-1)^i \delta Z}{|\nabla Z|} dQ = 0.$$

Щоб встановити умову (21), слід зазначити, що з означення (5) та рівняння Бернуллі для баротропних стисливих рідини та газу (15) одержуємо

$$\rho_i \left[\partial_t \varphi_i + m_i \partial_t \phi_i + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_i|^2 + U + E_i(\rho_i) + \mu_i(t) \right] = -p_i$$

за умови, у відповідності з лемою 4, виконання співвідношень (6), (9) та (11).

Послідовне застосування лем 1 – 5 із обчисленням перших варіацій функціонала найменшої дії (6), (9), (11), (14) і (19) доводить таку теорему.

Теорема. Відповідно до наведеного вище припущення гладкості умова

$$\delta W = \delta_{\varphi_i} W + \delta_{m_i} W + \delta_{\phi_i} W + \delta_{\rho_i} W + \delta_Z W = 0 \quad \text{для} \quad \delta \varphi_i, \quad \phi_i|_{t_1, t_2} = 0$$

еквівалентна крайовій задачі з вільною поверхнею розділу $\Sigma(t)$ між областями $Q_2(t)$ і $Q_1(t)$ для заданого руху межі $S(t)$. Така задача складається з рівнянь неперервності (7), кінематичної граничної умови на поверхні розділу та зовнішньої межі (8), інтегралів Лагранжа – Коші (15) (альтернативно, рівняння Ейлера (16)), динамічної умови на поверхні розділу (21), а також умов для вихрових ліній (10) і (12), забезпечених визначенням тиску (5) через внутрішню енергію баротропних стисливих середовищ та поля швидкостей (2) через потенціали Клебша.

Роботу виконано за фінансової підтримки Національного фонду досліджень України (проект 2020.02/0089).

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. I. A. Lukovskii, A. N. Timokha, *Variational formulations of nonlinear boundary-value problems with a free boundary in the theory of interaction of surface waves with acoustic fields*, Ukr. Math. J., **45**, № 12, 1849–1860 (1993); DOI: 10.1007/BF01061355.
2. M. O. Chernova, I. A. Lukovsky, A. N. Timokha, *Differential and variational formalism for acoustically-levitating drops*, J. Math. Sci., **220**, № 3.– 359–375 (2015); DOI: 10.1007/s10958-016-3189-z.
3. K. Pandey, D. Prabhakaran, S. Basu, *Review of transport processes and particle self-assembly in acoustically levitated nanofluid droplets*, Phys. Fluids, **31**, № 11, Article 112102 (2019); DOI: 10.1063/1.5125059.
4. H. Chen, A. Li, Y. Zhang, Z. Xiaoqiang, *Evaporation and liquid-phase separation of ethanol-cyclohexane binary drops under acoustic levitation*, Phys. Fluids, **34**, № 9, Article 092108 (2022); DOI: 10.1063/5.0109520.
5. A. N. Timokha, *A note on the variational formalism for sloshing with rotational flows in a rigid tank with unprescribed motion*, Ukr. Math. J., **73**, № 10, 1580–1589 (2022); DOI: 10.1007/s11253-022-02015-3.
6. H. Bateman, *Partial differential equations of mathematical physics*, Dover Publ., New York (1944).
7. O. M. Faltinsen, A. N. Timokha, *Sloshing*, Cambridge Univ. Press (2009).

Одержано 28.06.23