

Андрій Чайковський¹ (Київський національний університет імені Тараса Шевченка),

Оксана Лагода (Київський національний університет технологій та дизайну)

ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ ДИХОТОМІЮ ДЛЯ АБСТРАКТНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

We consider linear differential equations of the first order with delayed arguments in a Banach space. We establish conditions for the operator coefficients necessary for the existence of exponential dichotomy on the real axis. It is proved that the analyzed differential equation is equivalent to a difference equation in a certain space. It is shown that, under the conditions of existence and uniqueness of a solution bounded on the entire real axis, the condition of exponential dichotomy is also satisfied for any bounded known function. The explicit formula for projectors, which form the dichotomy, is found for the case of a single delay.

Розглянуто лінійні диференціальні рівняння першого порядку з запізненням аргументу в банаховому просторі. Досліджено питання знаходження необхідних умов на операторні коефіцієнти для існування експоненціальної дихотомії на дійсній осі. Показано, що розглянуте диференціальне рівняння еквівалентне лінійному різницево-му рівнянню в деякому просторі. Доведено, що за умови існування та єдиності обмеженого на всій осі розв'язку для довільної обмеженої відомої функції також справджуватиметься умова експоненціальної дихотомії. Встановлено явний вигляд проєкторів, що задають цю дихотомію у випадку одного запізнення аргументу.

Вступ. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $L(X)$ — простір лінійних неперервних операторів в X . Розглянемо диференціальне рівняння

$$x'(t) = \sum_{k=1}^m A_k x(t-k), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

де $\{A_k : 1 \leq k \leq m\} \subset L(X)$. Функцію $x \in C^\infty(\mathbb{R}, X)$, що задовольняє рівняння (1), називають розв'язком цього рівняння.

Для неоднорідних рівнянь такого типу відомі умови існування і єдиності обмеженого на всій осі розв'язку, що відповідає обмеженій відомій функції, та формули для нього [1, 2]. У випадку рівнянь без запізнення такі умови дають можливість встановити експоненціальну дихотомію. Справді, для рівняння

$$x'(t) = Ax(t) + y(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $A \in L(X)$, відомою умовою існування та єдиності обмеженого на всій осі розв'язку для довільної обмеженої відомої функції є умова

$$\sigma(A) \cap \{is \mid s \in \mathbb{R}\} = \emptyset.$$

За цієї умови спектр оператора A розпадається на дві частини і відповідні проєктори P_- , P_+ у розкладі Рісса [3] дозволяють отримати експоненціальну дихотомію для однорідного рівняння

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

а саме існують такі сталі $K > 0$, $\beta > 0$, що

¹ Відповідальний за листування, e-mail: chaikovskiyav@ukr.net.

$$\|e^{At}P_{-}\| \leq Ke^{-\beta t}, \quad t \geq 0,$$

$$\|e^{-At}P_{+}\| \leq Ke^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Проте вже у випадку рівняння із запізненням

$$x'(t) = Ax(t-1) + y(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ситуація ускладнюється. Умовою існування і єдиності обмеженого на всій осі розв'язку для довільної обмеженої відомої функції є умова

$$\sigma(A) \cap \{ise^{is} \mid s \in \mathbb{R}\} = \emptyset.$$

Крива у цій формулі є подвійною спіраллю, що розбиває комплексну площину на зліченну кількість обмежених частин. Проте належність спектра одній із цих частин не гарантує дихотомії.

У випадку запізнення питання експоненціальної дихотомії досліджувалося багатьма відомими вченими. Слід відзначити роботи Дж. Хейла [4, 5], О. А. Бойчука, А. М. Самойленка [6, 7], О. А. Бойчука, О. О. Покутного, В. Ф. Журавльова [8, 9].

Зокрема, в роботах [4, 5] встановлено і досліджено узагальнену експоненціальну дихотомію для диференціальних рівнянь із запізненням аргументу у скінченновимірному просторі. Зокрема, для деякого класу рівнянь, що включають рівняння вигляду (1), у скінченновимірному випадку отримано таке твердження.

Теорема 1 [5]. Для довільного $\mu \in \mathbb{R}$ існують проєктори P_{-}^{μ} , P_{+}^{μ} та сталі $K_{\mu} > 0$, $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$ такі, що для C^0 -напівгрупи $\{T(t) : t \geq 0\}$, породженої рівнянням (1), справджується умова узагальненої експоненціальної дихотомії

$$\|T(t)P_{-}^{\mu}\| \leq K_{\mu}e^{(\mu-\gamma_2)t}, \quad t \geq 0,$$

$$\|T(-t)P_{+}^{\mu}\| \leq K_{\mu}e^{-(\mu-\gamma_1)t}, \quad t \geq 0.$$

Зауважимо, що узагальнена дихотомія є слабшою за класичну.

В цій роботі запропоновано підхід, який дозволяє побудувати різницеве рівняння, еквівалентне диференціальному. А це дало можливість встановити експоненціальну дихотомію для рівняння (1). Для рівняння з одним запізненням також наведено явний вигляд проєкторів, що породжують дихотомію.

Зведення диференціального рівняння до різницевого. Введемо простори $Z_0 = C([0, 1], X)$ з рівномірною нормою $\|\cdot\|_0$ і $Z_1 = C^1([0, 1], X)$ з нормою $\|x\|_1 = \|x\|_0 + \|x'\|_0$, $x \in Z_1$. Для функцій, визначених на відрізку, під похідними на кінцях розумітимемо відповідні односторонні похідні.

Лема 1. Якщо функція $x \in C^{\infty}(\mathbb{R}, X)$ є розв'язком рівняння (1), то послідовність функцій $\{x_n(t) = x(t+n), t \in [0, 1] : n \in \mathbb{Z}\} \subset Z_1$ є розв'язком різницево-інтегрального рівняння

$$x_{n+1}(t) = x_n(1) + \sum_{k=1}^m A_k \int_0^t x_{n+1-k}(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Навпаки, якщо деяка послідовність функцій $\{x_n : n \geq 1\} \subset Z_1$ є розв'язком різницево-інтегрального рівняння (2), то рівності

$$x(t) = x_n(t - n), \quad t \in [n, n + 1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

задають функцію $x \in C^\infty(\mathbb{R}, X)$, що є розв'язком диференціального рівняння (1).

Доведення. Якщо x — розв'язок диференціального рівняння (1), то

$$x'(t + n + 1) = \sum_{k=1}^n A_k x(t + n + 1 - k), \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{Z},$$

тобто

$$x'_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^n A_k x_{n+1-k}(t), \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Інтегруючи члени рівняння від 0 до t , отримуємо

$$x_{n+1}(t) - x_{n+1}(0) = \sum_{k=1}^n A_k \int_0^t x_{n+1-k}(s) ds + \int_0^t y_{n+1}(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Враховуючи те, що $x_{n+1}(0) = x(n + 1) = x_n(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, одержуємо потрібну рівність.

Навпаки, якщо справджується рівність (2), то при $t = 0$ маємо

$$x_{n+1}(0) = x_n(1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

отже, $x \in C(\mathbb{R}, X)$. Рівність (2) можна здиференціювати і отримати рівність (1) (для похідних зліва і справа в цілих точках маємо значення з різних рівнянь, що збігаються завдяки неперервності функції x). Зокрема, одержуємо, що $x \in C^\infty(\mathbb{R}, X)$.

Введемо оператори $C_1, \dots, C_m \in L(Z_1)$, що діють за правилами

$$(C_1 x)(t) = x(1) + A_1 \int_0^t x(s) ds, \quad t \in [0, 1],$$

$$(C_k x)(t) = A_k \int_0^t x(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad 2 \leq k \leq m.$$

Тоді різницево-інтегральне рівняння (2) можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^m C_k x_{n+1-k}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Зауважимо, що це різницеве рівняння зручно записати у вигляді рівняння

$$u_{n+1} = C u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

у просторі Z_1^m з нормою $\|w\| = \sum_{k=1}^m \|w_k\|_1$, де

$$u_n = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1})^T,$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_{m-1} & C_m \\ I & O & O & \dots & O & O \\ O & I & O & \dots & O & O \\ O & O & I & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & I & O \end{pmatrix}.$$

Дослідимо існування експоненціальної дихотомії для цього рівняння за умови

$$0 \notin \sigma(itI - A_1 e^{-it} - A_2 e^{-2it} - \dots - A_m e^{-mit}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

яка є відомою необхідною і достатньою умовою існування єдиного обмеженого розв'язку неоднорідного рівняння, що відповідає (1) [1].

Лема 2. Якщо справджується умова (5), то

$$\sigma(C) \cap S = \emptyset,$$

де $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — одиничне коло в комплексній площині.

Доведення. Нехай $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(C)$. Це означає, що для довільного $v \in Z_1^m$ існує єдиний $u \in Z_1^m$ такий, що

$$Cu - \lambda u = v.$$

Використовуючи означення оператора C , отримуємо рівняння

$$u_1(1) + \sum_{k=1}^m A_k \int_0^t u_k(s) ds - \lambda u_1(t) = v_1(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$u_k(t) - \lambda u_{k+1}(t) = v_k(t), \quad 1 \leq k \leq m-1, \quad t \in [0, 1],$$

або разом при $\lambda \neq 0$

$$u_1(1) + \sum_{k=1}^m A_k \int_0^t \lambda^{1-k} u_1(s) ds - \lambda u_1(t) = w(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$w(t) = (Wv)(t) := v_1(t) + \sum_{k=2}^m A_k \int_0^t \sum_{p=2}^k \lambda^{p-k} v_p(s) ds, \quad t \in [0, 1],$$

де функція $w \in Z_1$ може бути довільною при відповідному виборі v . Це інтегральне рівняння при $\lambda \neq 0$ еквівалентне крайовій задачі для диференціального рівняння

$$\sum_{k=1}^m A_k \lambda^{1-k} u_1(t) - \lambda u_1'(t) = w'(t), \quad t \in [0, 1],$$

та крайової умови $u_1(1) - \lambda u_1(0) = w(0)$.

Введемо оператор $A = A(\lambda) = \sum_{k=1}^m A_k \lambda^{-k}$. Якщо існує неперервний обернений оператор до оператора $\frac{1}{\lambda} e^A - I$, то легко перевірити стандартними методами, що єдиним розв'язком крайової задачі буде функція

$$u_1(t) = ((C - \lambda I)^{-1} v)_1(t) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{A(t-s)} w'(s) ds + e^{At} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} e^A - I \right)^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^1 e^{A(1-s)} w'(s) ds + w(0) \right), \quad t \in [0, 1], \quad w = Wv \in Z_1. \quad (6)$$

Зокрема, це правильно при $\lambda \in S$, тобто $\lambda = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, бо за теоремою Данфорда про відображення спектра маємо

$$\sigma\left(\frac{1}{\lambda} e^A - I\right) = \{e^\mu - 1 \mid \mu \in \sigma(-i\varphi I + A_1 e^{-i\varphi} + A_2 e^{-2i\varphi} + \dots + A_m e^{-mi\varphi})\} \neq 0,$$

де враховано, що з умови $\mu \in \sigma(-i\varphi I + A_1 e^{-i\varphi} + A_2 e^{-2i\varphi} + \dots + A_m e^{-mi\varphi})$ випливає, що $\mu - 2\pi k i \in \sigma(-i(\varphi + 2\pi k)I + A_1 e^{-i(\varphi + 2\pi k)} + A_2 e^{-2i(\varphi + 2\pi k)} + \dots + A_m e^{-mi(\varphi + 2\pi k)})$, $k \in \mathbb{Z}$,

а останній спектр за умовою лему не містить нуля.

Експоненціальна дихотомія. Розглянемо для рівняння (2) еволюційний оператор $T(p)$, $p \in \mathbb{Z}$, який при кожному $r \in \mathbb{Z}$ набору $\{x_k : r \leq k \leq r + m - 1\}$ ставить у відповідність набір $\{x_k : r + p \leq k \leq r + p + m - 1\}$.

Теорема 2. Якщо виконано умову (5), то різницево-інтегральне рівняння (2), записане в еквівалентній формі (4), допускає експоненціальну дихотомію: існують підпростори Z_+ , Z_- простору Z_1^m такі, що:

- 1) пряма сума Z_- та Z_+ рівна простору Z_1^m ;
- 2) для проєктора P_- на підпростір Z_- справджується оцінка

$$\exists L > 0 \quad \exists q \in (0, 1) \quad \forall p \geq 0 : \|T(p)P_-\|_1 \leq Lq^p;$$

- 3) для проєктора P_+ на підпростір Z_+ справджується оцінка

$$\exists L > 0 \quad \exists q \in (0, 1) \quad \forall p \geq 0 : \|T(-p)P_+\|_1 \leq Lq^p.$$

Доведення. Враховуючи лему 2, до рівняння (2) у формі (4) можна застосувати спектральний розклад Рісса [3], вибравши в якості Z_- , Z_+ підпростори, що відповідають частинам спектра C , які лежать всередині і ззовні одиничного кола відповідно. Отримаємо п. 1. Крім того,

$$\exists L > 0 \quad \exists q \in (0, 1) \quad \forall p \geq 0 : \|C^p P_-\|_1 \leq Lq^p,$$

$$\exists L > 0 \quad \exists q \in (0, 1) \quad \forall p \geq 0 : \|C^{-p} P_+\|_1 \leq Lq^p.$$

Звідси маємо оцінки з пп. 2, 3.

Наслідок 1. У частковому випадку $m = 1$, коли розглядається рівняння з одним запізненням

$$x'(t) = A_1 x(t-1), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

оператор C збігається з оператором C_1 і діє у просторі Z_1 , умову (5) можна записати простіше

$$\sigma(A_1) \cap \{ite^{it} \mid t \in \mathbb{R}\} = \emptyset,$$

умовою застосування дихотомії буде належність функції x_1 підпростору Z_- чи Z_+ , а проектори на підпростори Z_- , Z_+ задаються відповідно формулами

$$(P_-x)(t) = x(t) + F(t)x(1) + \int_0^1 A_1 F(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0, 1],$$

$$(P_+x)(t) = -F(t)x(1) - \int_0^1 A_1 F(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0, 1],$$

де

$$F(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_S \left(\lambda e^{A_1 \lambda} - I \right)^{-1} e^{A_1 \lambda t} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Для отримання формул нагадаємо, що проектор на підпростір Z_- має вигляд

$$P_- = -\frac{1}{2\pi i} \int_S (C - \mu I)^{-1} d\mu = |\mu = 1/\lambda| = -\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{1}{\lambda^2} \left(C - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} d\lambda.$$

За формулою (6), використовуючи позначення $B(\lambda) = A(\lambda^{-1}) = A_1 \lambda$, маємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\lambda^2} \left(C - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} y \right)(t) &= -\frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{B(\lambda)(t-s)} y'(s) ds \\ &+ e^{B(\lambda)t} \frac{1}{\lambda} \left(\lambda e^{B(\lambda)} - I \right)^{-1} \left(\lambda \int_0^1 e^{B(\lambda)(1-s)} y'(s) ds + y(0) \right), \\ t &\in [0, 1], \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(C) \cup \{0\}). \end{aligned}$$

Інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_0^t e^{B(\lambda)(t-s)} y'(s) ds = y(t) - e^{B(\lambda)t} y(0) + \int_0^t B(\lambda) e^{B(\lambda)(t-s)} y(s) ds,$$

тому

$$\begin{aligned}
\lambda \int_0^1 e^{B(\lambda)(1-s)} y'(s) ds + y(0) &= -(\lambda e^{B(\lambda)} - I) y(0) + \lambda y(1) + \lambda \int_0^1 B(\lambda) e^{B(\lambda)(1-s)} y(s) ds \\
&= -(\lambda e^{B(\lambda)} - I) y(0) + \lambda y(1) + (\lambda e^{B(\lambda)} - I) \int_0^1 B(\lambda) e^{-B(\lambda)s} y(s) ds \\
&\quad + \int_0^1 B(\lambda) e^{-B(\lambda)s} y(s) ds.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\lambda^2} \left(C - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} y \right) (t) &= -\frac{1}{\lambda} y(t) - \frac{1}{\lambda} \int_0^t B(\lambda) e^{B(\lambda)(t-s)} y(s) ds \\
&\quad + e^{B(\lambda)t} (\lambda e^{B(\lambda)} - I)^{-1} \left(y(1) + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 B(\lambda) e^{-B(\lambda)s} y(s) ds \right) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 B(\lambda) e^{B(\lambda)(t-s)} y(s) ds.
\end{aligned}$$

Маємо

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_S \left(-\frac{1}{\lambda} I \right) d\lambda = I, \quad -\frac{1}{2\pi i} \int_S \left(-\frac{1}{\lambda} B(\lambda) e^{B(\lambda)(t-s)} \right) d\lambda = B(0) e^{B(0)(t-s)} = O.$$

Крім того,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_S \left(\frac{1}{\lambda} (\lambda e^{B(\lambda)} - I)^{-1} B(\lambda) e^{B(\lambda)(t-s)} \right) d\lambda = \sum_{k=1}^m A_k F_k(t-s),$$

де

$$F_k(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_S (\lambda^{k-1} (\lambda e^{B(\lambda)} - I)^{-1} e^{B(\lambda)t}) d\lambda.$$

Оскільки $F_1 = F$ і

$$\begin{aligned}
F_{k+1}(t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_S (\lambda^{k-1} (\lambda e^{B(\lambda)} - I)^{-1} e^{B(\lambda)(t-1)}) (\lambda e^{B(\lambda)} - I + I) d\lambda \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_S \lambda^{k-1} e^{B(\lambda)(t-1)} d\lambda + F_k(t-1) = F_k(t-1), \quad t \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq k \leq m-1,
\end{aligned}$$

то $F_k(t) = F(t-k+1)$, $t \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$. Враховуючи означення функцій F та B , отримуємо

$$(P_-y)(t) = y(t) + F(t)y(1) + \int_0^1 A_1 F(t-s)y(s)ds.$$

Наслідок 2. Якщо x — розв'язок диференціального рівняння (7), то його компоненти $x_+ = P_+x$, $x_- = P_-x$ є розв'язками цього рівняння, що задовольняють оцінки

$$\exists K > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall t \geq 0: \|x_-(t)\| \leq Ke^{-\beta t},$$

$$\exists K > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall t \leq 0: \|x_+(t)\| \leq Ke^{\beta t}.$$

Доведення. Оскільки проєктори P_- , P_+ комутують з оператором $C = C_1$, то ними можна подіяти на обидві частини рівняння (4) і показати, що x_- , x_+ є розв'язками. Оцінки випливають з оцінок теореми.

Застосування до неоднорідного рівняння. Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$x'(t) = \sum_{k=1}^m A_k x(t-k) + y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

де $\{A_k: 1 \leq k \leq m\} \subset L(X)$. Якщо $y \in C(\mathbb{R}, X)$ — відома функція, то функцію $x \in C^1(\mathbb{R}, X)$, що задовольняє рівняння (1), називають розв'язком цього рівняння.

Для застосування оцінок, які дає експоненціальна дихотомія, розглянемо неоднорідне рівняння, що відповідає (2):

$$x_{n+1}(t) = x_n(1) + \sum_{k=1}^m A_k \int_0^t x_{n+1-k}(s)ds + z_n(t), \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

де $\{z_n: n \geq 1\} \subset Z_1$ — відома послідовність, $\{x_n: n \geq 1\} \subset Z_1$ — шукана послідовність.

Лема 3. Нехай для заданої функції $y \in C(\mathbb{R}, X)$ функція $x \in C^1(\mathbb{R}, X)$ є розв'язком рівняння (8). Тоді послідовність функцій $\{x_n: n \in \mathbb{Z}\} \subset Z_1$, що визначається рівностями

$$x_n(t) = x(t+n), \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{Z},$$

є розв'язком різницево-інтегрального рівняння (9), в якому

$$z_n(t) = \int_0^t y(s+n+1)ds, \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{Z}$$

(при цьому $\{z_n: n \in \mathbb{Z}\} \subset Z_1$).

Доведення аналогічне доведенню леми 1.

Ця лема дозволяє звести рівняння (8) до різницево-інтегрального рівняння (9), яке в свою чергу можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^m C_k x_{n+1-k} + z_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Зауважимо, що це різницеве рівняння зручно подати у вигляді рівняння

$$u_{n+1} = Cu_n + v_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

у просторі Z_1^m з нормою $\|u\| = \sum_{k=1}^m \|u_k\|_1$, де

$$u_n = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1})^T,$$

$$v_n = (z_n, 0, \dots, 0)^T, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Існування, єдиність і оцінки розв'язків абстрактних різницевого рівняння такого типу вивчалися, зокрема, в роботах [10–12]. Зокрема, відомо, що існування і єдиність обмеженого розв'язку не змінюються при переході до цього рівняння [10, 11].

Наявність дихотомії дозволяє розщепити рівняння (8) на два рівняння у просторах Z_- та Z_+ , що дає можливість описати асимптотичну поведінку на нескінченності [11].

Особливо простий результат можна отримати у випадку одного запізнення. Якщо в цьому випадку x — розв'язок диференціального рівняння (7), то його компоненти x_+ , x_- , утворені за формулами

$$x_+(t) = (P_+x_n)(t-n), \quad t \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x_-(t) = (P_-x_n)(t-n), \quad t \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x_n(t) = x(t+n), \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{Z},$$

є розв'язками рівнянь

$$x'_-(t) = A_1x_-(t) + y_-(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$x'_+(t) = A_1x_+(t) + y_+(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

де

$$y_+(t) = (P_+y_n)(t-n), \quad t \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$y_-(t) = (P_-y_n)(t-n), \quad t \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$y_n(t) = y(t+n), \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. A. V. Chaikovs'kyi, *On solutions defined on an axis for differential equations with shifts of the argument*, Ukr. Math. J., **63**, № 9, 1470–1477 (2012).
2. A. V. Chaikovs'kyi, *Investigation of one linear differential equation by using generalized functions with values in a Banach space*, Ukr. Math. J., **53**, № 5, 796–803 (2001).

3. F. Riss, B. Sekefalvi-Nad, *Lectures on functional analysis*, Ungar Publ., New York (1955).
4. J. K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer, New York (1977).
5. Jack K. Hale, Weinian Zhang, *On uniformity of exponential dichotomies for delay equations*, J. Different. Equat., **204**, 1–4 (2004).
6. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, VSP, Utrecht, Boston (2004).
7. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, De Gruyter, Berlin (2016).
8. A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, *Exponential dichotomy and bounded solutions of differential equations in the Frechet space*, Ukr. Math. J., **66**, № 12, 1781–1792 (2015).
9. A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Dichotomy on semiaxes and the solutions of linear systems with delay bounded on the entire axis*, J. Math. Sci., **220**, № 4, 377–393 (2017).
10. A. M. Gomilko, M. F. Gorodnii, O. A. Lagoda, *On the boundedness of a recurrence sequence in a Banach space*, Ukr. Math. J., **55**, № 10, 1699–1708 (2003).
11. M. F. Horodnii, O. A. Lahoda, *Bounded solutions for some classes of difference equations with operator coefficients*, Ukr. Math. J., **53**, № 11, 1817–1824 (2001).
12. A. Chaikovs'kyi, O. A. Lagoda, *Bounded solutions of difference equations in a banach space with input data from subspaces*, Ukr. Math. J., **73**, № 12, 1810–1824 (2022).

Одержано 01.05.23