

Леонід Бедратюк¹ (Хмельницький національний університет),

Анатолій Петравчук, Євген Чаповський (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ЦЕНТРАЛІЗАТОРИ ЛІНІЙНИХ І ЛОКАЛЬНО НІЛЬПОТЕНТНИХ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ

Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field of characteristic zero, $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ be the polynomial algebra and $W_n(\mathbb{K})$ be the Lie algebra of all $\mathbb{K}$ -derivations on $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. For any derivation D with linear components, we describe the centralizer of D in $W_n(\mathbb{K})$, and propose an algorithm for finding the generators of this centralizer regarded as a module over the ring of constants of the derivation D in the case where D is a basic Weitzenboeck derivation. In a more general case where a finitely generated integral domain A over the field $\mathbb{K}$ is considered instead of the polynomial algebra $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ and D is a locally nilpotent derivation on A , we prove that the centralizer $C_{\text{Der } A}(D)$ of D in the Lie algebra $\text{Der } A$ of all $\mathbb{K}$ -differentiations on A is a “large” subalgebra of $\text{Der } A$. Specifically, the rank of $C_{\text{Der } A}(D)$ over A is equal to the transcendence degree of the field of fractions $\text{Frac}(A)$ over the field $\mathbb{K}$.

Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ — алгебра многочленів, а $W_n(\mathbb{K})$ — алгебра Лі всіх $\mathbb{K}$ -диференціювань на $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Для довільного диференціювання D з лінійними компонентами описано централізатор D в $W_n(\mathbb{K})$ і запропоновано алгоритм знаходження його твірних як модуля над кільцем сталих диференціювань D у випадку, коли D є базовим диференціюванням Вейтценбека. У більш загальному випадку, коли замість алгебри многочленів $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ розглядається скінченнопороджена область цілісності A над полем $\mathbb{K}$ і D є локально нільпотентним диференціюванням на A , доведено, що централізатор $C_{\text{Der } A}(D)$ диференціювання D в алгебрі Лі $\text{Der } A$ всіх $\mathbb{K}$ -диференціювань на A є „великою” підалгеброю в $\text{Der } A$, а саме ранг $C_{\text{Der } A}(D)$ над A дорівнює степеню трансцендентності поля часток $\text{Frac}(A)$ над полем $\mathbb{K}$.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ — алгебра многочленів, а $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ — поле раціональних функцій n змінних над цим полем.

Нагадаємо, що $\mathbb{K}$ -диференціюванням алгебри A називають $\mathbb{K}$ -лінійне відображення $D: A \rightarrow A$, таке що $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ для довільних $f, g \in A$. Кожне диференціювання D алгебри A однозначно продовжується на відповідне поле часток R . Це продовження будемо також позначати через D , якщо це не призводить до непорозуміння. Всі $\mathbb{K}$ -диференціювання алгебри A утворюють алгебру Лі $\text{Der}_{\mathbb{K}} A$ над полем $\mathbb{K}$ щодо операції комутування. Позначимо $W_n(\mathbb{K}) := \text{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Кожен елемент із $W_n(\mathbb{K})$ можна однозначно записати у вигляді $D = f_1 \partial_1 + \dots + f_n \partial_n$, де $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ і $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ — частинні похідні на $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Алгебру Лі всіх $\mathbb{K}$ -диференціювань поля $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ будемо позначати через $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$; елементи цієї алгебри Лі однозначно записують у вигляді $D = \varphi_1 \partial_1 + \dots + \varphi_n \partial_n$, де $\varphi_i \in \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ і $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ — частинні похідні на $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$.

Структура алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$ викликає значний інтерес, оскільки з геометричної точки зору $W_n(\mathbb{K})$ є алгеброю Лі векторних полів на $\mathbb{K}^n$ з поліноміальними коефіцієнтами, а з точки зору теорії диференціальних рівнянь диференціюванню $D = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$ відповідає автономна система диференціальних рівнянь $\dot{x} = f(x)$, де $x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ і $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

¹ Відповідальний за листування, e-mail: LeonidBedratyuk@khmnu.edu.ua.

Для довільного диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$ позначимо через $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ множину всіх елементів із алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$, які комутують з D (далі будемо скорочено позначати $C_{W_n}(D)$). Очевидно, що $C_{W_n}(D)$ — підалгебра алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$, яка містить D . Опис централізаторів диференціювань $D \in W_n(\mathbb{K})$ є важливою задачею, яка тісно пов'язана з деякими проблемами із теорії диференціальних рівнянь і диференціальної геометрії. Цю задачу розв'язано лише для окремих класів диференціювань (див., наприклад, [2, 3, 8, 10, 11]).

Опишемо коротко структуру статті. У другому пункті ми розглядаємо централізатори лінійних диференціювань, тобто диференціювань вигляду $D = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$, $f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Такому диференціюванню відповідає матриця $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, а комутатору диференціювань D і $D' = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_j \partial_i$ з матрицею $B = (b_{ij})$ — матриця $[A, B] = AB - BA$. Тому алгебра Лі всіх лінійних диференціювань ізоморфна повній матричній алгебрі Лі $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Для простоти будемо позначати алгебру Лі всіх лінійних диференціювань на $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ через $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ і вважати, що $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \subset W_n(\mathbb{K})$.

Для лінійного диференціювання $D = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \partial_i$ можна розглядати два централізатори: $C_0 := C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)$ і $C := C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ (очевидно, $C_0 \subseteq C$). Структура централізатора C_0 є відомою, оскільки C_0 складається з диференціювань, визначених матрицями, що комутують з $A = (a_{ij})$. Задачу опису таких матриць (задачу Фробеніуса) розв'язано давно (див., наприклад, [5]). Виявилось, що в деякому сенсі підалгебра C близька до C_0 . Це показано в теоремі 1, де доведено, що $C = (FC_0) \cap W_n(\mathbb{K})$, де F — поле сталих диференціювання D в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. На жаль, ця теорема не дає можливості знаходити $C_{W_n}(D)$, оскільки перетин $(FC_0) \cap W_n(\mathbb{K})$ дуже важко знаходити. Тому в третьому пункті для найважливішого випадку, коли матриця лінійного диференціювання має жорданову нормальну форму у вигляді однієї жорданової клітини, вказано метод знаходження системи твірних централізатора C як модуля над ядром $\text{Ker } D$ в $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (теорема 3). Для розв'язання цієї задачі було знайдено опис ядер степенів D^n диференціювання Вейтценбека за умови, що вже знайдено систему твірних $\text{Ker } D$ (теорема 2). Зауважимо, що побудові системи твірних $\text{Ker } D$, тобто кілець сталих локально нільпотентних диференціювань D , присвячено багато робіт (див., наприклад, [1, 7, 9]).

Четвертий пункт присвячено вивченню централізаторів локально нільпотентних диференціювань D скінченнопороджених областей цілісності A над довільним полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль. У випадку, коли D має слайс в A , тобто такий елемент s , що $D(s) = 1$, доведено, що $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D) \simeq C^{(-)} \ltimes \text{Der } C$, де $C = \text{Ker } D$ в A , $C^{(-)}$ — векторний простір над $\mathbb{K}$ з нульовим множенням, тобто абелева алгебра Лі й елементи із $\text{Der}_{\mathbb{K}} C$ діють на $C^{(-)}$ як диференціювання кільця C (див. твердження 2). У загальному ж випадку показано, що для локально нільпотентного диференціювання D області цілісності A над $\mathbb{K}$ зі степенем трансцендентності n централізатор $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$ має ранг n над A (див. теорему 4). Зауважимо, що з іншої точки зору централізатори локально нільпотентних диференціювань вивчалися в роботі [10].

Позначення у статті стандартні. Якщо L — підалгебра в алгебрі Лі $\text{Der}_{\mathbb{K}}(A)$ і R — поле часток для A , то рангом L над A називають розмірність $\dim_R RL$. Індексом диференціювання D будемо називати найменший з номерів ненульових коефіцієнтів у записі $D = f_1 \partial_1 + \dots + f_n \partial_n$. Диференціювання D називають локально нільпотентним, якщо для кожного $a \in A$ існує таке $k = k(a)$, що $D^k(a) = 0$. Найменше натуральне k таке, що $D^k(a) \neq 0$, але $D^{k+1}(a) = 0$,

називають D -порядком елемента a і позначають $\text{ord}_D(a)$. Для скорочення запису будемо писати $C_{W_n}(D)$ і $C_{\mathfrak{gl}_n}(D)$, не вказуючи фіксоване основне поле $\mathbb{K}$.

2. Централізатори лінійних диференціювань. Скрізь у цьому пункті $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Лема 1. Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$, $f \in \text{Ker } D$ і θ — довільний автоморфізм алгебри A . Тоді $\theta^{-1}D\theta \in W_n(\mathbb{K})$ і

- 1) $\text{Ker}_A(\theta^{-1}D\theta) = \theta^{-1}(\text{Ker } D)$;
- 2) $\theta^{-1}(fD)\theta = \theta^{-1}(f)\theta^{-1}D\theta$;
- 3) $C_{W_n}(D) = \theta(C_{W_n}(\theta^{-1}D\theta))\theta^{-1}$.

Лема 2. Диференціювання $D = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$, $T = \sum_{i=1}^n g_i \partial_i$ алгебри A , де $f_i, g_i \in A$, комутують тоді й лише тоді, коли $D(g_i) = T(f_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Доведення. Достатньо зауважити, що $f_i = D(x_i)$, $g_i = T(x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Лема 3. Нехай $D = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i \in W_n(\mathbb{K})$ — таке диференціювання, що $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$ і $f_{k+1}, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$. Якщо $T = \sum_{i=1}^n g_i \partial_i \in C_{W_n}(D)$, то диференціювання $T_1 = \sum_{i=1}^k g_i \partial_i$ і $T_2 = \sum_{i=k+1}^n g_i \partial_i$ належать $C_{W_n}(D)$ і $T = T_1 + T_2$.

Доведення. Запишемо $T_1 = \sum_{i=1}^n t_i \partial_i$, де $t_i = g_i$, $i = 1, \dots, k$ і $t_i = 0$, $i = k+1, \dots, n$, і покажемо, що $[T_1, D] = 0$. Для цього за лемою 2 достатньо довести, що $T_1(f_i) = D(t_i)$, $i = 1, \dots, n$. Нехай спочатку $i = 1, \dots, k$. Тоді $t_i = g_i$ і $T_1(f_i) = T(f_i) = D(g_i) = D(t_i)$. Нехай тепер $i = k+1, \dots, n$. Тоді $T_1(f_i) = 0$ згідно з умовою $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$ і $D(t_i) = D(0) = 0$. Таким чином, $D(t_i) = T_1(f_i)$ для $i = 1, \dots, n$ і за лемою 2 $[D, T_1] = 0$. Аналогічно можна показати, що $[D, T_2] = 0$.

Зауваження 1. Легко бачити, що твердження лем 2 та 3 залишаються справедливими і для диференціювань поля раціональних функцій $R = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, тобто елементів алгебри Лі $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$.

Теорема 1. Нехай $D = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \partial_i \in W_n(\mathbb{K})$ — лінійне диференціювання, $F = \text{Ker}_R D$ — поле сталих для D в R . Тоді $C_{W_n}(D) = (FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)) \cap W_n(\mathbb{K})$.

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що матрицю $A = (a_{ij})$ диференціювання D записано у жордановій нормальній формі:

$$A = \bigoplus_{i=1}^t J_{n_i - n_{i-1}}(\lambda_i) \quad \text{для деяких} \quad 0 = n_0 < n_1 < \dots < n_t = n, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{K} \quad (1)$$

(розглядаємо нижньотрикутні жорданові блоки). Справді, для цього достатньо скористатися лемою 1. Далі, оскільки сума (1) пряма, то $D = D_1 + \dots + D_t$, де $D_i \in W_n(\mathbb{K})$, і визначається матрицею

$$O_{n_1} \oplus \dots \oplus O_{n_{i-1} - n_{i-2}} \oplus J_{n_i - n_{i-1}}(\lambda_i) \oplus O_{n_{i+1} - n_i} \oplus \dots \oplus O_{n_t - n_{t-1}}.$$

Тут O_j — квадратна нульова матриця порядку j . Нехай $T \in C_{W_n}(D)$ — довільний елемент централізатора. Тоді за лемою 3, яку легко перенести на скінченне число доданків, має місце рівність $T = T_1 + \dots + T_t$, де $T_i = \sum_{s=n_{i-1}+1}^{n_i} g_s \partial_s$ лежать в $C_{W_n}(D)$ (зауважимо, що в загальному випадку многочлени g_j залежать від усіх змінних $x_1, \dots, x_n$). Покажемо спочатку, що

$$T_1 = \sum_{s=1}^{n_1} g_s \partial_s \in (FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)) \cap W_n(\mathbb{K}).$$

Тут диференціювання D_1 визначене матрицею вигляду $J_{n_1}(\lambda_1) \oplus O_{n_2-n_1} \oplus \dots \oplus O_{n_t-n_{t-1}}$, де

$$J_{n_1}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

За лемою 2 з умови $[D, T_1] = 0$ випливає, що

$$D(g_1) = \lambda_1 g_1, \quad D(g_2) = \lambda_1 g_2 + g_1, \quad \dots, \quad D(g_{n_1}) = \lambda_1 g_{n_1} + g_{n_1-1}.$$

Нехай r — індекс диференціювання T_1 , тобто найменше натуральне число, таке що $g_r \neq 0$. Тоді $g_{r-1} = 0$ і тому $D(g_r) = \lambda_1 g_r$. З іншого боку, очевидно, що

$$D(x_1) = \lambda_1 x_1, \quad D(x_2) = \lambda_1 x_2 + x_1, \quad \dots, \quad D(x_{n_1}) = \lambda_1 x_{n_1} + x_{n_1-1}.$$

Враховуючи, що за зазначеним вище $g_r \neq 0$, отримуємо, що $g_r/x_1 \neq 0$ і $D(g_r/x_1) = 0$, тобто $g_r/x_1 \in F$, де $F = \text{Ker}_R D$ — поле сталих для D в R .

Далі розглянемо лінійне диференціювання $D_1 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \subset W_n(\mathbb{K})$, яке визначене матрицею

$$J_{n_1}(\lambda_1) \oplus O_{n_2-n_1} \oplus \dots \oplus O_{n_t-n_{t-1}}.$$

Очевидно, $[D_1, D] = 0$ і $D_1 = W_1 + V_1$, де лінійні диференціювання W_1, V_1 визначені діагональною і нижньотрикутною матрицями

$$d_{n_1}(\lambda_1) \oplus O_{n_2-n_1} \oplus \dots \oplus O_{n_t-n_{t-1}}$$

і

$$M_1 = J_{n_1}(0) \oplus O_{n_2-n_1} \oplus \dots \oplus O_{n_t-n_{t-1}}$$

відповідно. Легко бачити, що $[W_1, D] = 0$, а тому також $[V_1, D] = 0$. Можна безпосередньо перевірити, що лінійне диференціювання $V_1^{(r-1)}$, яке визначене матрицею M_1^{r-1} , має вигляд $x_1 \partial_r + \dots + x_{n_1-r+1} \partial_{n_1}$ і комутує з D . Тоді

$$T_1^{(2)} := \left(T_1 - \frac{g_r}{x_1} V_1^{(r-1)} \right) \in FC_{W_n}(D) \subset \widetilde{W}_n(\mathbb{K})$$

(нагадаємо, що $g_r/x_1 \in F$). Але тоді $T_1^{(2)}$ має більший індекс, ніж T_1 (за означенням індекс — найменший з номерів ненульових коефіцієнтів диференціювання). Повторюючи ці міркування достатню кількість разів, з урахуванням зауваження 1 отримуємо деяке диференціювання $T_1^{(s)}$, $s \geq 2$, яке комутує з D і має вигляд $h_{n_1} \partial_{n_1}$ для деякої раціональної функції $h_{n_1} \in FA \subset \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. Але тоді з умови $[D, h_{n_1} \partial_{n_1}] = 0$ випливає, що $D(h_{n_1}) = 0$, тобто $h_{n_1} \partial_{n_1} \in FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)$. Звідси випливає, що диференціювання T_1 є сумою деяких диференціювань із $FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)$, бо на кожному кроці ми віднімали від T_1 деяке диференціювання із $FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)$. Тому $T_1 \in (FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)) \cap W_n(\mathbb{K})$.

Аналогічно можна показати, що $T_i \in (FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)) \cap W_n(\mathbb{K})$ для $i = 2, \dots, t$, що завершує доведення теореми.

3. Централізатор базисного диференціювання Вейтценбека. Лінійне диференціювання D на $A := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ називають базисним диференціюванням Вейтценбека, якщо воно задане матрицею $J_n(0)$, яка складається з єдиної жорданової клітини з власним числом $\lambda = 0$ (розглядаємо нижньотрикутні жорданові клітини). У координатній формі маємо $D = x_1\partial_2 + \dots + x_{n-1}\partial_n$. Тоді за лемою 2 для довільного диференціювання $T = \sum_{i=1}^n g_i\partial_i$, яке комутує з D , маємо

$$D(g_1) = 0, \quad D(g_2) = g_1, \quad \dots, \quad D(g_n) = g_{n-1}.$$

Для довільного многочлена $f \in A$ позначимо через D_f диференціювання кільця многочленів вигляду

$$D_f = D^{n-1}(f)\partial_1 + D^{n-2}(f)\partial_2 + \dots + D(f)\partial_{n-1} + f\partial_n.$$

Має місце такий зручний критерій для перевірки того, чи буде диференціювання $T \in W_n(\mathbb{K})$ комутувати з диференціюванням Вейтценбека.

Твердження 1. Диференціювання $T \in W_n(\mathbb{K})$ комутує з базисним диференціюванням Вейтценбека D тоді й лише тоді, коли $T = D_f$ для деякого многочлена $f \in A$ D -порядку не вище ніж $n - 1$.

Доведення. Нехай $T = \sum_{i=1}^n g_i\partial_i$ для деяких многочленів $g_i \in A$ і $T \in C_{W_n}(D)$. Тоді з умови $[T, D] = 0$ за лемою 2 одержимо рівності $D(g_1) = 0, D(g_2) = g_1, \dots, D(g_n) = g_{n-1}$, а тому g_n — многочлен D -порядку $\leq n - 1$. Поклавши $f = g_n$, отримаємо $T = D_f$ і $\text{ord}_D(f) \leq n - 1$. Навпаки, якщо $T = \sum_{i=1}^{n-1} D^{n-i}(f)\partial_i + f\partial_n$ і $\text{ord}_D(f) \leq n - 1$, то знову за лемою 2 $[T, D] = 0$.

Диференціювання Вейтценбека D на $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ визначає фільтрацію

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots,$$

де

$$A_1 = \text{Ker } D, \quad A_i = \{f \in A \mid D(f) \in A_{i-1}\}, \quad i = 2, \dots$$

Тоді з твердження 1 випливає, що для опису $C_{W_n}(D)$ достатньо дослідити члени фільтрації A_i з $i \leq n - 1$, бо всі $T \in C_{W_n}(D)$ мають вигляд $T = \sum_{i=1}^n D^{n-i}(f)\partial_i$ для $f \in A_{n-1}$. Зауважимо, що A_{n-1} — модуль над алгеброю сталих $A_1 = \text{Ker } D$ диференціювання D .

Для вивчення A_{n-1} скористаємося методом із роботи [1], де диференціювання Вейтценбека D було вкладено в тривимірну підалгебру $L = \mathbb{K}\langle D, \hat{D}, H \rangle \subset W_n(\mathbb{K})$, яка ізоморфна тривимірній простій алгебрі Лі $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Лінійні диференціювання $\hat{D}$ і H на A визначимо за правилом

$$\hat{D}(x_i) = i(n - i)x_{i+1}, \quad H(x_i) = (n - 2i + 1)x_i.$$

Безпосередньо можна перевірити (див. [1]), що виконуються комутаторні співвідношення

$$[D, \hat{D}] = H, \quad [H, D] = 2D, \quad [H, \hat{D}] = -2\hat{D}, \quad (2)$$

тобто $L \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Диференціювання $\hat{D}$, очевидно, локально нільпотентне. $\hat{D}$ -порядок многочлена $f \in A$ будемо позначати $\text{ord}(f)$ і називати просто порядком. Легко перевірити, що довільний моном $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in A$ є власним вектором для H з власним значенням

$$\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = n \sum_{i=1}^n \alpha_i - (\alpha_1 + 3\alpha_2 + \dots + (2i-1)\alpha_i + \dots + (2n-1)\alpha_n).$$

Це власне значення називають вагою цього монома. Многочлен $f \in A$ називають *ізобарним*, якщо всі його мономи мають одну і ту ж вагу. Оскільки мономи утворюють базис векторного простору $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ над $\mathbb{K}$, тобто $A = \bigoplus_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \mathbb{K} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, то H діагоналізується в цьому базисі. Але тоді $A = \bigoplus_{\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}} A_{\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}}$ — пряма сума підпросторів, де $A_{\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}}$ — лінійна оболонка всіх мономи ваги $\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$, тобто $A_{\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}}$ складається з ізобарних многочленів ваги $\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$.

Твердження наступної технічної лема безпосередньо випливають із властивостей модулів над алгеброю Лі $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ (див., наприклад, [6]).

Лема 4. Нехай D — диференціювання Вейтценбека на $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ і $f, g \in A$ — ізобарні многочлени ваги λ і μ відповідно. Тоді:

- 1) $D(f)$ — ізобарний многочлен ваги $\lambda + 2$, а $\widehat{D}(f)$ — ізобарний многочлен ваги $\lambda - 2$;
- 2) fg — ізобарний многочлен ваги $\lambda + \mu$;
- 3) якщо $f \in \text{Ker } D$ і $f = f_{\lambda_1} + \dots + f_{\lambda_k}$ — розклад f у суму ізобарних многочленів попарно різної ваги, то $f_{\lambda_i} \in \text{Ker } D$, $i = 1, \dots, k$.

З відомої теореми Вейтценбека [12] випливає, що алгебра сталих $\text{Ker } D$ диференціювання Вейтценбека алгебри многочленів $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ скінченнопороджена. Збільшуючи, якщо потрібно, кількість твірних, можна за лемою 4 завжди вважати, що $\text{Ker } D$ має скінченну систему твірних із ізобарних многочленів. Наступна лема вказує на поведінку елементів із фільтрації $0 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, яку побудовано з ядер лінійних відображень $\text{Ker } D^i$ під дією диференціювань D і $\widehat{D}$.

Лема 5. Нехай $b \in A_k \setminus A_{k-1}$ — ізобарний многочлен, $k \geq 2$. Тоді:

- 1) $\widehat{D}(D(b)) \in A_k \setminus A_{k-1}$;
- 2) $D^{s-1}(\widehat{D}D(b)) = \widehat{D}D^s(b) + \lambda D^{s-1}(b)$ для довільного $s \geq 2$ і деякого $\lambda = \lambda(s) \in \mathbb{K}$.

Доведення. 1. Нехай $\deg b = t$ і V — множина всіх многочленів із A степеня не більшого ніж t . Оскільки D , $\widehat{D}$ і $H = [D, \widehat{D}]$ — лінійні диференціювання на A , то V — інваріантний підпростір щодо алгебри Лі $L = \mathbb{K}\langle D, \widehat{D}, H \rangle \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. При цьому $b \in V$ і $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Тоді L -модуль V розкладається в пряму суму $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ незвідних L -модулів і $b = b_1 + \dots + b_m$, де $b_i \in V_i$. Оскільки $D^{k-1}(b) \neq 0$, $D^k(b) = 0$, то хоча б один із доданків, наприклад b_i , має таку саму властивість, тобто $D^{k-1}(b_i) \neq 0$, $D^k(b_i) = 0$. Виберемо в незвідному L -модулі V_i стандартний базис $v_0, \dots, v_{n_i}$ (див., наприклад, [6]), позначимо $e := D$, $f := \widehat{D}$, $h := H$ і запишемо $b_i = \alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1}$. Тоді, як неважко переконатися, $D^{k-1}(\widehat{D}D(b_i)) \neq 0$, але $D^k(\widehat{D}D(b_i)) = 0$. Звідси випливає, що $D^k(\widehat{D}D(b)) = 0$, $D^{k-1}(\widehat{D}D(b)) \neq 0$, тобто $\widehat{D}D(b) \in A_k \setminus A_{k-1}$.

2. Застосуємо індукцію по s . Якщо $s = 2$, то $D\widehat{D}D(b) = \widehat{D}D^2(b) + HD(b) = \widehat{D}D^2(b) + \lambda D(b)$ для деякого $\lambda \in \mathbb{K}$, бо $D(b)$ за лемою 4 є також ізобарним многочленом (нагадаємо, що за умовою лема b — ізобарний многочлен). Припустимо, що твердження 2 лема справедливе для $s - 1$, і доведемо його для s . Маємо $D^{s-1}(\widehat{D}D(b)) = D(D^{s-2}\widehat{D}D(b)) = D(\widehat{D}D^{s-1}(b) + \mu D^{s-2}(b))$ для деякого $\mu \in \mathbb{K}$ за індуктивним припущенням. Тоді

$$D^{s-1}(\widehat{D}D(b)) = D\widehat{D}D^{s-1}(b) + \mu D^{s-1}(b) = (\widehat{D}D + H)D^{s-1}(b) + \mu D^{s-1}(b)$$

$$\begin{aligned} &= \widehat{D}D^s(b) + HD^{s-1}(b) + \mu D^{s-1}(b) = \widehat{D}D^s(b) + \alpha D^{s-1}(b) + \mu D^{s-1}(b) \\ &= \widehat{D}D^s(b) + (\alpha + \mu)D^{s-1}(b). \end{aligned}$$

Тут використано те, що $D^{s-1}(b)$ є ізобарним многочленом з деяким власним значенням α для H .

Лему доведено.

Далі, нехай $a_1, \dots, a_k$ — система твірних ядра $A_1 = \text{Ker } D$ (як підалгебри алгебри A), яка складається з ізобарних многочленів. Для зручності будемо вважати, що $\widehat{D}^0(a_i) = 1$, $i = 1, \dots, k$. Розглянемо систему підмножин із A вигляду

$$S_i = \left\{ \widehat{D}^{k_1}(a_{i_1}) \times \dots \times \widehat{D}^{k_t}(a_{i_t}) \mid a_{i_j} \in \{a_1, \dots, a_k\}, k_j \geq 0, \sum_{j=1}^t k_j \leq i-1 \right\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

За нашими домовленостями, очевидно, $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{1, \widehat{D}(a_1), \dots, \widehat{D}(a_k)\}$, а за лемою 4 всі елементи із множин S_i є ізобарними многочленами.

Теорема 2. Нехай D — диференціювання Вейтценбека на $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Виберемо будь-яку систему ізобарних твірних $a_1, \dots, a_k$ для ядра $A_1 = \text{Ker } D$ як підалгебри алгебри A і позначимо $A_i = \text{Ker } D^i$, $i \geq 1$. Тоді кожне A_i , $i \geq 1$, є A_1 -модулем з системою твірних (як модуля)

$$S_i = \left\{ \widehat{D}^{k_1}(a_{i_1}) \times \dots \times \widehat{D}^{k_t}(a_{i_t}) \mid a_{i_j} \in \{a_1, \dots, a_k\}, \sum_{j=1}^t k_j \leq i-1 \right\}.$$

Доведення. Проведемо індукцію по i . Для $i = 1$ все очевидно, оскільки A_1 , як модуль над A_1 , породжений елементом 1. Припустимо, що твердження теореми справедливе для $i-1$, і доведемо його для i . Нехай b — довільний елемент із $A_i \setminus A_{i-1}$. Тоді $b = b_1 + \dots + b_t$, де b_s — ізобарні многочлени попарно різної ваги, $b_s \in A_i$, $s = 1, \dots, t$, і хоча б один із многочленів b_s належить множині $A_i \setminus A_{i-1}$. Тому, не втрачаючи загальності, можна вважати, що b — ізобарний многочлен.

За лемою 5 має місце включення $\widehat{D}D(b) \in A_i \setminus A_{i-1}$ і за тією ж лемою

$$D^{i-1}(\widehat{D}D(b)) = \widehat{D}D^i(b) + \lambda D^{i-1}(b) \quad (3)$$

для деякого $\lambda \in \mathbb{K}$. Оскільки $b \in A_i$, то $D^i(b) = 0$, і тому із рівності (3) отримуємо, що $D^{i-1}(\widehat{D}D(b)) = \lambda D^{i-1}(b)$ для деякого $\lambda \in \mathbb{K}$. Оскільки за лемою 5 $\widehat{D}D(b) \in A_i \setminus A_{i-1}$, то $\lambda \neq 0$. Отже, одержали рівність $D^{i-1}(\widehat{D}D(b) - \lambda b) = 0$. Це означає, що $d := \widehat{D}D(b) - \lambda b \in A_{i-1}$. За індуктивним припущенням d є лінійною комбінацією елементів множини S_{i-1} з коефіцієнтами із $A_1 = \text{Ker } D$. Далі, $D(b) \in A_{i-1}$, звідки за індуктивним припущенням також

$$D(b) = \sum_{s_j \in S_{i-1}} c_j s_j, \quad c_j \in A_1.$$

Тому виконується рівність

$$\widehat{D}D(b) = \sum_{s_j \in S_{i-1}} (\widehat{D}(c_j)s_j + c_j \widehat{D}(s_j)). \quad (4)$$

Зауважимо, що $\widehat{D}(s_j)$ є лінійною комбінацією елементів із S_i з цілочисловими коефіцієнтами. Крім того, для $c_j \in A_1 = \text{Ker } D$ маємо, що $c_j = c_j(a_1, \dots, a_k)$ — многочлен твірних $a_1, \dots, a_k$ ядра $\text{Ker } D = A_1$. Тому, як неважко переконатися,

$$\widehat{D}(c_j) = \sum_{s=1}^k \frac{\partial c_j}{\partial a_s}(a_1, \dots, a_k) \widehat{D}(a_s),$$

а отже, $\widehat{D}(c_j)$ є лінійною комбінацією елементів із S_2 з коефіцієнтами із A_1 . Із рівності (4) отримуємо, що $\widehat{D}D(b)$ є лінійною комбінацією елементів із S_i з коефіцієнтами з $A_1 = \text{Ker } D$. Але $b = \lambda^{-1}(\widehat{D}D(b) - d)$. Це означає, що S_i — система твірних A_1 -модуля A_i .

Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай D — диференціювання Вейтценбека на $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $a_1, \dots, a_k$ — система твірних ядра $A_1 = \text{Ker } D$ (як підалгебри з A) і

$$S_n = \left\{ \widehat{D}^{k_1}(a_{i_1}) \times \dots \times \widehat{D}^{k_t}(a_{i_t}) \mid a_{i_j} \in \{a_1, \dots, a_k\}, \sum_{j=1}^t k_j \leq n-1 \right\}.$$

Тоді $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$, як модуль над $\text{Ker } D$, має систему твірних $\{D_s \mid s \in S_n\}$.

Доведення. Для довільного $s \in S_n$ маємо $D^n(s) = 0$. За твердженням 1 диференціювання D_s має вигляд

$$D_s = \sum_{i=1}^{n-1} D^{n-i}(s) \partial_i + s \partial_n \in C_{W_n}(D).$$

Нехай T — довільний елемент із $C_{W_n}(D)$. Тоді за твердженням 1 $T = D_b$ для деякого $b \in A_n$. Але за теоремою 2 $b = \sum_{s \in S_n} r_s s$, де $r_s \in \text{Ker } D$ для кожного $s \in S_n$. Тому $D_b = \sum_{s \in S_n} r_s D_s$. Звідси випливає, що D_s , де s пробігає S_n , є системою твірних для $\text{Ker } D$ -модуля $C_{W_n}(D)$.

Приклад 1. Побудуємо систему твірних для централізатора $C_{W_3(\mathbb{K})}(D_3)$ як модуля над ядром диференціювання Вейтценбека D_3 кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$.

Ядро D_3 породжують ізобарні многочлени $a_1 = x_1$, $a_2 = x_1 x_3 - (1/2)x_2^2$ (див., наприклад, [1]). Зауважимо, що

$$\widehat{D}(x_1) = x_2, \quad \widehat{D}(x_1 x_3 - (1/2)x_2^2) = 0, \quad \widehat{D}^2(x_1) = x_3, \quad \widehat{D}^2(x_1 x_3 - (1/2)x_2^2) = 0.$$

Тоді для A_1 -модулів A_1 , A_2 , A_3 відповідно маємо системи твірних

$$S_1 = \{1\}, \quad S_2 = \{1, x_2\}, \quad S_3 = \{1, x_2, 2x_3, 4x_2^2\}.$$

За теоремою 3 маємо таку систему твірних централізатора $C_{W_3(\mathbb{K})}(D_3)$ як A_1 -модуля:

$$\partial_3, \quad x_1 \partial_2 + x_2 \partial_3, \quad 2x_1 \partial_1 + 2x_2 \partial_2 + 2x_3 \partial_3, \quad 8x_1^2 \partial_1 + 8x_1 x_2 \partial_2 + 4x_2^2 \partial_3.$$

Зауваження 2. Системи твірних, які побудовані в теоремах 2 і 3, не обов'язково мінімальні.

4. Централізатори локально нільпотентних диференціювань. Нижче A — область цілісності над довільним полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль. У наведеній нижче лемі зібрано деякі властивості локально нільпотентних диференціювань областей цілісності над полями характеристики нуль.

Лема 6 (див., наприклад, [4]). Нехай $D \neq 0$ — локально нільпотентне диференціювання області цілісності A над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль і $C = \text{Ker } D$. Тоді:

1) C — підкільце із A , яке інваріантне щодо довільного $T \in \text{Der}_{\mathbb{K}} A$, такого що $[T, D] = 0$;

2) якщо D має слайс s в A , тобто існує $s \in A$ такий, що $D(s) = 1$, то $A \simeq C[s]$ — кільце многочленів від s ;

3) якщо D не має слайсів в A , то існують такі $h_0 \in C$, $h_1 \in A$, що в кільці $A[h_0^{-1}]$ елемент $s = h_1/h_0$ є слайсом для продовження $\bar{D}$ на $A[h_0^{-1}]$ і ядро $\bar{D}$ в $A[h_0^{-1}]$ збігається з $C[h_0^{-1}]$.

Твердження 2. Нехай $D \neq 0$ — локально нільпотентне диференціювання області цілісності A над $\mathbb{K}$, $C = \text{Ker } D$ в A . Якщо D має слайс в A , то $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D) \simeq C \ltimes \text{Der}_{\mathbb{K}} C$, де C розглядаємо як алгебру Лі над $\mathbb{K}$ з нульовим множенням, $\text{Der}_{\mathbb{K}} C$ — алгебра Лі диференціювань асоціативної алгебри C і дія $\text{Der}_{\mathbb{K}} C$ на C природна.

Доведення. За лемою 6 $A \simeq C[s]$. Нехай T — довільний елемент із $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$. Тоді з умови $[T, D] = 0$ випливає, що $T(s) \in C$. Позначимо $c_0 := T(s)$. Легко бачити, що $T - c_0 D \in C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$ і при цьому $(T - c_0 D)(s) = 0$. Позначимо через L і M підмножини із $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$ вигляду

$$L = \{T \in C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D) \mid T(s) = 0\} \quad \text{і} \quad M = \{T \in C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D) \mid T(C) = 0\}.$$

Легко бачити, що L — підалгебра із $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$, а M — абелевий ідеал із $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$. Неважко переконатися, що $M = C \cdot D$ і $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D) \simeq M \ltimes L$ — напівпряма сума. Зауважимо, що $L \simeq \text{Der}_{\mathbb{K}} C$, оскільки кожне диференціювання алгебри C над $\mathbb{K}$ однозначно продовжується до деякого диференціювання T кільця A , такого що $T \in C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$ (для цього достатньо покласти $T(s) = 0$).

Теорема 4. Нехай A — скінченнопороджена область цілісності над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль, а $D \neq 0$ — локально нільпотентне диференціювання на A . Тоді $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$ має ранг n над A , де $n = \text{tr.deg}_{\mathbb{K}} A$.

Доведення. Нехай спочатку диференціювання D має слайс s в A . Легко бачити, що для степеня трансцендентності $C = C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$ над $\mathbb{K}$ маємо рівність $\text{tr.deg}_{\mathbb{K}} C = n - 1$ за лемою 6. Виберемо будь-який базис трансцендентності $c_1, \dots, c_{n-1}$ в C (над полем $\mathbb{K}$) і на підкільці $\mathbb{K}[c_1, \dots, c_{n-1}] \subseteq C$ розглянемо частинні похідні $\frac{\partial}{\partial c_i}$, $i = 1, \dots, n - 1$. Тоді, як відомо, ці диференціювання однозначно продовжуються на поле часток $\text{Frac}(C)$ (зберігаємо ті самі позначення для $\frac{\partial}{\partial c_i}$). Нехай $S = C \setminus \{0\}$ і $A[S^{-1}]$ — кільце часток. Оскільки $A = C[s]$, то $A[S^{-1}] = \text{Frac}(C)[s]$.

Продовжимо диференціювання $\frac{\partial}{\partial c_i}$, $i = 1, \dots, n - 1$, на $A[S^{-1}]$, поклавши $\frac{\partial}{\partial c_i}(s) = 0$, $i = 1, \dots, n - 1$. Нехай $a_1, \dots, a_k$ — довільна система твірних алгебри A і $\frac{\partial}{\partial c_i}(a_j) = e_{ij}/d_{ij}$ для деяких $e_{ij} \in A$, $d_{ij} \in S = C \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, n - 1$, $j = 1, \dots, k$. Позначимо $d = \prod_{i,j} d_{ij}$. Тоді очевидно, що $d \in C$ і $d \frac{\partial}{\partial c_i}(a_j) \in A$, $i = 1, \dots, n - 1$, $j = 1, \dots, k$. Це означає, що $d \frac{\partial}{\partial c_i}(A) \subseteq A$, $i = 1, \dots, n - 1$, і, як легко бачити, всі диференціювання $d \frac{\partial}{\partial c_i}$ комутують з диференціюванням D на A (зауважимо, що диференціювання $\frac{\partial}{\partial c_i}$ були розширені на $A[S^{-1}]$). Легко бачити, що диференціювання D , $d \frac{\partial}{\partial c_i}$, $i = 1, \dots, n - 1$, області цілісності A лінійно незалежні над R і

утворюють базис векторного простору $RC_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$ над полем $R = \text{Frac}(A)$. Це означає, що $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$ має ранг n над A .

Нехай тепер D не має слайсів в A . Тоді за лемою 6 існує локальний слайс $h_1 \in A$ такий, що $D(h_1) = h_0 \neq 0$, $h_0 \in C$ і $s = h_1/h_0$ — слайс для розширення $\bar{D}$ диференціювання D на кільце часток $A[h_0^{-1}]$.

Кожне диференціювання T кільця $C = \text{Ker } D$ можна однозначно продовжити до диференціювання $\bar{T}$ кільця $A[h_0^{-1}]$, якщо покласти $\bar{T}(s) = 0$, бо $A[h_0^{-1}] = C[h_0^{-1}][s]$ і випадок існування слайсу вже розглянуто вище. Легко бачити, що $[\bar{T}, \bar{D}] = 0$, де $\bar{D}$ — продовження D на кільце $A[h_0^{-1}]$, причому очевидно, що D — локально нільпотентне диференціювання і $\text{Ker } \bar{D} = C[h_0^{-1}]$. Для системи твірних $a_1, \dots, a_k$ алгебри A маємо $\bar{T}(a_i) = b_i/h_0^{k_i}$ для деяких $b_i \in A$ і $k_i \geq 0$. Нехай $k = \max k_i$. Тоді $h_0^k \bar{T}$ комутує з $\bar{D}$ і при цьому виконується включення $h_0^k \bar{T}(A) \subseteq A$. Оскільки домноження на степені h_0 диференціювань із $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$ не змінює ранг $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D)$ над $R = \text{Frac}(A)$, то, повторюючи міркування із випадку існування слайса, отримуємо рівність $\dim_R RC_{\text{Der}_{\mathbb{K}} A}(D) = n$.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. L. P. Bedratyuk, *Kernels of derivations of polynomial rings and Casimir elements*, Ukr. Math. J., **62**, № 4, 495–517 (2010).
2. Y. Chapovskyi, D. Efimov, A. Petravchuk, *Centralizers of elements in Lie algebras of vector fields with polynomial coefficients*, Proc. Int. Geom. Cent., **14**, № 4, 257–270 (2021).
3. D. R. Finston, S. Walcher, *Centralizers of locally nilpotent derivations*, J. Pure and Appl. Algebra, **120**, № 1, 39–49 (1997).
4. G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Encyclopedia Math. Sci., vol. 136, Springer, Berlin (2006).
5. F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*, vols. 1, 2, Chelsea Publ. Co., New York (1959).
6. J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Grad. Texts in Math., vol. 9, Springer, New York (1972).
7. M. Miyanishi, *Normal affine subalgebras of a polynomial ring*, Algebraic and Topological Theories (Kinosaki, 1984), Kinokuniya, Tokyo (1986), p. 37–51.
8. J. Nagloo, A. Ovchinnikov, P. Thompson, *Commuting planar polynomial vector fields for conservative Newton systems*, Commun. Contemp. Math., **22**, № 4, Article 1950025 (2020).
9. A. Nowicki, M. Nagata, *Rings of constants for k -derivations in $k[x_1, \dots, x_n]$* , J. Math. Kyoto Univ., **28**, № 1, 111–118 (1988).
10. D. I. Panyushev, *Two results on centralisers of nilpotent elements*, J. Pure and Appl. Algebra, **212**, № 4, 774–779 (2008).
11. A. P. Petravchuk, O. G. Iena, *On centralizers of elements in the Lie algebra of the special Cremona group $SA_2(k)$* , J. Lie Theory, **16**, № 3, 561–567 (2006).
12. R. Weitzenböck, *Über die Invarianten von linearen Gruppen*, Acta Math., **58**, № 1, 231–293 (1932).

Одержано 12.03.23