

Олександр Бойчук (Інститут математики НАН України, Київ),

Сергій Чуйко¹ (Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ Донецької обл.; Інститут динаміки складних технічних систем імені Макса Планка, Магдебург, Німеччина),

Дар'я Д'яченко (Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ Донецької обл.)

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ АДОМЯНА В ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ АВТОНОМНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

For a nonlinear autonomous boundary-value problem for ordinary differential equation in the critical case, we establish constructive conditions for the solvability and propose a scheme for the construction of solutions based on the use of Adomian's decomposition method.

Отримано конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння у критичному випадку з використанням методу декомпозиції Адомяна.

1. Постановка задачі. Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [1–3]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$$

нелінійного автономного диференціального рівняння

$$dz/dt = Az + f + Z(z), \quad (1)$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell z(\cdot) = \alpha + J(z(\cdot)). \quad (2)$$

Розв'язки задачі (1), (2) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої нетерової крайової задачі

$$dz_0/dt = Az_0 + f, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [a, b^*]. \quad (3)$$

Тут A — $(n \times n)$ -вимірна матриця, $f \in \mathbb{R}^n$, $Z(z)$ — нелінійна вектор-функція, аналітична щодо z у малому околі розв'язку породжуючої задачі, $\ell z(\cdot)$ і $J(z(\cdot))$ — відповідно лінійний і нелінійний обмежені функціонали, визначені на просторі неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій, причому другий функціонал аналітичний щодо невідомої z у малому околі розв'язку породжуючої задачі (3).

На відміну від розв'язків породжуючої нетерової крайової задачі (3), визначених на проміжку $[a, b^*]$, розв'язки нелінійної задачі (1), (2) шукаємо на проміжку $[3, 4]$

$$t \in [a, b], \quad b \neq b^*.$$

¹ Відповідальний за листування, e-mails: chujko-slav@ukr.net, chuiko@mpi-magdeburg.mpg.de.

Правий кінець b проміжку $[a, b]$, на якому шукаємо розв'язок задачі (1), (2), невідомий і підлягає визначенню в процесі побудови самого розв'язку. Будемо шукати його у вигляді

$$b = b^* + (b^* - a)\beta.$$

Припустимо, що має місце критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконується умова

$$P_{Q_d^*} \{ \alpha - \ell K[f](\cdot) \} = 0. \quad (4)$$

При цьому породжуюча задача (3) має r -параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_0 + G[f; \alpha](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Якщо умова (4) не виконується, породжуюча нетерова крайова задача (3) може бути регуляризована аналогічно [5, 6]. Тут $X(t)$ — нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (3), $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$ -матриця,

$$\text{rank } Q = n_1, \quad X_r(t) := X(t)P_{Q_r},$$

P_{Q_r} — $(n \times r)$ -вимірна матриця, утворена з r лінійно незалежних стовпців $(n \times n)$ -вимірної матриці-ортопроектора

$$P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q),$$

$P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$ -вимірна матриця, утворена з $(d := m - n_1)$ лінійно незалежних рядків $(m \times m)$ -вимірної матриці-ортопроектора

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(Q^*).$$

Крім того,

$$G[f; \alpha](t) := K[f](t) + X(t)Q^+ \{ \alpha - \ell K[f](\cdot) \}$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (3),

$$K[f](t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s)f ds$$

— оператор Гріна задачі Коші для системи (3), Q^+ — псевдообернена матриця за Муром–Пенроузом [1]. Виконуючи у задачі (1), (2) заміну незалежної змінної

$$t = a + (\tau - a)(1 + \beta), \quad (5)$$

приходимо до задачі про відшукування розв'язку

$$z(\tau) \in \mathbb{C}^1[a, b^*]$$

нелінійного автономного диференціального рівняння [1–3]

$$dz(\tau)/d\tau = Az(\tau) + f + \check{Z}(z(\tau), \beta),$$

який задовольняє крайову умову

$$\ell z(\cdot) = \check{J}(z(\cdot), \beta).$$

Тут $\ell z(\cdot)$ і $\check{J}(z(\cdot), \beta)$ — відповідно лінійний і нелінійний обмежені функціонали, визначені на просторі неперервних на відрізьку $[a, b^*]$ функцій [7, 8]. Розв’язок крайової задачі (1), (2) шукаємо у вигляді [9, 10]

$$z(\tau) := z_0(\tau, c_r) + u_1(\tau) + \dots + u_k(\tau) + \dots, \quad \beta := \beta_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_k + \dots$$

Нелінійна вектор-функція

$$\check{Z}(z(\tau), \beta) := \beta(Az(\tau) + f) + (1 + \beta)Z(z(\tau))$$

аналітична щодо невідомої $z(\tau)$ в околі розв’язку $z_0(\tau, c_0)$ породжуючої задачі (3), тому у зазначеному околі має місце розклад [10]

$$\begin{aligned} \check{Z}(z(\tau), \beta) &= \check{Z}(z_0(\tau, c_0), \beta_0) + Z_1(z_0(\tau, c_0), u_1(\tau), \gamma_1) \\ &+ Z_2(z_0(\tau, c_0), u_1(\tau), u_2(\tau), \gamma_1, \gamma_2) + \dots \\ &+ Z_k(z_0(\tau, c_0), u_1(\tau), \dots, u_k(\tau), \gamma_1, \dots, \gamma_k) + \dots \end{aligned}$$

Нелінійний обмежений векторний функціонал

$$\check{J}(z(\cdot), \beta) := (1 + \beta)(\alpha + J(z(\cdot)))$$

аналітичний щодо невідомої z у малому околі розв’язку породжуючої задачі (3), тому у зазначеному околі має місце розклад

$$\begin{aligned} \check{J}(z(\cdot), \beta) &= \check{J}(z_0(\cdot, c_0), \beta_0) + J_1(z_0(\cdot, c_0), u_1(\cdot), \gamma_1) + J_2(z_0(\cdot, c_0), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \gamma_1, \gamma_2) + \dots \\ &+ J_k(z_0(\cdot, c_0), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_k(\cdot), \gamma_1, \dots, \gamma_k) + \dots \end{aligned}$$

Перше наближення до розв’язку нелінійної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку

$$z_1(\tau) := z_0(\tau, c_0) + u_1(\tau), \quad u_1(\tau) = X_r(\tau)c_1 + u_1^{(1)}(\tau), \quad c_1 \in \mathbb{R}^r,$$

$$u_1^{(1)}(\tau) = G[\check{Z}(z_0(s, c_0), \beta_0); \check{J}(z_0(\cdot, c_0), \beta_0)](\tau)$$

визначає розв'язок крайової задачі першого наближення

$$\frac{du_1(\tau)}{dt} = A u_1(\tau) + \check{Z}(z_0(\tau, c_0), \beta_0), \quad \ell u_1(\cdot) = \check{J}(z_0(\cdot, c_0), \beta_0).$$

У випадку (4) умова розв'язності крайової задачі першого наближення приводить до рівняння

$$P_{Q_d^*} \{ \check{J}(z_0(\cdot, c_0), \beta_0) - \ell K [\check{Z}(z_0(s, c_0), \beta_0)](\cdot) \} = 0.$$

Необхідні умови існування розв'язку задачі (1), (2) у критичному випадку визначає наступна лема. Доведення леми аналогічне [1, 3, 10, 11].

Лема. Припустимо, що для крайової задачі (1), (2) має місце критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$), причому виконано умову (4); у цьому випадку породжуюча нетерова ($m \neq n$) крайова задача (3) має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_0^*) = X_r(t)c_0^* + G[f; \alpha](t), \quad c_0^* \in \mathbb{R}^r.$$

Припустимо також, що крайова задача (1), (2) в околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_r^*)$ має розв'язок $z(t) \in C^1[a, b]$. За цих умов має місце рівність

$$F_0(\check{c}_0) := P_{Q_d^*} \{ \check{J}(z_0(\cdot, c_0^*), \beta_0^*) - \ell K [\check{Z}(z_0(s, c_0^*), \beta_0^*)](\cdot) \} = 0, \quad (6)$$

де

$$\check{c}_0 := \begin{pmatrix} c_0^* \\ \beta_0^* \end{pmatrix}.$$

Рівняння (6) далі будемо називати рівнянням для породжуючих констант нелінійної крайової задачі (1), (2). Перші r компонент $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ кореня $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^{r+1}$ рівняння (6) визначають породжуючий розв'язок $z_0(t, c_0^*)$, у малому околі якого можуть існувати шукані розв'язки початкової задачі (1), (2). Крім того, з рівняння (6) можна знайти величину $\beta^* \in \mathbb{R}^1$, яка визначає перше наближення $b_1 = b^* + (b^* - a)\beta_0^*$ до довжини відрізка $b - a$, на якому визначений шуканий розв'язок. Якщо ж рівняння (6) не має дійсних коренів, то задача (1), (2) не має шуканих розв'язків.

2. Достатня умова розв'язності. Рівняння для породжуючих констант (6), взагалі кажучи, є нелінійним рівнянням. Приклад такого рівняння буде наведено нижче. Припустимо, що рівняння для породжуючих констант (6) має дійсні корені. Фіксуємо один із дійсних розв'язків $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^{r+1}$ рівняння (6), приходимо до задачі про побудову розв'язку нелінійної крайової задачі (1), (2) у малому околі розв'язку

$$z_0(t, c_0^*) = X_r(t)c_0^* + G[f; \alpha](t), \quad c_0^* \in \mathbb{R}^r,$$

породжуючої задачі (3). Припустимо також, що розв'язок $z_0(t, c_0^*)$ породжуючої задачі (3) не збігається з положенням рівноваги [4, 13, 14]

$$z = z(t) : dz/dt = 0, \quad Az + f + Z(z) = 0, \quad \ell(z(\cdot)) = \alpha + J(z(\cdot))$$

крайової задачі (1), (2). Позначимо $(d \times (r + 1))$ -вимірну матрицю так:

$$B_0 := P_{Q_a^*} \{ [\ell_1 X_r(\cdot); \ell_2(\check{c}_0)] - \ell K [\mathcal{A}_1(s, \check{c}_0) X_r(s); \mathcal{A}_2(s, \check{c}_0)](\cdot) \} \in \mathbb{R}^{d \times (r+1)},$$

де

$$\mathcal{A}_1(t, \check{c}_0) := \left. \frac{\partial \check{Z}(z, \beta)}{\partial z} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*) \\ \beta = \beta_0^*}}, \quad \mathcal{A}_2(t, \check{c}_0) := \left. \frac{\partial \check{Z}(z, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*) \\ \beta = \beta_0^*}}$$

— $(n \times n)$ -вимірна матриця і вектор,

$$\ell_1 u(\cdot) := \left. \frac{\partial \check{J}(z(\cdot), \beta)}{\partial z} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*) \\ \beta = \beta_0^*}}, \quad \ell_2(\check{c}_0) \gamma := \left. \frac{\partial \check{J}(z(\cdot), \beta)}{\partial \beta} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*) \\ \beta = \beta_0^*}}$$

— похідні за Фреше векторного функціонала $\check{J}(z(\cdot), \beta)$. Традиційною умовою розв'язності нелінійної крайової задачі (1), (2) у малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_0^*)$ є вимога простоти коренів [1, 2, 12]

$$P_{B_0^*} P_{Q_a^*} = 0 \quad (7)$$

рівняння (6) для породжуючих констант нелінійної крайової задачі (1), (2). Нами отримано схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння у критичному випадку з використанням методу декомпозиції Адомяна [9, 10].

Покажемо, що вимога простоти коренів (7) рівняння (6) для породжуючих констант є достатньою умовою розв'язності нелінійної автономної крайової задачі (1), (2) у малому околі розв'язку породжуючого розв'язку $z_0(t, c_0^*)$. Друге наближення до розв'язку нелінійної автономної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку

$$z_2(\tau) := z_0(\tau, c_r^*) + u_1(\tau) + u_2(\tau)$$

визначає розв'язок крайової задачі другого наближення

$$\frac{du_2(\tau)}{d\tau} = A u_2(\tau) + Z_1(z_0(\tau, c_r^*), u_1(\tau), \gamma_1), \quad \ell u_2(\cdot) = J_1(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), \gamma_1),$$

де

$$u_2(\tau) = X_r(\tau) c_2 + u_2^{(1)}(\tau), \quad c_2 \in \mathbb{R}^r,$$

$$u_2^{(1)}(\tau) = G[Z_1(z_0(s, c_0^*), u_1(s), \gamma_1); J_1(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), \gamma_1)](t).$$

Умова розв'язності крайової задачі другого наближення

$$F_1(c_1, \gamma_1) := P_{Q_a^*} \{ J_1(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), \gamma_1) - \ell K [Z_1(z_0(s, c_0^*), u_1(s), \gamma_1)](\cdot) \} = 0,$$

на відміну від рівняння (6) для породжуючих констант, є лінійним рівнянням щодо констант c_1 і γ_1 , розв'язним за умови (7) простоти коренів рівняння (6) для породжуючих констант. Справді, позначимо функції

$$v(\tau, \mu) := z_0(t, c_0^*) + \mu u_1(t) + \dots + \mu^k u_k(t) + \dots, \quad w(\mu) := \beta_0^* + \mu \gamma_1 + \dots + \mu^k \gamma_k + \dots,$$

при цьому [15]

$$Z_1(z_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau), \gamma_1) := \check{Z}'_\mu(v(\tau, \mu), w(\mu)) \Big|_{\mu=0},$$

$$J_1(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), \gamma_1) := \check{J}'_\mu(v(\cdot, \mu), w(\mu)) \Big|_{\mu=0}.$$

У малому околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_0^*)$ і константи β_0^* мають місце розклади

$$Z_1(z_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau), \gamma_1) = \mathcal{A}_1(\tau, \check{c}_0)u_1(\tau) + \mathcal{A}_2(\tau, \check{c}_0)\gamma_1 + \mathcal{R}_1(z_0(\tau, c_0), u_1^{(1)}(\tau)),$$

$$J_1(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), \gamma_1) = \ell_1 u_1(\cdot) + \ell_2(\check{c}_0)\gamma_1 + \mathcal{J}_1(z_0(\cdot, c_0^*), u_1^{(1)}(\cdot)).$$

Отже,

$$\begin{aligned} F_1(\check{c}_1) &:= P_{Q_d^*} \{ J_1(z_0(\cdot, c_0^*), u_1^{(1)}(\cdot)) - \ell K[Z_1(z_0(s, c_0^*), u_1^{(1)}(s))](\cdot) \} \\ &= P_{Q_d^*} \{ \ell_1 u_1(\cdot) + \ell_2(\check{c}_0)\gamma_1 - \ell K[\mathcal{A}_1(s, \check{c}_0)u_1(s) + \mathcal{A}_2(s, \check{c}_0)\gamma_1](\cdot) \} \\ &= B_0 \check{c}_1 + P_{Q_d^*} \{ \ell_1 u_1^{(1)}(\cdot) - \ell K[\mathcal{A}_1(s)u_1^{(1)}(s)](\cdot) \}, \end{aligned}$$

де

$$\check{c}_1 := \begin{pmatrix} c_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r+1}.$$

Таким чином, за умови (7) простоти коренів рівняння (6) для породжуючих констант отримуємо принаймні один розв'язок крайової задачі першого наближення

$$u_1(\tau) = X_r(\tau)c_1 + u_1^{(1)}(\tau), \quad \check{c}_1 = -B_0^+ P_{Q_d^*} \{ \ell_1 u_1^{(1)}(\cdot) - \ell K[\mathcal{A}_1(s)u_1^{(1)}(s)](\cdot) \}.$$

Третє наближення до розв'язку нелінійної автономної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку

$$z_3(\tau) := z_0(\tau, c_r^*) + u_1(\tau) + u_2(\tau) + u_3(\tau)$$

визначає розв'язок крайової задачі третього наближення

$$\frac{du_3(\tau)}{d\tau} = A u_3(\tau) + Z_2(z_0(\tau, c_r^*), u_1(\tau), u_2(\tau), \gamma_1, \gamma_2),$$

$$\ell u_3(\cdot) = J_2(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \gamma_1, \gamma_2).$$

Тут

$$u_3(\tau) = X_r(\tau)c_3 + u_3^{(1)}(\tau), \quad c_3 \in \mathbb{R}^r,$$

$$u_3^{(1)}(\tau) = G[Z_2(z_0(s, c_0^*), u_1(s), u_2(s), \gamma_1, \gamma_2); J_1(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \gamma_1, \gamma_2)](t).$$

Умова розв'язності крайової задачі третього наближення

$$\begin{aligned} F_2(c_2, \gamma_2) &:= P_{Q_d^*} \{ J_2(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \gamma_1, \gamma_2) \\ &= \ell K [Z_2(z_0(s, c_0^*), u_1(s), u_2^{(1)}(s), \gamma_1)](\cdot) \} = 0 \end{aligned}$$

є лінійним рівнянням щодо констант c_2 і γ_2 , розв'язним за умови (7) простоти коренів рівняння (6) для породжуючих констант. Справді, у малому околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_0^*)$ і константи β_0^* мають місце розклади

$$\begin{aligned} Z_2(z_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau), u_2(\tau), \gamma_1, \gamma_2) &= \mathcal{A}_1(t, \check{c}_0)u_2(\tau) + \mathcal{A}_2(t, \check{c}_0)\gamma_2 \\ &+ \mathcal{R}_2(z_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau), u_2^{(1)}(\tau), \gamma_1), \end{aligned}$$

$$J_2(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \gamma_1, \gamma_2) = \ell_1 u_2(\cdot) + \ell_2(\check{c}_0)\gamma_2 + \mathcal{J}_2(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), u_2^{(1)}(\cdot), \gamma_1).$$

Отже,

$$\begin{aligned} F_2(\check{c}_2) &:= P_{Q_d^*} \{ J_2(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \gamma_1, \gamma_2) \\ &- \ell K [Z_2(z_0(s, c_0^*), u_1(s), u_2(s), \gamma_1, \gamma_2)](\cdot) \} \\ &= P_{Q_d^*} \{ \ell_1 u_2(\cdot) + \ell_2(\check{c}_0)\gamma_2 + \mathcal{J}_2(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), u_2^{(1)}(\cdot), \gamma_1) \\ &- \ell K [\mathcal{A}_1(s, \check{c}_0)u_2(s) + \mathcal{A}_2(s, \check{c}_0)\gamma_2 + \mathcal{R}_2(z_0(s, c_0^*), u_1(s), u_2^{(1)}(s), \gamma_1)](\cdot) \} \\ &= B_0 \check{c}_2 + P_{Q_d^*} \{ \ell_1 u_2^{(1)}(\cdot) + \mathcal{J}_2(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \gamma_1) \\ &- \ell K [\mathcal{A}_1(s)u_2^{(1)}(s) + \mathcal{R}_2(z_0(s, c_0^*), u_1(s), u_2^{(1)}(s), \gamma_1)](\cdot) \}, \end{aligned}$$

де [15]

$$Z_2(z_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau), u_2(\tau), \gamma_1, \gamma_2) := \frac{1}{2!} \check{Z}_{\mu^2}''(v(\tau, \mu), w(\mu)) \Big|_{\mu=0},$$

$$J_2(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), u_2(\cdot), \gamma_1, \gamma_2) := \frac{1}{2!} \check{J}_{\mu^2}''(v(\cdot, \mu), w(\mu)) \Big|_{\mu=0},$$

крім того,

$$\check{c}_2 := \begin{pmatrix} c_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r+1}.$$

Таким чином, за умови (7) простоти коренів рівняння (6) для породжуючих констант отримуємо принаймні один розв'язок крайової задачі другого наближення

$$u_2(\tau) = X_r(\tau)c_2 + u_2^{(1)}(\tau),$$

$$\check{c}_2 = -B_0^+ P_{Q_d^*} \{ \ell_1 u_2^{(1)}(\cdot) + \mathcal{J}_2(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), u_2^{(1)}(\cdot), \gamma_1) \}$$

$$- \ell K [\mathcal{A}_1(s)u_2^{(1)}(s) + \mathcal{R}_2(z_0(s, c_0^*), u_1(s), u_2^{(1)}(s), \gamma_1)](\cdot)\}.$$

Припустимо, що за умови (7) простоти коренів рівняння (6) для породжуючих констант отримано наближення $u_k(\tau)$ до розв'язку автономної нелінійної крайової задачі (1), (2) у малому околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_0^*)$ і константи β_0^* . У малому околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_0^*)$ і константи β_0^* мають місце розклади

$$\begin{aligned} Z_k(z_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau), \dots, u_k(\tau), \gamma_1, \dots, \gamma_k) &= \mathcal{A}_1(\tau, \check{c}_0)u_k(\tau) + \mathcal{A}_2(\tau, \check{c}_0)\gamma_k \\ &+ \mathcal{R}_k(z_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau), \dots, u_k^{(1)}(\tau), \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}), \\ J_k(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot), \gamma_1, \dots, \gamma_k) &= \ell_1 u_k(\cdot) + \ell_2(\check{c}_0)\gamma_k \\ &+ \mathcal{J}_k(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), \dots, u_k^{(1)}(\cdot), \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}), \end{aligned}$$

де [15]

$$\begin{aligned} Z_k(z_0(\tau, c_0^*), u_1(\tau), \dots, u_k(\tau), \gamma_1, \dots, \gamma_k) &:= \frac{1}{k!} \check{Z}_{\mu^k}^{(k)}(v(\tau, \mu), w(\mu)) \Big|_{\mu=0}, \\ J_k(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot), \gamma_1, \dots, \gamma_k) &:= \frac{1}{k!} \check{J}_{\mu^k}^{(k)}(v(\cdot, \mu), w(\mu)) \Big|_{\mu=0}, \end{aligned}$$

крім того,

$$\check{c}_k := \begin{pmatrix} c_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Послідовність наближень до розв'язку автономної нелінійної крайової задачі (1), (2) у малому околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_0^*)$ і константи β_0^* за умови (7) визначає ітераційна схема

$$\begin{aligned} z_1(\tau) &:= z_0(\tau, c_0) + u_1(\tau), \quad u_1(\tau) = X_r(\tau)c_1 + u_1^{(1)}(\tau), \\ u_1^{(1)}(\tau) &= G[\check{Z}(z_0(s, c_0), \beta_0); \check{J}(z_0(\cdot, c_0), \beta_0)](\tau), \\ \check{c}_1 &= -B_0^+ P_{Q_d^*} \{ \ell_1 u_1^{(1)}(\cdot) - \ell K [\mathcal{A}_1(s)u_1^{(1)}(s)](\cdot) \}, \\ z_2(\tau) &:= z_0(\tau, c_r^*) + u_1(\tau) + u_2(\tau), \\ u_2(\tau) &= X_r(\tau)c_2 + u_2^{(1)}(\tau), \\ u_2^{(1)}(\tau) &= G[Z_1(z_0(s, c_0^*), u_1(s), \gamma_1); \\ &\quad J_1(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), \gamma_1)](t), \\ \check{c}_2 &= -B_0^+ P_{Q_d^*} \{ \ell_1 u_2^{(1)}(\cdot) + \mathcal{J}_2(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), u_2^{(1)}(\cdot), \gamma_1) \\ &\quad - \ell K [\mathcal{A}_1(s)u_2^{(1)}(s) + \mathcal{R}_2(z_0(s, c_0^*), u_1(s), u_2^{(1)}(s), \gamma_1)](\cdot) \}, \dots, \end{aligned}$$

$$z_{k+1}(\tau) := z_0(\tau, c_r^*) + u_1(\tau) + \dots + u_{k+1}(\tau), \quad (8)$$

$$u_{k+1}(\tau) = X_r(\tau)c_{k+1} + u_{k+1}^{(1)}(\tau), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$u_{k+1}^{(1)}(\tau) = G[Z_k(z_0(s, c_0^*), u_1(s), \dots, u_k(s), \gamma_1, \dots, \gamma_k);$$

$$J_k(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot), \gamma_1, \dots, \gamma_k)](t),$$

$$\check{c}_{k+1} = -B_0^+ P_{Q_d^*} \{ \ell_1 u_{k+1}^{(1)}(\cdot) + \mathcal{J}_{k+1}(z_0(\cdot, c_0^*), u_1(\cdot), \dots, u_{k+1}^{(1)}(\cdot), \gamma_1, \dots, \gamma_k)$$

$$- \ell K[\mathcal{A}_1(s)u_{k+1}^{(1)}(s) + \mathcal{R}_{k+1}(z_0(s, c_0^*), u_1(s), \dots, u_{k+1}^{(1)}(s), \gamma_1, \dots, \gamma_k)](\cdot) \}, \dots$$

Теорема 1. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжуюча нетерова крайова задача (3) за умови (4) має r -параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

За умови (7) простоти коренів рівняння (6) для породжуючих констант у малому околі породжуючого розв'язку $z_0(\tau, c_0^*)$ і константи β_0^* задача (1), (2) має принаймні один розв'язок. Послідовність наближень до розв'язку автономної нелінійної крайової задачі (1), (2) визначає ітераційна схема (8). Якщо існують константи $0 < \gamma < 1$ і $0 < \delta < 1$, для яких виконуються нерівності

$$\|u_1(t)\| \leq \gamma \|z_0(t, c_r^*)\|, \quad \|u_{k+1}(t)\| \leq \gamma \|u_k(t)\|,$$

$$|\gamma_1| \leq \delta |\beta_0^*|, \quad |\gamma_{k+1}| \leq \delta |\gamma_k|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то ітераційна схема (8) збігається до розв'язку крайової задачі (1), (2).

Приклад. Умови доведеної теореми справджуються у випадку періодичної крайової задачі для рівняння, яке визначає рух маятника

$$y'' + \sin y = 0. \quad (9)$$

Лінеаризація рівняння (9)

$$y'' + y = Y(y), \quad Y(y) := y - \sin y$$

визначає аналітичну нелінійність $Y(y)$. Періодичні розв'язки рівняння (9) будемо шукати в околі розв'язку

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cos t$$

лінійної частини

$$y_0''(t, c_0) + y_0(t, c_0) = 0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

лінеаризації рівняння (9). З огляду на це для періодичної задачі для рівняння (9) має місце критичний випадок $Q = 0$. При побудові розв'язку автономної нелінійної періодичної задачі для

рівняння (9) виникає проблема неможливості знаходження розв'язків в елементарних функціях, яка, у свою чергу, приводить до великих похибок у розв'язку. Зокрема, навіть знаходження коренів рівняння (6) для породжуючих амплітуд у випадку нелінійної періодичної задачі для рівняння (9) можливе лише наближене, тому природно скористатись розвиненням нелінійності

$$Y(y) = y - \sin y \approx \frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{120} + \frac{y^7}{5040}$$

в околі породжуючого розв'язку $y_0(t, c_0)$. Виконуючи для періодичної задачі для рівняння (9) заміну незалежної змінної (5), отримуємо нелінійність $\check{Y}(y, \beta)$, яка зберігає аналітичність нелінійності $Y(y)$. Рівняння для породжуючих амплітуд

$$F_0(c_0, \beta_0) := \frac{\pi c_0}{9216} \{ 1152 c_0^2 (1 + \beta_0^2) - 48 (c_0^4 (1 + \beta_0)^2 + c_0^6 (1 + \beta_0)^2 - 9216 \beta_0 (2 + \beta_0)) \} = 0$$

у випадку періодичної крайової задачі для рівняння (9) має дійсний корінь

$$c_0^* = \frac{1}{12}, \quad \beta_0^* = \frac{165\,888}{\sqrt{27\,494\,947\,583}} \approx 0,000\,434\,185,$$

для якого

$$B_0 = \pi \left(\frac{47\,748\,102}{27\,494\,947\,583} - \frac{\sqrt{27\,494\,947\,583}}{995\,328} \right)$$

— матриця повного рангу. Таким чином, згідно з доведеною теоремою в околі породжуючого розв'язку

$$y_0(t, c_0^*) = c_0^* \cos t$$

існує принаймні один періодичний розв'язок рівняння (9), при цьому

$$\check{Y}(y_0(\tau, c_0^*), \beta_0^*) = \frac{1}{11\,547\,877\,984\,860} (278\,570\,901 \cos 3\tau - 24\,185 \cos 5\tau + \cos 7\tau).$$

Використовуючи ітераційну схему (8)

$$y_1(\tau) := y_0(\tau, c_0^*) + u_1(\tau), \quad u_1(\tau) = c_1 \cos \tau + u_1^{(1)}(\tau),$$

отримуємо

$$u_1^{(1)}(\tau) := G[\check{Y}(y_0(s, c_0^*), \beta_0^*)](t) = \frac{1}{554\,298\,143\,273\,280} (1671377037 \cos \tau - 1\,671\,425\,406 \cos 3\tau + 48\,370 \cos 5\tau - \cos 7\tau).$$

Тут

$$G[f(s)](t) := \int_0^t \sin(t-s) f(s) ds$$

— оператор Гріна 2π -періодичної задачі для рівняння

$$y'' + y = f(t).$$

З умови розв'язності крайової задачі другого наближення отримуємо

$$c_1 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{49\,256\,837\,647\,390\,550\,592}{18\,899\,303\,564\,797\,938\,547\,225\sqrt{27\,494\,947\,583}}.$$

Отже,

$$u_1(t) = \frac{1}{554298143273280} (1\,671\,377\,037 \cos \tau - 1\,671\,425\,406 \cos 3\tau + 48\,370 \cos 5\tau - \cos 7\tau),$$

при цьому

$$\begin{aligned} Y_1(y_0(\tau, c_0^*), u_1(t), \beta_0^*, \gamma_1) = & \frac{1}{10\,475\,848\,875\,125\,579\,185\,142\,915\,949\,360\,648\,000} \\ & \times (3\,971\,398\,426\,812\,015\,067\,558\,314 \cos 3\tau \\ & - 27\,431\,926\,113\,689\,746\,921\,755\,802\,155 \cos 5\tau \\ & + 4\,763\,182\,639\,873\,400\,467\,892\,979 \cos 7\tau \\ & - 361\,055\,271\,337\,407\,439\,515 \cos 9\tau \\ & + 902\,439\,169\,569\,226\,011 \cos \tau - 137\,474\,737\,915 \cos 13\tau). \end{aligned}$$

Використовуючи ітераційну схему (8)

$$y_2(\tau) := z_0(\tau, c_r^*) + u_1(\tau) + u_2(\tau), \quad u_2(\tau) = X_r(\tau)c_2 + u_2^{(1)}(\tau),$$

одержуємо

$$\begin{aligned} u_2^{(1)}(\tau) = & \frac{1}{3\,519\,885\,222\,042\,194\,606\,208\,019\,758\,985\,177\,728\,000} \\ & \times (-383\,846\,826\,095\,658\,110\,063\,781\,313\,594 \cos \tau \\ & - 166\,798\,733\,926\,104\,632\,837\,449\,188 \cos 3\tau \\ & + 384\,046\,965\,591\,656\,456\,904\,581\,230\,170 \cos 5\tau \\ & - 33\,342\,278\,479\,113\,803\,275\,250\,853 \cos 7\tau \\ & + 1\,516\,432\,139\,617\,111\,245\,963 \cos 9\tau \\ & - 25\,268\,296\,747\,938\,328 \cos 11\tau + 274\,949\,475\,830 \cos 13\tau). \end{aligned}$$

З умови розв'язності крайової задачі третього наближення знаходимо $c_2 = 0$,

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{27\,494\,947\,583}} \times \frac{1\,553\,007\,930\,003\,681\,994\,688\,832\,844\,677\,936\,927}{17\,502\,000\,086\,484\,819\,320\,018\,596\,221\,702\,429\,634\,204\,830\,625}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} u_2(t) = & -\frac{191\,923\,413\,047\,829\,055\,031\,890\,656\,797 \cos \tau}{1\,759\,942\,611\,021\,097\,303\,104\,009\,879\,492\,588\,864\,000} \\ & -\frac{220\,633\,245\,934\,000\,837\,086\,573 \cos 3\tau}{4\,655\,932\,833\,389\,146\,304\,507\,962\,644\,160\,288\,000} \\ & +\frac{1\,828\,795\,074\,245\,983\,128\,117\,053\,477 \cos 5\tau}{16\,761\,358\,200\,200\,926\,696\,228\,665\,518\,977\,036\,800} \\ & -\frac{226\,818\,220\,946\,352\,403\,232\,999 \cos 7\tau}{23\,944\,797\,428\,858\,466\,708\,898\,093\,598\,538\,624\,000} \\ & +\frac{291\,815\,449 \cos 9\tau}{677\,351\,039\,762\,358\,117\,532\,544\,000} \\ & -\frac{16\,411 \cos 11\tau}{2\,286\,059\,759\,197\,958\,646\,672\,336\,000} \\ & +\frac{\cos 13\tau}{12\,801\,934\,651\,508\,568\,421\,365\,081\,600}, \end{aligned}$$

при цьому

$$\begin{aligned} & Y_2(y_0(\tau, c_0^*), u_1(t), u_1(t), \beta_0^*, \gamma_1, \gamma_2) \\ = & -\frac{466902404145180496552533150828215889186895165993 \cos 3\tau}{2463828863874875258517181469188864767058983331429212822400000} \\ & -\frac{24775487876341394855944020998559127295531017 \cos 5\tau}{475166995175868799856884997629281062218518213918491044320000} \\ & +\frac{11030411355405589567466068452471203990162411122031 \cos 7\tau}{58207956909043927982468412209586930121768481205015152929200000} \\ & -\frac{245712337835350326712552766557277 \cos 9\tau}{4480512022140113745924760632755821986356436640000} \\ & +\frac{65716450057980579829015819403 \cos 11\tau}{10081152049815255928330711423700599469301982440000} \\ & -\frac{26302469004545914575490693 \cos 13\tau}{80649216398522047426645691389604795754415859520000} \\ & +\frac{258912023 \cos 15\tau}{26073223866979219305244590807297612800} \end{aligned}$$

$$- \frac{2715581 \cos 17\tau}{17599426110210973031040098794925888640000} + \frac{\cos 19\tau}{703977044408438921241603951797035545600}.$$

Використовуючи ітераційну схему (8)

$$y_3(\tau) := z_0(\tau, c_r^*) + u_1(\tau) + u_2(\tau) + u_3(\tau), \quad u_3(\tau) = X_r(\tau)c_3 + u_3^{(1)}(\tau),$$

отримуємо

$$u_3^{(1)}(\tau) = \frac{1}{134111132718437210071607221730888287000554580696354912348876800000} \times \left(-264772749877425765816136710582643607779272574417694 \cos \tau \right. \\ + 3176803957803808098543435558235180910027634709416372 \cos 3\tau \\ + 291359737425774803505901686943055336995444759920 \cos 5\tau \\ - 529459745059468299238371285718617791527795733857488 \cos 7\tau \\ + 91933577532993325636027685638946855889933969528 \cos 9\tau \\ - 7285301249929973840226331813675942351090368 \cos 11\tau \\ + 260346602370049959589168428194164206840 \cos 13\tau \\ - 5945307156892329214422422530202625 \cos 15\tau \\ + 71851625543316571061216537815 \cos 17\tau \\ \left. - 529180499814342279322300 \cos 19\tau \right).$$

Таким чином, отримано ітераційну схему для побудови періодичних розв'язків рівняння (9) з використанням методу декомпозиції Адомяна. Зокрема, знайдено третє наближення

$$y_3(\tau) = y_0(\tau, c_0^*) + u_1(\tau) + u_2(\tau) + u_3(\tau), \quad u_3(\tau) \approx u_3^{(1)}(\tau)$$

до періодичного розв'язку рівняння (9) і величину

$$\beta_3 := \beta_0^* + v_1 + \dots + v_3 \\ = -1 + \frac{2\ 903\ 371\ 835\ 961\ 871\ 700\ 027\ 250\ 234\ 959\ 423\ 555\ 330\ 909\ 462\ 309\ 727}{17\ 502\ 000\ 086\ 484\ 819\ 320\ 018\ 596\ 221\ 702\ 429\ 634\ 204\ 830\ 625\sqrt{27\ 494\ 947\ 583}},$$

яка визначає третє наближення

$$b_3 = b^* + (b^* - a)\beta_3$$

до відрізка $[a, b]$, на якому визначено періодичний розв'язок рівняння (9). Для знайдених наближень до періодичного розв'язку рівняння (9) виконуються нерівності

$$\|u_1(\tau)\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \leq \gamma \|z_0(\tau, c_0^*)\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad \|u_{k+1}(\tau)\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \leq \gamma \|u_k(\tau)\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]},$$

$$\gamma \approx 0,000\,191\,351 \ll 1, \quad k = 0, 1, 2,$$

крім того,

$$|\gamma_1| \leq \delta |\beta_0^*|, \quad |\gamma_2| \leq \delta |\gamma_1|, \quad \delta \approx 0,0000\,362\,009.$$

Отже, можна говорити про практичну збіжність отриманих наближень до періодичного розв'язку рівняння (9).

Для отриманих наближень до періодичного розв'язку рівняння (9) існує константа

$$0 < \rho \approx 0,000\,138\,667 \ll 1,$$

для якої виконуються нерівності

$$\|Y_1(y_0(\tau, c_0^*), u_1(t), \beta_0^*, \gamma_1)\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \leq \rho \|\check{Y}(y_0(\tau, c_0^*), \beta_0^*)\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]},$$

$$\|Y_2(y_0(\tau, c_0^*), u_1(t), u_1(t), \beta_0^*, \gamma_1, \gamma_2)\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \leq \rho \|Y_1(y_0(\tau, c_0^*), u_1(t), \beta_0^*, \gamma_1)\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]},$$

що свідчить про практичну збіжність ряду [10]

$$\begin{aligned} \check{Y}(y(\tau), \beta) &= \check{Y}(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + Y_1(y_0(\tau, c_0), u_1(\tau), \gamma_1) \\ &+ Y_2(y_0(\tau, c_0), u_1(\tau), u_2(\tau), \gamma_1, \gamma_2) + \dots \\ &+ Y_k(y_0(\tau, c_0), u_1(\tau), \dots, u_k(\tau), \gamma_1, \dots, \gamma_k) + \dots \end{aligned}$$

в околі породжуючого розв'язку $y_0(\tau, c_0)$.

Точність знайдених наближень до періодичного розв'язку рівняння (9) визначають нев'язки

$$\Delta_k := \|y_k''(t) + \sin y_k(t)\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Зокрема,

$$\Delta_0 \approx 0,0000\,241\,234, \Delta_1 \approx 2,61\,861 \times 10^{-9}, \Delta_2 \approx 3,63\,085 \times 10^{-13},$$

$$\Delta_3 \approx 5,55\,112 \times 10^{-16}.$$

Зазначимо, що досліджена автономна нелінійна задача (1), (2) не є слабконелінійною, на відміну від найбільш досліджених крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь [1, 12, 13]. Крім того, при побудові наближень до розв'язку задачі (1), (2), на відміну від статті [2], на кожному кроці забезпечено точне виконання умов розв'язності, які гарантують відсутність вікових членів.

Запропоновані у статті умови розв'язності та схема побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку з використанням методу декомпозиції Адомяна конструктивні і можуть бути перенесені на нелінійні матричні крайові задачі [16], нелінійні автономні крайові задачі [1, 8, 13], а також на нелінійні гібридні різницево-диференціальні крайові задачі [17, 18].

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2th ed., De Gruyter, Berlin, Boston (2016).
2. A. A. Boichuk, *Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations*, Ukr. Math. J., **50**, № 2, 186–195 (1998).
3. A. Boichuk, S. Chuiko, *Autonomous weakly nonlinear boundary value problems in critical cases*, Different. Equat., № 10, 1353–1358 (1992).
4. И. Г. Малкин, *Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Ленинград, Москва (1949).
5. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, Москва (1986).
6. S. M. Chuiko, *On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem*, J. Math. Sci., **220**, № 5, 591–602 (2017).
7. S. M. Chuiko, I. A. Boichuk, *An autonomous Noetherian boundary-value problem in the critical case*, Nonlinear Oscillations, **12**, № 3, 405–416 (2009).
8. S. M. Chuiko, O. V. Starkova, *On the approximate solution of autonomous boundary-value problem by the least-squares method*, Nonlinear Oscillations, **12**, № 4, 556–573 (2009).
9. G. Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*, J. Math. Anal. and Appl., **135**, 501–544 (1988).
10. С. М. Чуйко, О. С. Чуйко, М. В. Попов, *Метод декомпозиції Адомяна у теорії нелінійних періодичних крайових задач*, Нелінійні коливання, **25**, № 4, 413–425 (2022).
11. A. A. Boichuk, *Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations*, Ukr. Math. J., **50**, № 2, 186–195 (1998).
12. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Конструктивні методи аналізу крайових задач теорії нелінійних коливань*, Наук. думка, Київ (2023).
13. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва (1956).
14. С. М. Чуйко, И. Ю. Курильченко, *О положении равновесия автономной периодической задачи*, Динамические системы, **23**, 31–37 (2007).
15. M. Mac, C. S. Leung, T. Harko, *A brief introduction to the Adomian decomposition method*, Rom. Astron. J., **1**, № 1, 1–41 (2019).
16. S. M. Chuiko, *Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem*, Lobachevskii J. Math., **38**, № 2, 236–244 (2017).
17. A. Boichuk, O. Strakh, *Linear Fredholm boundary-value problems for dynamical systems on a time scale*, J. Math. Sci., **208**, № 5, 487–497 (2015).
18. A. Samoilenko, A. Boichuk, S. Chuiko, *Hybrid difference differential boundary-value problem*, Miskolc Math. Notes, **18**, № 2, 1015–1031 (2017).

Одержано 12.06.23