

Володимир Рязанов (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.; Інститут математики НАН України, Київ),

Євген Севостьянов¹ (Житомирський державний університет імені Івана Франка; Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.)

ДО ТЕОРІЇ МОДУЛІВ ПОВЕРХОНЬ

We continue the development of the theory of moduli of the families of surfaces, in particular, strings of various dimensions $m = 1, 2, \dots, n - 1$ in Euclidean spaces $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. On the basis of the proof of Lemma 1 on the relationships between the moduli and Lebesgue measures, we prove the corresponding analog of the Fubini theorem in terms of moduli that extends the known Väisälä theorem for families of curves to the families of surfaces of arbitrary dimensions. It should be emphasized that the crucial place in the proof of Lemma 1 is Proposition 1 on measurable (Borel) hulls of sets in Euclidean spaces. In addition, we prove similar Lemma 2 and Proposition 2 for the families of concentric spheres.

У цій статті продовжено розвиток теорії модулів сімей поверхонь, зокрема струн різних розмірностей $m = 1, 2, \dots, n - 1$, у евклідових просторах $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. На основі доведення леми про зв'язки між модулями та мірами Лебега отримано відповідний аналог теореми Фубіні в термінах модулів, що узагальнює відому теорему Вайсєля з сімей кривих на сім'ї поверхонь довільних розмірностей. Слід зазначити, що найбільш тонким місцем у доведенні вказаної леми є твердження про вимірні (борелеві) оболонки множин у евклідових просторах. Крім того, доведено аналогічні лему і твердження про сім'ї концентричних куль.

1. Вступ. У цій статті ми розвиваємо теорію модулів сімей поверхонь, зокрема струн (вкладень $\mathbb{R}^m$) усіх розмірностей $m = 1, 2, \dots, n - 1$ в евклідових просторах $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Оскільки дані поверхні можуть бути дикими (надзвичайно фрактальними) (див., наприклад, [1]), природною основою для їх вивчення є так звані міри Гаусдорфа. Далі $\mathcal{H}^k$, $k = 1, \dots, n$, позначає k -вимірну міру Гаусдорфа, у $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Зокрема,

$$\mathcal{H}^k(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^k(A),$$

$$\mathcal{H}_\varepsilon^k(A) = \Omega_k \inf \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\delta_i}{2} \right)^k$$

для кожної множини A в $\mathbb{R}^n$, де точна нижня грань береться по усіх зчисленних наборах чисел $\delta_i \in (0, \varepsilon)$ таких, що сукупність множин A_i в $\mathbb{R}^n$ формують покриття A і мають діаметри δ_i (див., наприклад, розділ 2.1 у [2], або розділ 2.10.2 у [3]). Тут Ω_k позначає об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^k$. Як відомо, $\mathcal{H}^k$ є зовнішньою мірою в сенсі Каратеодорі (див., наприклад, розділ II.4 в [4]), тобто

$$(I) \quad \mathcal{H}^k(X) \leq \mathcal{H}^k(Y), \text{ якщо } X \subseteq Y,$$

$$(II) \quad \mathcal{H}^k(\Sigma X_i) \leq \Sigma \mathcal{H}^k(X_i) \text{ для кожної послідовності множин } X_i,$$

$$(III) \quad \mathcal{H}^k(X \cup Y) = \mathcal{H}^k(X) + \mathcal{H}^k(Y), \text{ якщо } \text{dist}(X, Y) > 0.$$

Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається *вимірною* по відношенню до міри $\mathcal{H}^k$, якщо

$$(IV) \quad \mathcal{H}^k(X) = \mathcal{H}^k(X \cap E) + \mathcal{H}^k(X \setminus E) \text{ для кожної множини } X \subset \mathbb{R}^n.$$

¹ Відповідальний за листування, e-mail: esevostyanov2009@gmail.com.

Відомо, що кожна борелева множина є вимірною щодо будь-якої зовнішньої міри в сенсі Каратеодорі (див., наприклад, теорему II(7.4) [4]). Крім того, міра $\mathcal{H}^k$ є *регулярною за Борелем*, тобто для кожної множини $X \subset \mathbb{R}^n$ існує борелева множина $B \subset \mathbb{R}^n$ така, що $X \subset B$ і $\mathcal{H}^k(X) = \mathcal{H}^k(B)$ (див., наприклад, теорему II(8.1) [4] і розділ 2.10.1 у [3]). Останнє обумовлює, що для кожної вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ існують борелеві множини B_* і $B^* \subset \mathbb{R}^n$ такі, що $B_* \subset E \subset B^*$ і $\mathcal{H}^k(B^* \setminus B_*) = 0$ (див., наприклад, розділ 2.2.3 у [3]), зокрема $\mathcal{H}^k(B^*) = \mathcal{H}^k(E) = \mathcal{H}^k(B_*)$.

Нехай ω — відкрита множина в $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$, $k = 1, \dots, n-1$. (Неперервне) відображення $S: \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається *k-вимірною поверхнею S у $\mathbb{R}^n$* . Іноді ми також називаємо образ $S(\omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ поверхнею S . *Функцією кратності* поверхні S у точці $y \in \mathbb{R}^n$ називається кількість прообразів

$$N(S, y) = \text{card } S^{-1}(y) = \text{card } \{x \in \omega : S(x) = y\}.$$

Іншими словами, $N(S, y)$ позначає кратність накриття точки y поверхнею S . Відомо, що функція кратності є напівнеперервною знизу, тобто $N(S, y) \geq \liminf_{m \rightarrow \infty} N(S, y_m)$ для кожної послідовності $y_m \in \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \dots$, такої, що $y_m \rightarrow y \in \mathbb{R}^n$ при $m \rightarrow \infty$ (див., наприклад, теорему II(7.4) у [5]). Отже, функція $N(S, y)$ є вимірною за Борелем, тобто вимірною щодо кожної міри Гаусдорфа $\mathcal{H}^k$ (див., наприклад, пункт (ii) теореми II(7.6) у [4]).

Нехай $B \subseteq \mathbb{R}^n$ — борелева множина, або більш загально, множина, що є вимірною щодо міри $\mathcal{H}^k$ в $\mathbb{R}^n$. Далі *k-вимірна гаусдорфова площа множини B в $\mathbb{R}^n$* (або просто *площа*), асоційована з *k-вимірною поверхнею S: $\omega \rightarrow \mathbb{R}^n$* , визначається співвідношенням

$$\mathcal{A}_S(B) = \mathcal{A}_S^k(B) := \int_B N(S, y) d\mathcal{H}^k y.$$

Будемо говорити, що поверхня S є *спрямлюваною*, якщо $\mathcal{A}_S(\mathbb{R}^n) < \infty$.

Нехай $\varrho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ — борелева функція. Тоді *інтеграл від ϱ по k-вимірній поверхні S в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$* , визначається рівністю

$$\int_S \varrho d\mathcal{A} := \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(y) N(S, y) d\mathcal{H}^k y.$$

Борелева функція $\varrho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ називається *допустимою* для сім'ї *k-вимірних поверхонь S в $\mathbb{R}^n$* (коротко $\varrho \in \text{adm } \mathcal{S}$), якщо

$$\int_S \varrho^k d\mathcal{A} \geq 1$$

для кожної $S \in \mathcal{S}$. Для заданого числа $p \in [k, \infty)$ визначимо *p-модуль сім'ї S* таким чином, (пор., наприклад, [6]):

$$M_p(\mathcal{S}) = \inf_{\varrho \in \text{adm } \mathcal{S}} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x),$$

де $d\mathcal{L}^n(x)$ — елемент міри Лебега в $\mathbb{R}^n$ (див., наприклад, [2–4]). Модулі всіх порядків $M_p(S)$, $p \in [k, \infty)$, є зовнішніми мірами в сенсі Каратеодорі щодо сімей k -вимірних поверхонь S в $\mathbb{R}^n$ (див., наприклад, теорему 1 в [6] і зауваження до неї).

Будемо говорити, що S_2 *мінорується* сім'єю S_1 (пишуть $S_2 > S_1$), якщо кожен елемент $S \in S_2$ має підповерхню, яка належить S_1 . Відомо, що в цьому випадку $M_p(S_1) \geq M_p(S_2)$ (див., наприклад, [6, с. 176–178]). Ми також говоримо, що властивість P виконується для p -м.в. (майже всіх) k -вимірних поверхонь в S , якщо підсім'я всіх поверхонь в S , для яких P не виконується, має нульовий p -модуль. Якщо $0 < q < p$, то P також виконується для q -м.в. S (див., наприклад, теорему 3 у [6]).

Зауваження 1. Міркуючи методом від супротивного, з огляду на означення модуля M_p отримуємо, що для кожного $p \in [k, \infty)$, $k = 1, \dots, n-1$:

- (i) p -м.в. обмежені k -вимірні поверхні в $\mathbb{R}^n$ спрямлювані,
- (ii) якщо B — борелева множина в $\mathbb{R}^n$ лебегової міри нуль, то $\mathcal{A}_S(B) = 0$ для p -м.в. k -вимірних поверхонь S в $\mathbb{R}^n$ (пор., наприклад, відповідні міркування в першій частині доведення теореми 33.1 в [7]).

Наступну лему вперше доведено у статті [8] (див. також лему 9.1 у монографії [9]).

Лема 1. Нехай $k = 1, \dots, n-1$, $p \in [k, \infty)$ і C — відкритий куб у $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ребра якого паралельні координатним осям. Припустимо, що властивість P виконується для p -м.в. перетинів k -вимірних площин $\mathcal{P}$ з C , які паралельні k -вимірній координатній площині H . Тоді множина $\mathcal{E}$ усіх проєкцій $\mathcal{P}$ на відповідну $(n-k)$ -вимірну координатну площину $H^\perp$ (перпендикулярну до H), для яких властивість P не виконується на $S := \mathcal{P} \cap C$, має нульову міру Лебега.

В доведенні цієї леми у [8] був пробіл, пов'язаний з вимірністю множини $\mathcal{E}$. З огляду на важливість цієї леми ми ліквідуємо цей пробіл тут.

На основі леми 1 наступний аналог теореми Фубіні (див., наприклад, теорему III(8.1) в [4]) в термінах модулів вперше було отримано у [8] (див. також теорему 9.1 в [9]). Цей результат поширює відому теорему Вйсяля, отриману для випадку $k = 1$ (див. теорему 33.1 у [7], пор. також теорему 3 в [6] і лему 2.13 у [10]).

Теорема 1. Нехай $k = 1, \dots, n-1$, $p \in [k, \infty)$ і E — підмножина відкритої множини $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Множина E є вимірною за Лебегом в $\mathbb{R}^n$ тоді й лише тоді, коли множина E є вимірною по відношенню до площі для p -м.в. k -вимірних поверхонь S в Ω . І навіть більше, $\mathcal{L}^n(E) = 0$ тоді й лише тоді, коли

$$\mathcal{A}_S(E) = 0 \tag{1}$$

для p -м.в. k -вимірних поверхонь S в Ω .

Як відомо, модулі є основним геометричним інструментом у сучасній теорії відображень та суміжних областях, зокрема у геометрії, топології та теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, які, у свою чергу, мають відповідні застосування до крайових задач математичної фізики в анізотропних і неоднорідних середовищах (див., наприклад, [?, 8–12]).

Крім того, теорія модулів також може знайти своє подальше застосування в багатьох інших областях, включаючи саму математику (нелінійна динаміка, мінімальні поверхні), теоретичну

фізику (конформну теорію поля, теорію струн) та інженерію (математичні моделі фільтрації газів і рідин при розробці родовищ води, газу і нафти, вирощуванні кристалів та ін.).

2. Про вимірні (борелеві) оболонки множин. Нехай $\mathcal{L}^m$ — зовнішня міра Лебега в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ (див., наприклад, монографії [2–4]). Нагадаємо, що множина B в $\mathbb{R}^m$ називається *вимірною*, якщо для будь-якої множини $X \subseteq \mathbb{R}^m$ виконується рівність

$$(V) \quad \mathcal{L}^m(X) = \mathcal{L}^m(X \cap B) + \mathcal{L}^m(X \setminus B).$$

Говорять, що множина B в $\mathbb{R}^m$ є *вимірною (борелевою) оболонкою множини* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, якщо B є вимірною (борелевою), $A \subseteq B$ і

$$(VI) \quad \mathcal{L}^m(X \cap A) = \mathcal{L}^m(X \cap B) \text{ для кожної } X \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Зокрема, якщо $X = \mathbb{R}^m$ в (VI), то

$$(VII) \quad \mathcal{L}^m(A) = \mathcal{L}^m(B).$$

Навпаки, якщо $\mathcal{L}^m(A) < \infty$, крім того, вимірна (борелева) множина B в $\mathbb{R}^m$ містить A і задовольняє (VII), то B є вимірною (борелевою) оболонкою A (див. 2.1.4 в [3]).

Зауважимо також, що міра $\mathcal{L}^m$ у $\mathbb{R}^m$ збігається з мірою Гаусдорфа $\mathcal{H}^m$ (див., наприклад, теорему 2.2.2 у [2]). Тоді, згідно з викладеним у вступі, $\mathcal{L}^m$ є регулярною за Борелем, тобто для кожної вимірної множини E в $\mathbb{R}^m$ існують борелеві множини B_* і B^* у $\mathbb{R}^m$ такі, що $B_* \subset E \subset B^*$ і $\mathcal{L}^m(B^* \setminus B_*) = 0$. Зокрема, $\mathcal{L}^m(B^*) = \mathcal{L}^m(E) = \mathcal{L}^m(B_*)$. З іншого боку, існують невимірні множини E в $\mathbb{R}^m$, які не містять борелевих множин додатної міри (див. теорему Е з розділу 16 у [14], а також коментарі до розділів 18.11 і 18.12 у [15]). Проте, з огляду на розділ 2.1.5 у [3], зазначимо наступне.

Зауваження 2. Кожна множина A в $\mathbb{R}^m$, для якої виконано умову $\mathcal{L}^m(A) < \infty$, має борелеву оболонку B .

Твердження 1. Нехай C — відкритий куб у $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ребра якого паралельні координатним осям, і A — множина у відкритому m -вимірному кубі C^m , який є перпендикулярною проєкцією C на m -вимірну координатну площину H^m , $m = 1, \dots, n-1$. Тоді для всіх $p \in [k, \infty)$, $k := n-m$, і кожної борелевої оболонки B множини A в C^m виконується рівність

$$M_p(\mathcal{P}_A) = M_p(\mathcal{P}_B),$$

де $\mathcal{P}_A$ і $\mathcal{P}_B$ — сім'ї всіх k -вимірних поверхонь, що складаються з перетинів k -вимірних площин $\mathcal{P}$ з C , які є перпендикулярними до H^m і мають проєкції в A та B відповідно.

Доведення. Для кожного фіксованого $p \in [k, \infty)$, з огляду на монотонність модулів, $M_p(\mathcal{P}_A) \leq M_p(\mathcal{P}_B)$, оскільки за означенням $A \subseteq B$ і, відповідно, $\mathcal{P}_A \subseteq \mathcal{P}_B$.

Отже, залишилося довести обернену нерівність $M_p(\mathcal{P}_A) \geq M_p(\mathcal{P}_B)$. Справді, оскільки B є борелевою множиною, то

$$\begin{aligned} M_p(\mathcal{P}_A) &:= \inf_{\varrho \in \text{adm } \mathcal{P}_A} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) = \inf_{\varrho \in \text{adm}_* \mathcal{P}_A} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x), \\ M_p(\mathcal{P}_B) &:= \inf_{\varrho \in \text{adm } \mathcal{P}_B} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) = \inf_{\varrho \in \text{adm}_* \mathcal{P}_B} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x), \end{aligned}$$

де $\text{adm}_* \mathcal{P}_A$ і $\text{adm}_* \mathcal{P}_B$ позначають відповідно підкласи $\text{adm } \mathcal{P}_A$ і $\text{adm } \mathcal{P}_B$ функцій ϱ , які обертаються в нуль зовні декартового добутку $B \times C_k$, а C_k позначає відкритий k -вимірний куб, що є перпендикулярною проєкцією C на k -вимірну координатну площину H_k , перпендикулярну до H^m . За побудовою

$$\int_{\{z\} \times C_k} \varrho^k(y) d\mathcal{L}^k(y) \geq 1 \quad \forall z \in A. \quad (2)$$

Якщо $M_p(\mathcal{P}_A) = \infty$, то доводити немає чого. Припустимо, що $M_p(\mathcal{P}_A) < \infty$. Нехай ϱ — довільна функція з класу $\text{adm}_* \mathcal{P}_A$, яка задовольняє умову

$$\int_C \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) < \infty.$$

Тоді також

$$\int_C \varrho^k(x) d\mathcal{L}^n(x) < \infty,$$

бо $k \leq p$. Оскільки $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^k$, за теоремою Фубіні (див., наприклад, теорему III(8.1) у [4]) функція

$$R(z) := \int_{\{z\} \times C_k} \varrho^k(y) d\mathcal{L}^k(y), \quad z \in B,$$

є вимірною та скінченною майже скрізь щодо міри Лебега $\mathcal{L}^m$ у C^m .

Звідси, зокрема, випливає, що множина $E := \{z \in B : R(z) < 1\}$ є вимірною, тому внаслідок борелевої регулярності міри $\mathcal{L}^m$ існують борелеві множини B_* і B^* у B такі, що $B_* \subseteq E \subseteq B^*$ і $\mathcal{L}^m(B_*) = \mathcal{L}^m(E) = \mathcal{L}^m(B^*)$ (див., наприклад, теорему III(6.6) у [4]). Зауважимо, що $E \cap A = \emptyset$ за умовою (2) і, отже, $B_* \cap A = \emptyset$. Тоді $A \subseteq B \setminus B_*$ і на підставі (V)

$$\mathcal{L}^m(B) = \mathcal{L}^m(B_*) + \mathcal{L}^m(B \setminus B_*) \geq \mathcal{L}^m(B_*) + \mathcal{L}^m(A) = \mathcal{L}^m(B^*) + \mathcal{L}^m(B),$$

тобто $\mathcal{L}^m(B^*) = 0$.

Нарешті, покладаючи $\rho_*(x) = \infty$ на борелевій множині $B^* \times C_k$ і $\rho_*(x) = \rho(z)$ зовні $B^* \times C_k$, отримуємо, що $\rho_* \in \text{adm}_* \mathcal{P}_B$ і, крім того,

$$\int_C \varrho_*^p(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_C \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Твердження 1 доведено.

3. Доведення леми 1. Використаємо метод від супротивного. А саме, припустимо, що висновок леми не є правильним. Тоді, на підставі борелевої регулярності лебегової міри $\mathcal{L}^m$, $m = n - k$, у $H^m := H^\perp$, знайдеться борелева оболонка B множини $\mathcal{E}$ така, що $\mathcal{L}^m(B) > 0$ (див. зауваження 1). І навіть більше, за твердженням 1

$$M_p(\mathcal{P}_B) = 0.$$

Проте якщо борелева функція $\varrho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ є допустимою для $\mathcal{P}_B$ і такою, що $\varrho \equiv 0$ зовні борелевої множини $C_k \times B$ (де C_k позначає відкритий k -вимірний куб, що є ортогональною проекцією C на H), то за нерівністю Гельдера

$$\int_{C_k \times B} \varrho^k(x) d\mathcal{L}^n(x) \leq \left(\int_{C_k \times B} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{k}{p}} \left(\int_{C_k \times B} d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{p-k}{p}}.$$

Отже, за теоремою Фубіні (див., наприклад, теорему III(8.1) у [4])

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) \geq \frac{\left(\int_{C_k \times B} \varrho^k(x) d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{p}{k}}}{\left(\int_{C_k \times B} d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{p-k}{k}}} \geq \frac{(\mathcal{L}^m(B))^{\frac{p}{k}}}{(h^k \mathcal{L}^m(B))^{\frac{p-k}{k}}},$$

де h — довжина ребра куба C , тобто

$$M_p(\mathcal{P}_B) \geq \frac{\mathcal{L}^m(B)}{h^{p-k}} > 0.$$

Отримана суперечність спростовує припущення, зроблене вище.

Лему 1 доведено.

4. Доведення теореми 1. За теоремою Ліндельофа, застосованою до простору $\mathbb{R}^n$ (див., наприклад, теорему I.5.XI в [16]), кожне покриття множини Ω відкритими множинами містить її зчисленне підпокриття. Отже, за властивістю мінорування M_p і субадитивності мір можна припустити, що Ω — відкритий куб C в $\mathbb{R}^n$, ребра якого є паралельними до координатних осей.

Припустимо спочатку, що множина E є вимірною за Лебегом у $\mathbb{R}^n$. Тоді, на підставі борелевої регулярності міри Лебега $\mathcal{L}^n$, існують борелеві множини B_* і B^* в $\mathbb{R}^n$ такі, що $B_* \subset E \subset B^*$ і $\mathcal{L}^n(B^* \setminus B_*) = 0$. Отже, за пунктом (ii) зауваження 1, $\mathcal{A}_S(B^* \setminus B_*) = 0$ і, отже, E є вимірною множиною щодо площі для p -м.в. k -вимірних поверхонь S у C . Навпаки, якщо останнє виконується, то E є вимірною щодо площі на м.в. k -вимірних площинах H у C , паралельних k -вимірній координатній площині (див. лему 1). Отже, множина E є вимірною з огляду на теорему Фубіні, до якої тут ми застосовуємо характеристичну функцію E . Першу частину теореми доведено.

Нехай тепер $\mathcal{L}^n(E) = 0$. За зауваженням 2 існує борелева множина B така, що $E \subset B$ і $\mathcal{L}^n(B) = 0$. Тоді з огляду на пункт (ii) зауваження 1 співвідношення (1) виконується для p -м.в. k -вимірних поверхонь S у C . Навпаки, якщо останнє виконується, то, зокрема, $\mathcal{A}_S(E) = 0$ для м.в. k -вимірних площин H у C , паралельних k -вимірній координатній площині (див. лему 1). Отже, $\mathcal{L}^n(E) = 0$ знову за теоремою Фубіні.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 3. За теоремою Лузіна (див., наприклад, розділ 2.3.5 у [3]), для кожної вимірної функції $\varrho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ існує борелева функція $\varrho^*: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ така, що $\varrho^* = \varrho$ м.с. в $\mathbb{R}^n$. Отже, за теоремою 1 для кожного $k = 1, \dots, n-1$ і $p \in [k, \infty)$ функція ϱ є вимірною на p -м.в. k -вимірних поверхнях S в $\mathbb{R}^n$.

Будемо говорити, що вимірна за Лебегом функція $\varrho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ є p -узагальнено допустимою для сім'ї $\mathcal{S}$, що складається з k -вимірних поверхонь S в $\mathbb{R}^n$ (коротко $\varrho \in \text{ext}_p \text{adm } \mathcal{S}$), якщо

$$\int_S \varrho^k d\mathcal{A} \geq 1$$

для p -м.в. $S \in \mathcal{S}$. Узагальненим p -модулем $\overline{M}_p(S)$ сім'ї $\mathcal{S}$ називається величина

$$\overline{M}_p(S) = \inf_{\mathbb{R}^n} \int \varrho^p(x) dm(x),$$

де інфімум береться по всіх функціях $\varrho \in \text{ext}_p \text{adm } \mathcal{S}$. У випадку $p = n$ використовуємо позначення $\overline{M}(S)$ і $\varrho \in \text{ext adm } \mathcal{S}$ відповідно. Для кожного $k = 1, \dots, n-1$, $p \in [k, \infty)$ і кожної сім'ї $\mathcal{S}$ k -вимірних поверхонь у $\mathbb{R}^n$ маємо рівність $\overline{M}_p(S) = M_p(S)$.

5. Борелеві оболонки і концентричні сфери. У порівнянні з площинами та гіперплощинами в багатьох випадках більш важливою є теорія модулів сімей сфер. Зокрема, це пов'язано з вивченням класів Соболева та Орліча–Соболева (див., наприклад, [13, 17, 18]). Практично всі результати, доведені вище, можна сформулювати також для модулів сімей сфер. Зокрема, наступний результат є аналогом твердження 1.

Твердження 2. Нехай R — кільце $\{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, і A — множина в (r_1, r_2) . Тоді для кожної борелевої оболонки B в (r_1, r_2) множини A справджується рівність

$$M_p(\mathcal{S}_A) = M_p(\mathcal{S}_B) \quad \forall p \geq n-1,$$

де $\mathcal{S}_A$ і $\mathcal{S}_B$ позначають сім'ї $(n-1)$ -вимірних сфер $S(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ таких, що $r \in A$ і $r \in B$ відповідно.

Доведення. Оскільки $A \subseteq B$, маємо $\mathcal{S}_A \subseteq \mathcal{S}_B$. Тоді для кожного фіксованого $p \in [n-1, \infty)$ на підставі монотонності модулів $M_p(\mathcal{S}_A) \leq M_p(\mathcal{S}_B)$. Отже, залишилося довести обернену нерівність $M_p(\mathcal{S}_A) \geq M_p(\mathcal{S}_B)$. Насамперед зауважимо, що, оскільки B є борелевою множиною, то

$$\begin{aligned} M_p(\mathcal{S}_A) &:= \inf_{\varrho \in \text{adm } \mathcal{S}_A} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) = \inf_{\varrho \in \text{adm}_* \mathcal{S}_A} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x), \\ M_p(\mathcal{S}_B) &:= \inf_{\varrho \in \text{adm } \mathcal{S}_B} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) = \inf_{\varrho \in \text{adm}_* \mathcal{S}_B} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x), \end{aligned}$$

де $\text{adm}_* \mathcal{S}_A$ і $\text{adm}_* \mathcal{S}_B$ позначають відповідно підкласи $\text{adm } \mathcal{S}_A$ і $\text{adm } \mathcal{S}_B$ функцій ϱ , які обертаються в нуль поза декартовим добутком $B \times \mathbb{S}^{n-1}$, а $\mathbb{S}^{n-1}$ — одинична сфера в $\mathbb{R}^n$ з центром у початку координат. За побудовою

$$\int_{\{r\} \times \mathbb{S}^{n-1}} \varrho^{n-1}(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \geq 1 \quad \forall r \in A. \quad (3)$$

Якщо $M_p(\mathcal{S}_A) = \infty$, то доводити немає чого. Тому далі припускаємо, що $M_p(\mathcal{S}_A) < \infty$. Нехай ϱ — довільна функція з класу $\text{adm}_* \mathcal{S}_A$ така, що

$$\int_R \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) < \infty.$$

Тоді також

$$\int_R \varrho^{n-1}(x) d\mathcal{L}^n(x) < \infty,$$

бо $p \geq n - 1$. Оскільки $\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^{n-1} = \mathcal{L}^1 \times \mathcal{H}^{n-1}$ в R , за теоремою Фубіні (див. теорему III(8.1) у [4]), функція

$$R(r) := \int_{\{r\} \times \mathbb{S}^{n-1}} \varrho^{n-1}(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad r \in B,$$

є вимірною та скінченною майже скрізь за мірою Лебега $\mathcal{L}^1$ у (r_1, r_2) .

Зокрема, тоді множина $E := \{r \in B : R(r) < 1\}$ є вимірною, на підставі борелевої регулярності міри $\mathcal{L}^1$ існують борелеві множини B_* і B^* у B такі, що $B_* \subseteq E \subseteq B^*$ і $\mathcal{L}^1(B_*) = \mathcal{L}^1(E) = \mathcal{L}^1(B^*)$ (див. теорему III(6.6) у [4]). Зауважимо, що $E \cap A = \emptyset$ за умовою (3). Отже, $B_* \cap A = \emptyset$, внаслідок чого $A \subseteq B \setminus B_*$ і згідно з (V)

$$\mathcal{L}^1(B) = \mathcal{L}^1(B_*) + \mathcal{L}^1(B \setminus B_*) \geq \mathcal{L}^1(B_*) + \mathcal{L}^1(A) = \mathcal{L}^1(B^*) + \mathcal{L}^1(B),$$

тобто $\mathcal{L}^1(B^*) = 0$.

Нарешті, покладаючи $\rho_*(x) = \infty$ на $B^* \times \mathbb{S}^{n-1}$ і $\rho_*(x) = \rho(z)$ у протилежному випадку, бачимо, що $\rho_* \in \text{adm}_* \mathcal{S}_B$ і

$$\int_R \varrho_*^p(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_R \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Твердження 2 доведено.

6. Модулі сфер і лебегова міра. Наступне твердження є аналогом леми 1.

Лема 2. Нехай R — кільце в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $R := \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x| < r_2\}$, $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$, і $\mathcal{S}_A$ — сукупність усіх $(n-1)$ -вимірних сфер $S(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ таких, що $r \in A \subset (r_1, r_2)$. Якщо $M_p(\mathcal{S}_A) = 0$ для деякого $p \geq n-1$, то $\mathcal{L}^1(A) = 0$.

Доведення. З огляду на монотонність модуля M_p і субадитивність міри $\mathcal{L}^1$ можна вважати, що $r_1 > 0$. За зауваженням 2 існує борелева оболонка B множини A , для якої (за твердженням 2) $M_p(\mathcal{S}_B) = 0$.

Припустимо, що $\mathcal{L}^m(A) > 0$. Тоді також $\mathcal{L}^m(B) > 0$. Нехай $\varrho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ — борелева функція, яка є допустимою для $\mathcal{S}_B$ і така, що $\varrho \equiv 0$ зовні $B \times \mathbb{S}^{n-1}$, де $\mathbb{S}^{n-1}$ — одинична сфера в $\mathbb{R}^n$ з центром у початку координат. Тоді за нерівністю Гельдера

$$\int_{B \times \mathbb{S}^{n-1}} \varrho^{n-1}(x) d\mathcal{L}^n(x) \leq \left(\int_{B \times \mathbb{S}^{n-1}} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{n-1}{p}} \left(\int_{B \times \mathbb{S}^{n-1}} d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{p-(n-1)}{p}}.$$

Отже, за теоремою Фубіні (див. теорему III (8.1) у [4])

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) \geq \frac{\left(\int_{B \times \mathbb{S}^{n-1}} \varrho^{n-1}(x) d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{p}{n-1}}}{\left(\int_{B \times \mathbb{S}^{n-1}} d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{p-(n-1)}{n-1}}} \geq \frac{(\mathcal{L}^1(B))^{\frac{p}{n-1}}}{(\alpha_{n-1} r_1^{n-1} \mathcal{L}^1(B))^{\frac{p-(n-1)}{n-1}}},$$

де $\alpha_{n-1} = n\pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ — площа $\mathbb{S}^{n-1}$, яка обчислюється через гамма-функцію Ейлера Γ . Іншими словами, покладаючи $C_{n,p} := (\alpha_{n-1})^{(n-1-p)/(n-1)}$, маємо

$$M_p(\mathcal{S}_B) \geq \mathcal{L}^1(B) C_{n,p} / r_1^{p-(n-1)} > 0.$$

Отримана суперечність спростовує припущення, зроблене вище.

Лему 2 доведено.

Відповідні результати можна також отримати для сімей всіляких сфероїдів (циліндрів, еліпсоїдів тощо).

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. B. T. Rushing, *Topological embeddings*, Pure and Appl. Math., vol. 52, Academic Press, New York and London (1973).
2. L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Math., CRC Press, Boca Raton, FL (1992).
3. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, Berlin (1969).
4. S. Saks, *Theory of the integral*, Dover, New York (1964).
5. T. Rado, P. V. Reichelderfer, *Continuous transformations in analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1955).
6. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math., **98**, 171–219 (1957).
7. J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lect. Notes Math., vol. 229, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
8. D. Kovtonyk, V. Ryazanov, *On the theory of mappings with finite area distortion*, J. Anal. Math., **104**, 291–306 (2008).
9. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Sci.- Business Media, LLC, New York (2009).
10. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion*, J. Anal. Math., **93**, 215–236 (2004).
11. B. Bojarski, V. Gutlyanskii, O. Martio, V. Ryazanov, *Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane*, EMS Tracts Math., vol. 19, Eur. Math. Soc., Zürich (2013).
12. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami equation. A geometric approach*, Dev. Math., **26**, Springer, New York (2012).
13. E. A. Sevost'yanov, *On the boundary and global behavior of mappings of Riemannian surfaces*, Filomat, **36**, 1295–1327 (2022).
14. P. R. Halmos, *Measure theory*, Springer, New York etc. (1974).
15. B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Corrected reprint of the second (1965) edition, Dover Publ., Inc. Mineola, NY (2003).
16. K. Kuratowski, *Topology*, vol. 1, Acad. Press, New York, London (1968).
17. Д. Ковтонюк, Р. Салимов, Е. Севостьянов, *К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева*, Наук. думка, Киев (2013).
18. E. A. Sevost'yanov, *On the local and boundary behaviour of mappings of factor spaces*, Complex Var. and Elliptic Equat., **67**, № 2, 284–314 (2022).

Одержано 30.06.23