

Марина Ільєнко¹, Анастасія Поліщук (Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”)

ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ БАУМА – КАЦА ДЛЯ СУМ ЕЛЕМЕНТІВ ЛІНІЙНИХ АВТОРЕГРЕСІЙНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ m -ГО ПОРЯДКУ

We establish necessary and sufficient conditions for the convergence of the Baum – Katz series for the sums of elements of linear m th order autoregressive sequences of random variables.

Встановлено необхідні і достатні умови збіжності рядів Баума – Каца для сум елементів лінійних авторегресійних послідовностей випадкових величин m -го порядку.

1. Вступ. Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ задано послідовність випадкових величин $(\xi_k) = (\xi_k, k \geq 1)$:

$$\xi_k = b_1 \xi_{k-1} + b_2 \xi_{k-2} + \dots + b_m \xi_{k-m} + \theta_k, \quad k \geq 1, \quad (1)$$

$$\xi_{1-m} = \dots = \xi_{-1} = \xi_0 = 0,$$

де (θ_k) — послідовність незалежних копій випадкової величини θ , а $(b_j; 1 \leq j \leq m)$ — невідповідний набір дійсних чисел. Зауважимо, що лінійні регресійні моделі випадкових величин та різні їх узагальнення вивчалися багатьма авторами впродовж кількох десятиліть. Серед великої кількості публікацій щодо задач та цілих напрямків, які охоплюють лінійні регресійні схеми, відмітимо, наприклад, монографію [5] (див. також посилання в ній).

Для елементів послідовності (ξ_k) покладемо

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1. \quad (2)$$

Для $0 < p < 2$, $r \geq p$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2} \mathbb{P} \left\{ \frac{|S_n|}{n^{1/p}} > \varepsilon \right\} \quad (3)$$

і будемо вивчати необхідні й достатні умови збіжності цього ряду.

Зрозуміло, що частковим випадком послідовності (ξ_k) є послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, якщо в (1) покласти $b_j = 0$, $1 \leq j \leq m$. Саме для послідовностей часткових сум незалежних випадкових величин $S_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$, $n \geq 1$, вперше в роботі [13] було розглянуто ряд (3) при $r = 2p = 2$. У згаданій роботі автори ввели поняття повної збіжності послідовності випадкових величин і довели, що з умови $\mathbb{E}\theta^2 < \infty$ випливає збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\theta \right| > \varepsilon \right\}$$

¹ Відповідальна за листування, e-mail: mari-run@ukr.net.

для будь-якого $\varepsilon > 0$. Обернене твердження було доведено в роботі [8]. Пізніше Спітцер (див. [19]) показав, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{P} \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\theta \right| > \varepsilon \right\} < \infty$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$ тоді й лише тоді, коли $\mathbb{E}|\theta| < \infty$. Цей випадок є також частковим випадком ряду (3), якщо покласти $r = p = 1$. Нарешті, Баум і Кац (див. [3]) розглянули ряд (3) для сум незалежних випадкових величин у його загальному вигляді та встановили, що цей ряд є збіжним тоді й лише тоді, коли $\mathbb{E}|\theta|^r < \infty$, за умови, що $\mathbb{E}\theta = 0$ для $r \geq 1$.

Далі, результати, отримані для сум незалежних випадкових величин, було поширено на суми незалежних елементів у банаховому просторі (див., наприклад, [12]), а також на суми елементів масивів випадкових величин (див. [6, 7, 9, 14, 15, 18]). Щодо послідовностей із залежностями деякі результати отримано в роботах [1, 2, 11]. У статті [16] аналог теореми Баума – Каца доведено для сум елементів авторегресійних послідовностей першого порядку (тобто якщо в (1) $b_1 \neq 0$, $b_j = 0$, $2 \leq j \leq m$). При цьому ідеї, застосовані в останній роботі, є досить загальними і дозволяють перенести відповідний результат на випадок авторегресійної послідовності довільного порядку. Отже, метою цієї роботи є встановлення необхідних і достатніх умов збіжності ряду (3) для сум елементів послідовності (1).

2. Критерій збіжності рядів Баума – Каца для сум елементів лінійних m -авторегресій. Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема 2.1. Нехай в (1) коефіцієнти b_j , $1 \leq j \leq m$, є такими, що $\max_{1 \leq k \leq m} |\lambda_k| < 1$, де λ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, – корені рівняння

$$\lambda^m - b_1 \lambda^{m-1} - b_2 \lambda^{m-2} - \dots - b_{m-1} \lambda - b_m = 0. \quad (4)$$

Якщо $0 < p < 2$ і $r \geq p$, то ряд (3) є збіжним тоді й лише тоді, коли $\mathbb{E}|\theta|^r < \infty$, де $\mathbb{E}\theta = 0$ для $r \geq 1$.

Перш ніж доводити теорему, сформулюємо і доведемо дві допоміжні леми. Для цього розглянемо не випадкову рекурентну послідовність $(u_n, n \geq 1)$:

$$\begin{aligned} u_{1-m} &= \dots = u_{-1} = 0, \quad u_0 = 1, \\ u_n &= b_1 u_{n-1} + b_2 u_{n-2} + \dots + b_m u_{n-m}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (5)$$

і для $d \geq 0$ покладемо

$$u(d) = \sum_{i=0}^d u_i.$$

Лема 2.1. Нехай в (1) коефіцієнти b_j , $1 \leq j \leq m$, є такими, що справджуються умови теореми 2.1. Тоді існує деяка додатна стала L така, що

$$|u(d)| \leq L = \text{const}, \quad d \geq 0.$$

Доведення. Розглянемо дві дійснозначні квадратні матриці порядку m :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{m-1} & b_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що матриця C є матрицею Фробеніуса. Оскільки $b_m \neq 0$, то матриця C є не-виродженою. Характеристичне рівняння для матриці C має вигляд (4). Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, $s \leq m$, — різні корені цього рівняння, і $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$ — відповідно їхні кратності. Зазначимо, що корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, $s \leq m$, є, взагалі кажучи, комплекснозначними. Позначимо через ρ спектральний радіус матриці C , тобто $\rho = \max_{1 \leq k \leq s} |\lambda_k|$, а через μ максимальну кратність коренів λ_k , $1 \leq k \leq s$, тобто $\mu = \max_{1 \leq k \leq s} \{\nu_k : |\lambda_k| = \rho\}$.

Зауважимо, що

$$CM = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \dots & 0 \\ u_0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{2-m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі,

$$C^2M = \begin{pmatrix} u_2 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & 0 & \dots & 0 \\ u_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{3-m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C^3M = \begin{pmatrix} u_3 & 0 & \dots & 0 \\ u_2 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{4-m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Методом математичної індукції неважко довести, що

$$C^n M = \begin{pmatrix} u_n & 0 & \dots & 0 \\ u_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ u_{n-2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-m+1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Для квадратної матриці $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ з дійсними елементами через $\|\cdot\|$ позначимо норму Фробеніуса, тобто $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^m a_{i,j}^2\right)^{1/2}$. Відповідно до оцінок, встановлених у роботі [17] (див. також лему 7.7.3 [4]), для будь-якого $n \geq 1$

$$c_1 \rho^n n^{\mu-1} \leq \|C^n M\| \leq c_2 \rho^n n^{\mu-1},$$

де c_1 і c_2 — деякі сталі такі, що не залежать від n і $c_2 > c_1 > 0$.

Оскільки

$$(C^0 + C^1 + C^2 + \dots + C^d)M = \begin{pmatrix} u(d) & 0 & \dots & 0 \\ u(d-1) & 0 & \dots & 0 \\ u(d-2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(d-m+1) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} |u(d)| &\leq \sqrt{(u(d))^2 + (u(d-1))^2 + \dots + (u(d-m+1))^2} \\ &= \left\| \sum_{l=0}^d C^l M \right\| \leq \sum_{l=0}^d \|C^l M\| \leq c_2 \sum_{l=0}^d \rho^l l^{\mu-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

де c_2 — деяка додатна стала.

Тепер, згідно з (6), для будь-якого фіксованого μ величини $|u(d)|$ є рівномірно обмеженими, оскільки вони не перевищують відповідні часткові суми збіжного знакододатного числового ряду $\sum_{l=0}^{\infty} \rho^l l^{\mu-1}$, де $\rho < 1$. Отже, існує деяка стала $L > 0$ така, що

$$|u(d)| \leq L = \text{const}, \quad d \geq 0.$$

Лему 2.1 доведено.

Лема 2.2. Нехай в (1) коефіцієнти b_j , $1 \leq j \leq m$, є такими, що справджуються умови теореми 2.1. Тоді

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = \frac{1}{1 - b_1 - b_2 - \dots - b_m}.$$

Доведення. Застосуємо метод генератрис. Для цього помножимо рекурентне співвідношення (5) на x^n :

$$u_n x^n = b_1 u_{n-1} x^n + b_2 u_{n-2} x^n + \dots + b_m u_{n-m} x^n, \quad n \geq 1,$$

і підсумуємо по $n \geq m$:

$$\sum_{n=m}^{\infty} u_n x^n = b_1 x \sum_{n=m}^{\infty} u_{n-1} x^{n-1} + b_2 x^2 \sum_{n=m}^{\infty} u_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_m x^m \sum_{n=m}^{\infty} u_{n-m} x^{n-m}.$$

Покладемо $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, для яких цей степеневий ряд є збіжним, і зауважимо, що $\sum_{i=0}^{\infty} u_i = f(1)$. Тоді останнє рекурентне співвідношення набере вигляду

$$\begin{aligned} f(x) - (u_0 + u_1 x + \dots + u_{m-1} x^{m-1}) &= b_1 x (f(x) - (u_0 + u_1 x + \dots + u_{m-2} x^{m-2})) \\ &+ b_2 x^2 (f(x) - (u_0 + u_1 x + \dots + u_{m-3} x^{m-3})) + \dots \\ &+ b_{m-1} x^{m-1} (f(x) - u_0) + b_m x^m f(x). \end{aligned}$$

Це співвідношення еквівалентне такому:

$$\begin{aligned}
& f(x)(1 - b_1x - b_2x^2 - \dots - b_mx^m) \\
&= u_0 + x(u_1 - b_1u_0) + x^2(u_2 - b_1u_1 - b_2u_0) + \dots \\
&+ x^{m-1}(u_{m-1} - b_1u_{m-2} - b_2u_{m-3} - \dots - b_{m-1}u_0).
\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи (5), отримуємо

$$f(x)(1 - b_1x - b_2x^2 - \dots - b_mx^m) = u_0 = 1.$$

Тому

$$f(1) = \frac{1}{1 - b_1 - b_2 - \dots - b_m}.$$

Лему 2.2 доведено.

Доведення теореми 2.1. З (1) і (5) випливає, що

$$\xi_k = \sum_{l=1}^k u_{k-l}\theta_l, \quad k \geq 1.$$

Таким чином,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^k u_{k-l}\theta_l \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-k} u_i \right) \theta_k = \sum_{k=1}^n u(n-k)\theta_k, \quad n \geq 1. \quad (7)$$

Доведемо спочатку *достатність*, тобто припустимо, що $\mathbb{E}|\theta|^r < \infty$, і покажемо, що ряд (3) є збіжним. При цьому повторимо міркування, проведені у роботі [16] для одновимірної авторегресійної послідовності.

Зауважимо, що оскільки ваги $u(n-k)$ є рівномірно обмеженими, то для двох часткових випадків, а саме $r = 2p$ (ряд Сюя–Роббінса) і $r = p$ (ряд Спітцера), твердження теореми безпосередньо випливає з результатів Гута (див. [9], теореми 7.4 та 7.1 відповідно). Проте ми проведемо доведення одразу для всіх $r > p$.

Нехай спочатку θ — симетрично розподілена випадкова величина. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і застосуємо ітеровану версію нерівності Хофмана–Йоргенсена (див. [10, с. 141] або [9]) з $s = t = n^{1/p}\varepsilon$. Таким чином, для $j \geq 1$ існують сталі C_j і D_j такі, що

$$\mathbb{P}\{|S_n| > n^{1/p}\varepsilon \cdot 3^j\} \leq C_j \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{|u(n-k)\theta_k| > n^{1/p}\varepsilon\} + D_j \left(\mathbb{P}\{|S_n| > n^{1/p}\varepsilon\} \right)^{2^j}. \quad (8)$$

Далі, з огляду на лему 2.1 перший доданок у (8) можна оцінити таким чином:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{|u(n-k)\theta_k| > n^{1/p}\varepsilon\} &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left\{|\theta_k| > \frac{n^{1/p}\varepsilon}{|u(n-k)|}\right\} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left\{|\theta_k| > n^{1/p}\varepsilon L^{-1}\right\} = n \mathbb{P}\left\{|\theta| > n^{1/p}\varepsilon_2\right\},
\end{aligned}$$

де $\varepsilon_2 = \varepsilon L^{-1}$. Покладемо для визначеності $\varepsilon_2 = 1$. Нехай $F_\theta(x)$ — функція розподілу випадкової величини θ . Тоді з урахуванням отриманої вище оцінки

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{P} \left\{ |u(n-k)\theta_k| > n^{1/p}\varepsilon \right\} \right) \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} n \mathbb{P} \left\{ |\theta_k| > n^{1/p}\varepsilon_2 \right\} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-1} \int_{n^{1/p}}^{\infty} dF_\theta(x) \\ & = 2 \int_1^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{[x^p]} n^{r/p-1} \right) dF_\theta(x) \sim 2 \int_1^{\infty} \left(\int_1^{[x^p]} t^{r/p-1} dt \right) dF_\theta(x) \\ & = 2 \int_1^{\infty} \left(\frac{p}{r} t^{r/p} \right) \Big|_1^{[x^p]} dF_\theta(x) \sim \frac{2p}{r} \int_1^{\infty} x^r dF_\theta(x) < \infty, \end{aligned}$$

оскільки $\mathbb{E}|\theta|^r < \infty$. Тут символом $\sim$ позначено еквівалентну збіжність інтегралів, а через $[\cdot]$ — цілу частину.

Перейдемо до оцінювання другого доданка у (8) і покажемо, що існує таке $j \geq 1$, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} \left(\mathbb{P} \left\{ |S_n| > n^{1/p}\varepsilon \right\} \right)^{2^j} \quad (9)$$

є збіжним. Для цього знайдемо верхню оцінку для $\mathbb{P} \left\{ |S_n| > n^{1/p}\varepsilon \right\}$.

За нерівністю Маркова для $r > p$

$$\mathbb{P} \left\{ |S_n| > n^{1/p}\varepsilon \right\} \leq \frac{\mathbb{E}|S_n|^r}{(n^{1/p}\varepsilon)^r} = \frac{\mathbb{E}|S_n|^r}{\varepsilon_1 n^{r/p}}.$$

Далі розглянемо окремо $\mathbb{E}|S_n|^r$ для таких випадків: 1) $0 < r \leq 1$, 2) $r > 1$.

Випадок 1: $0 < r \leq 1$. Застосовуючи до $\mathbb{E}|S_n|^r$ відому c_r -нерівність (див. [10, с. 127]) з $c_r = 1$, отримуємо

$$\mathbb{E}|S_n|^r \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|u(n-k)\theta_k|^r = \mathbb{E}|\theta|^r \sum_{k=1}^n |u(n-k)|^r \leq \mathbb{E}|\theta|^r n L^r.$$

Випадок 2: $r > 1$. До $\mathbb{E}|S_n|^r$ послідовно застосуємо нерівність Марцинкевича – Зигмунда (див. [10, с. 150]) і нерівність

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{r/2} \leq n^{0 \vee (r/2-1)} \sum_{i=1}^n a_i^r$$

для додатних a_i , $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ і $r > 0$. В результаті отримаємо

$$\mathbb{E}|S_n|^r \leq b_r \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n (u(n-k)\theta_k)^2 \right)^{r/2} \leq b_r n^{0 \vee (r/2-1)} \mathbb{E} \sum_{k=1}^n |u(n-k)\theta_k|^r$$

$$\begin{aligned}
&= b_r n^{0 \vee (r/2-1)} \mathbb{E}|\theta|^r \sum_{k=1}^n |u(n-k)|^r \\
&\leq b_r n^{0 \vee (r/2-1)} \mathbb{E}|\theta|^r n L^r = b_r n^{1 \vee (r/2)} \mathbb{E}|\theta|^r L^r,
\end{aligned}$$

де b_r — деяка додатна стала, що фігурує в нерівності Марцинкевича–Зигмунда.

Поєднуючи розглянуті вище випадки, маємо

$$\mathbb{E}|S_n|^r \leq L^r \mathbb{E}|\theta|^r n^{1 \vee (r/2)},$$

звідки

$$\mathbb{P}\{|S_n| > n^{1/p} \varepsilon\} \leq \frac{C(r) \mathbb{E}|\theta|^r}{n^{r/p - (1 \vee (r/2))}},$$

де $C(r) = L^r / \varepsilon_1$.

Нарешті, якщо $r \leq 2$, то достатньо у (8) покласти $j = 1$, і тоді отримаємо

$$n^{r/p-2} \left(\mathbb{P}\{|S_n| > n^{1/p} \varepsilon\} \right)^{2^j} \leq n^{r/p-2} \frac{(C(r) \mathbb{E}|\theta|^r)^2}{n^{2r/p-2}} = \frac{(C(r) \mathbb{E}|\theta|^r)^2}{n^{r/p}}.$$

Звідси на підставі того, що $\mathbb{E}|\theta|^r < \infty$, випливає, що ряд (9) є збіжним.

Якщо ж $r > 2$, то

$$n^{r/p-2} \left(\mathbb{P}\{|S_n| > n^{1/p} \varepsilon\} \right)^{2^j} \leq n^{r/p-2} \frac{(C(r) \mathbb{E}|\theta|^r)^{2^j}}{n^{2^j(r/p-r/2)}} = \frac{(C(r) \mathbb{E}|\theta|^r)^2}{n^{2^j(r/p-r/2)-r/p+2}},$$

звідки випливає, що ряд (9) збігається для таких j , що

$$2^j \left(\frac{r}{p} - \frac{r}{2} \right) - \frac{r}{p} + 2 > 1.$$

Зауважимо, що таке значення j завжди можна підібрати. Таким чином, достатність теореми 2.1 доведено для симетрично розподіленої випадкової величини θ .

Нехай тепер θ — довільна випадкова величина. Позначимо через θ^{sym} симетризацію величини θ , тобто $\theta^{sym} = \theta - \theta_1$, де θ_1 — копія випадкової величини θ , незалежна від неї. Згідно з симетризацийною моментною нерівністю (див. [10, с. 135]), з припущення $\mathbb{E}|\theta|^r < \infty$ випливає, що $\mathbb{E}|\theta^{sym}|^r < \infty$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2} \mathbb{P}\{|S_n^{sym}| > \varepsilon n^{1/p}\} < \infty,$$

де S_n^{sym} — симетризація S_n . Зауважимо, що для будь-якого дійсного числа c виконується ланцюжок включень

$$\{|S_n - S'_n| > c\} \supset \{|S_n| > 2c\} \cap \{|S'_n| \leq c\},$$

звідки

$$\mathbb{P}\{|S_n^{sym}| > c\} \geq \mathbb{P}\{|S_n| > 2c\} \mathbb{P}\{|S'_n| \leq c\},$$

де S'_n — незалежна копія S_n . Покладаючи $c = \varepsilon n^{1/p}$, з останньої нерівності маємо

$$\mathbb{P}\{|S_n| > 2\varepsilon n^{1/p}\} \leq \mathbb{P}\{|S_n^{sym}| > \varepsilon n^{1/p}\} / \mathbb{P}\{|S'_n| \leq \varepsilon n^{1/p}\}.$$

Залишилося з'ясувати питання про відокремленість від нуля величини $\mathbb{P}\{|S'_n| \leq \varepsilon n^{1/p}\}$. Але оскільки $\mathbb{E}|\theta|^r < \infty$, до того ж $\mathbb{E}\theta = 0$ як тільки $r \geq 1$, то зі слабкого закону великих чисел для незалежних за рядками випадкових масивів (див. лему 2.2 [9]) випливає, що $S'_n/n^{1/r} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ за ймовірністю. Остаточно, оскільки $r \geq p$, то і $S'_n/n^{1/p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ за ймовірністю. Тому $\mathbb{P}\{|S'_n| \leq \varepsilon n^{1/p}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, а отже величина $\mathbb{P}\{|S'_n| \leq \varepsilon n^{1/p}\}$ відокремлена від нуля. Таким чином, ряд (3) є збіжним і у випадку несиметрично розподіленої генеруючої величини θ . Достатність теореми 2.1 повністю доведено.

Перейдемо до доведення *необхідності*. Зосередимося детально на ідеї доведення для випадку $r = 2p$. Припустимо знову, що θ є симетрично розподіленою випадковою величиною, і доведемо, що із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|S_n| > \varepsilon n^{1/p}\} < \infty$ випливає $\mathbb{E}|\theta|^{2p} < \infty$.

Відповідно до (7) і теореми 2.3 з [9], ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{|u(n-k)\theta_k| > \varepsilon n^{1/p}\}$$

збігається для будь-якого $\varepsilon > 0$. Зауважимо, що останнє міркування є, зокрема, наслідком нерівності Леві (див. [10, с. 138]) і леми Бореля–Кантеллі.

Далі, зауважимо, що величини $|u(n-k)|$ рівномірно відокремлені від 0 знизу принаймні починаючи з деякого номера. Справді, за лемою 2.2 числовий ряд $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ є збіжним до числа

$$\frac{1}{1 - b_1 - b_2 - \dots - b_m} \neq 0.$$

Таким чином, послідовність часткових сум ряду $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ є збіжною, і за властивістю границі існують число $M > 0$ і номер N такий, що для всіх $n \geq N$ виконується $|u(n-k)| = \left| \sum_{i=0}^{n-k} u_i \right| \geq M > 0$.

В свою чергу, в отриманих оцінках зустрічаються значення $u(n-k)$ для всіх $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $|u(n-k)| \geq M > 0$ для всіх $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, інакше можна вибрати n настільки великим, щоб ця нерівність виконувалась принаймні для половини з цих значень і теж не порушувала наведені далі міркування. Отже,

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{|u(n-k)\theta_k| > \varepsilon n^{1/p}\} \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{M|\theta_k| > \varepsilon n^{1/p}\} \geq n\mathbb{P}\{|\theta| > \varepsilon_1 n^{1/p}\},$$

де $\varepsilon_1 = \varepsilon/M$.

Нехай $F_{\theta}(x)$ — функція розподілу випадкової величини θ . Для визначеності покладемо $\varepsilon_1 = 1$ і розглянемо збіжний ряд

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}\{|\theta| > n^{\frac{1}{p}}\} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{n^{\frac{1}{p}}}^{\infty} dF_{\theta}(x) \\ &= 2 \int_1^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{[x^p]} n \right) dF_{\theta}(x) = 2 \int_1^{\infty} \frac{(1 + [x^p])[x^p]}{2} dF_{\theta}(x) \end{aligned}$$

$$> \int_1^\infty [x^p]^2 dF_\theta(x) > \int_1^\infty \left(\frac{x^p}{2}\right)^2 dF_\theta(x) = \frac{1}{4} \int_1^\infty x^{2p} dF_\theta(x).$$

З цих міркувань випливає, що інтеграл $\int_1^\infty x^{2p} dF_\theta(x)$ є збіжним, а отже $\mathbb{E}|\theta|^{2p} < \infty$.

Тепер нехай θ — довільна випадкова величина, а $\mu\theta$ — її медіана. Згідно зі слабкою нерівністю симетризації (див. [10, с. 134]), зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\{|S_n| > \varepsilon n^{1/p}\}$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\{|S_n^{sym}| > \varepsilon n^{1/p}\}$. Тоді, враховуючи міркування, проведені вище, маємо $\mathbb{E}|\theta^{sym}|^{2p} < \infty$. Нарешті, знову за симетризуючою моментною нерівністю

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\theta|^{2p} &= \mathbb{E}|\theta - \mu\theta + \mu\theta|^{2p} \leq C(p)\mathbb{E}(|\theta - \mu\theta|^{2p} + |\mu\theta|^{2p}) \\ &\leq 2C(p)\mathbb{E}|\theta^{sym}|^{2p} + C(p)|\mu\theta|^{2p}, \end{aligned}$$

де $C(p) = 1$ або 2^{2p-1} в залежності від того $p \leq \frac{1}{2}$ чи $\frac{1}{2} \leq p < 2$.

Отже, ми довели, що $\mathbb{E}|\theta|^{2p} < \infty$.

Тепер на прикладі ряду Спітцера (випадок $r = p$) застосуємо ідею, яку можна перенести на всі інші випадки. Цю ідею запозичено в [9].

Знову припустимо, що θ — симетрично розподілена випадкова величина і для будь-якого $\varepsilon > 0$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \mathbb{P}\{|S_n| > \varepsilon n^{1/p}\}$ є збіжним. Введемо послідовність попарно незалежних подій $(A_n, n \geq 1)$, які є незалежними з величинами θ_k , $k \geq 1$, та $\mathbb{P}\{A_n\} = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Тоді

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \mathbb{P}\{|S_n| > \varepsilon n^{1/p}\} = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\{A_n; |S_n| > \varepsilon n^{1/p}\}.$$

І навіть більше, згідно з нерівністю Леві,

$$\mathbb{P}\{A_n; |S_n| > \varepsilon n^{1/p}\} \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}\left\{A_n; \max_{1 \leq k \leq n} |u(n-k)\theta_k| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}\right\},$$

звідки

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\left\{A_n; \max_{1 \leq k \leq n} |u(n-k)\theta_k| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty.$$

Далі, за лемою Бореля–Кантеллі

$$\mathbb{P}\left\{A_n; \max_{1 \leq k \leq n} |u(n-k)\theta_k| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}} \text{ нескінченно багато} \right\} = 0.$$

Останнє, в свою чергу, означає, що тільки скінченне число рядків, в яких відбувається подія A_n , мають максимальні елементи, більші за $\varepsilon n^{\frac{1}{p}}$. Таким чином, якщо рядки попарно незалежні, то, згідно з лемою Бореля–Кантеллі,

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{A_n; |u(n-k)\theta_k| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}\} < \infty.$$

Але, оскільки під знаком ймовірності стоять випадкові величини, які належать до одного і того ж рядка, без обмеження загальності можемо вважати, що рядки є незалежними, і тому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{|u(n-k)\theta_k| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}\}$$

збігається для всіх $\varepsilon > 0$. Щоб завершити доведення, необхідно дослівно повторити всі міркування, проведені у попередньому випадку.

Зауважимо, що у випадку $r < 2p$ для доведення необхідності слід ввести послідовність незалежних подій $(A_n, n \geq 1)$ таку, що $\mathbb{P}\{A_n\} = n^{r/p-2}$, $n \geq 1$, і повторити міркування.

Якщо ж $r > 2p$, то наведену ідею можна застосувати з деякою модифікацією, яка полягає в тому, що на відміну від попереднього випадку, де ми „проріджували рядки”, будемо „дублювати рядки”. Для наочності розглянемо її коротко спочатку для випадку $r = 3p$. Нехай θ — симетрично розподілена випадкова величина і для будь-якого $\varepsilon > 0$ є збіжним ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}\{|S_n| > \varepsilon n^{1/p}\}.$$

Зі збіжності цього ряду та нерівності Леві випливає, що є збіжним ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |u(n-k)\theta_k| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}\right\},$$

в якому для кожного n доданок вигляду $\mathbb{P}\{\max_{1 \leq k \leq n} |u(n-k)\theta_k| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}\}$ зустрічається n разів. Тому запишемо цей ряд у вигляді суми рядків, де перший рядок відповідає $n = 1$, два наступних рядки є однаковими і відповідають $n = 2$, три наступних рядки відповідають $n = 3$ і т.д. Оскільки випадкові величини θ_k стоять під знаком ймовірності, то, не порушуючи доведення, можна вважати, що для кожного n в усіх n „однакових” рядках величини θ_k , $1 \leq k \leq n$, є незалежними. Таким чином, рядки знову є попарно незалежними. Далі повторюючи міркування із застосуванням леми Бореля – Кантеллі, отримуємо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{|u(n-k)\theta_k| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}\} < \infty,$$

звідки, в свою чергу, доведення дослівно переноситься із наведеного вище (для випадку $r = 2p$). Зауважимо також, що ідея „дублювання рядків” так само працює для будь-яких степенів $(r/p - 2) \in \mathbb{N}$. Нарешті, комбінуючи „прорідження” та „дублювання рядків”, доводимо необхідність теореми 2.1 для випадку, коли $(r/p - 2) > 0$, але не є цілим.

Приклад 2.1. Нехай θ — гауссівська випадкова величина з $\mathbb{E}\theta = 0$. У цьому випадку рівняння (1) задає частковий випадок так званої гауссівської m -марковської послідовності випадкових величин зі сталими коефіцієнтами. Тоді, якщо $0 < p < 2$, $r \geq p$, і всі корені рівняння (4) знаходяться всередині одиничного кола, згідно з теоремою 2.1, ряд (3) є збіжним.

3. Висновки. У статті знайдено критерій збіжності рядів Баума – Каца для сум елементів лінійних авторегресійних послідовностей m -го порядку. За досить очікуваних припущень на коефіцієнти авторегресійної послідовності необхідні і достатні умови збіжності такого ряду виражаються у термінах існування певного моменту генеруючої випадкової величини, що цілком відповідає класичним результатам для незалежного випадку.

Від імені всіх авторів відповідальна за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. M. Amini, A. Bozorgnia, H. Naderi, A. Volodin, *On complete convergence of moving average processes for NSD sequences*, Sib. Adv. Math., **25**, № 1, 11–20 (2015).
2. R. Balka, T. Tómacs, *Baum–Katz type theorems with exact threshold*, Stochastics, **90**, № 4, 473–503 (2018).
3. L. E. Baum, M. Katz, *Convergence rates in the law of large numbers*, Trans. Amer. Math. Soc., **120**, 108–123 (1965).
4. V. V. Buldygin, S. A. Solntsev, *Asymptotic behavior of linearly transformed sums of random variables*, Kluwer Acad. Publ. (1997).
5. D. Buraczewski, E. Damek, T. Mikosch, *Stochastic models with power law tails. The equation $X = AX + B$* , Springer (2016).
6. G.-H. Cai, *Strong laws for weighted sums of i.i.d. random variables*, Electron. Res. Announc. Math. Sci., **12**, 29–36 (2006).
7. P. Chen, X. Ma, S. H. Sung, *On complete convergence and strong law for weighted sums of i.i.d. random variables*, Abstr. Appl. Anal. (2014).
8. P. Erdős, *On a theorem of Hsu and Robbins*, Ann. Math. Statist., **20**, 286–291 (1949).
9. A. Gut, *Complete convergence for arrays*, Period. Math. Hungar., **25**, № 1, 51–75 (1992).
10. A. Gut, *Probability: a graduate course*, 2nd ed., Springer (2013).
11. N. V. Huan, *The Baum–Katz theorem for dependent sequences*, Acta Math. Hungar., **151**, 162–172 (2017).
12. N. V. Huan, *On the complete convergence of sequences of random elements in Banach spaces*, Acta Math. Hungar., **159**, 511–519 (2019).
13. P. L. Hsu, H. Robbins, *Complete convergence and the law of large numbers*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **33**, № 2, 25–31 (1947).
14. T.-C. Hu, F. Moritz, R. L. Taylor, *Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random variables*, Acta Math. Hungar., **54**, № 1-2, 153–162 (1989).
15. T.-C. Hu, D. Szynal, A. I. Volodin, *A note on complete convergence for arrays*, Statist. Probab. Lett., **38**, № 1, 27–31 (1998).
16. M. Iliencko, *On the convergence of the Baum–Katz series for elements of a linear autoregression*, Acta Math. Hungar., **164**, 413–427 (2021).
17. В. А. Коваль, *Асимптотическое поведение решений стохастических рекуррентных уравнений в пространстве $\mathbb{R}^d$* , Укр. мат. журн., **43**, № 6, 829–833 (1991).
18. D. Li, M. B. Rao, T. Jiang, X. Wang, *Complete convergence and almost sure convergence of weighted sums of random variables*, J. Theor. Probab., **8**, № 1, 49–76 (1995).
19. F. Spitzer, *A combinatorial lemma and its application to probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc., **82**, № 2, 323–339 (1956).

Одержано 08.10.22