DOI: 10.3842/umzh.v76i2.6829

УДК 517.9

Володимир Капустян, Іван Пишнограєв[1] (Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”)

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ’ЯЗКУ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З МУЛЬТИПЛІКАТИВНИМ КЕРУВАННЯМ І НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

We consider a parabolic-hyperbolic equation with multiplicative control and nonlocal boundary conditions. By using the Riess biorthogonal basis, the problem is reduced to a sequence of one-dimensional problems with alternative representations of their solutions. Conditions guaranteeing the existence and uniqueness of solution to the analyzed problem are established.

Розглядається параболо-гіперболічне рівняння з мультиплікативним керуванням і нелокальними крайовими умовами. З використанням біортогонального базису Рісса задачу зведено до послідовності одновимірних задач з альтернативними зображеннями їхніх розв’язків. Виведено умови, які гарантують існування та єдиність цього розв’язку.

1. Вступ. Дослідження математичних об’єктів у вигляді спряження параболічних та гіперболічних рівнянь розпочато в роботах І. М. Гельфанда [1]. О. А. Ладиженська та Л. Ступяліс [2] такі крайові задачі розглянули у багатовимірному просторі. У статті [3] було досліджено питання розв’язності аналога задачі Біцадзе – Самарського з дробовою похідною у крайовій умові для рівняння параболо-гіперболічного типу. Вперше параболо-гіперболічне рівняння саме з нелокальними крайовими умовами для випадку сталих коефіцієнтів було досліджено у роботі [4] з використанням базисів Рісса у біортогональних системах. У [5] розглянуто рівняння мішаного типу з нелокальними граничними умовами, порядок якого вироджується вздовж лінії зміни типу. У статті [6] результати було поширено на параболо-гіперболічні рівняння з нелокальними крайовими умовами і керуванням у правій частини рівняння. Виявилося, що розв’язок локально залежить від керування в момент перемикання рівнянь. Для таких крайових задач у статтях [7, 8] досліджено деякі задачі оптимального керування зі спеціальними критеріями. Отримано умови оптимальності, побудовано та обґрунтовано наближені оптимальні керування. У статті [9] аналогічні результати отримано для параболо-гіперболічних рівнянь, що вироджуються.

Дослідження аналогічних задач в нових постановках триває. Так, у статті [10] розглянуто розв’язки крайової задачі для навантаженого інтегро-диференціального рівняння третього порядку з параболо-гіперболічним оператором. У статті [11] знайдено апріорні оцінки розв’язків задачі Трікомі для рівняння мішаного типу другого порядку з оператором Геллерштедта в області гіперболічності, а в [12] розглянуто пряму та обернену задачі для модельного рівняння мішаного параболо-гіперболічного типу.

Параболо-гіперболічне рівняння з мультиплікативним керуванням і нелокальними крайовими умовами раніше не досліджувалось. Розглянемо його постановку детальніше.

2. Постановка задачі. Формальне зображення розв’язку. Необхідно знайти функцію $y(x,t) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}(D_+)$, що задовольняє в D рівняння

[1] Відповідальний за листування, e-mail: pyshnograiev@gmail.com.

$$Ly(x,t) = 0, \tag{1}$$

початкові

$$y(x,-\alpha) = \varphi(x) \tag{2}$$

та граничні умови

$$y(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y(1,t)}{\partial x}, \quad -\alpha \le t \le T, \tag{3}$$

де $D = \{(x,t)\colon 0 < x < 1,\ -\alpha < t \le T,\ \alpha, T > 0\}$, $D_- = \{(x,t)\colon 0 < x < 1,\ -\alpha < t \le 0\}, D_+ = \{(x,t)\colon 0 < x < 1,\ 0 < t \le\}$,

$$Ly = \begin{cases} y_t - y_{xx} + u(t)y, & t > 0, \\ y_{tt} - y_{xx} + v(t)y, & t < 0. \end{cases}$$

Керування $u(t)$, $v(t)$ задаємо неперервними функціями, і на інтервалі $[-\alpha, T]$ будемо позначати їх через $\hat{u}(t)$, тобто

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \ge 0, \\ v(t), & t < 0. \end{cases}$$

Крім того, керування вважатимемо обмеженим

$$0 < \hat{u}_1 \le \hat{u}(t) \le \hat{u}_2 \quad \forall t \in [-\alpha, T], \tag{4}$$

початкові умови $\varphi(x)$ — заданими, а властивості цієї функції будуть уточнені нижче.

Розв'язок задачі (1)–(3) формально зображується формулою [6]

$$y(x,t) = X_0(x)y_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(X_{2k-1}(x)y_{2k-1}(t) + X_{2k}(x)y_{2k}(t)), \tag{5}$$

де функції $y_i(t)$ задаються як розв'язки задачі Коші

$$\begin{gathered} \frac{dy_0(t)}{dt} = -u(t)y_0(t), \quad t > 0, \\ \frac{d^2y_0(t)}{dt^2} = -v(t)y_0(t), \quad t < 0, \\ y_0(-\alpha) = \varphi_0; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \frac{dy_{2k-1}(t)}{dt} + \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) = -u(t)y_{2k-1}(t), \quad t > 0, \\ \frac{d^2y_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) - v(t)y_{2k-1}(t), \quad t < 0, \\ y_{2k-1}(-\alpha) = \varphi_{2k-1}, \qquad \lambda_k = 2k\pi; \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}
\frac{dy_{2k}(t)}{dt} + \lambda_k^2 y_{2k}(t) = -2\lambda_k y_{2k-1}(t) - u(t)y_{2k}(t), \quad t > 0, \\
\frac{d^2y_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 y_{2k}(t) = -2\lambda_k y_{2k-1}(t) - v(t)y_{2k}(t), \quad t < 0, \\
y_{2k}(-\alpha) = \varphi_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots,
\end{gathered} \tag{8}$$

до того ж $y_i(t) = (y(.,t), Y_i(.))_{L_2(0,1)} \in C^1(-\alpha, T)$.

Функції $X_i(x)$ і $Y_i(x)$ належать базисам Рісса W_0 і R_0 [4], які мають вигляд

$$W_0 = \Big\{ X_j(x) \colon X_{2k-1}(x) = x\cos(2\pi kx),$$
$$X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx), \ \ k = 1, \ldots; \ \ X_0(x) = x \Big\},$$
$$R_0 = \Big\{ Y_j(x) \colon Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx),$$
$$Y_{2k}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx), \ \ k = 1, \ldots; \ \ Y_0(x) = 2 \Big\}.$$

Системи $W_0,\ R_0$ біортогональні й утворюють базиси Рісса у просторі $L_2(0,1)$, а для будь-якої функції $\phi(x) \in L_2(0,1)$ справедливою є оцінка

$$r\|\phi\|_{L_2}^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2 \le R\|\phi\|_{L_2}^2,$$

де $r = 3/4,\ R = 16,\ \phi_k = (\phi, Y_k)_{L_2}$.

У задачах (6) – (8) послідовність чисел $\{\varphi_k\}$ взято із зображення функції $\varphi(x)$ за базисом Рісса W_0.

Отримати інтегральні зображення розв'язків задач (6) – (8) при фіксованих керуваннях, як це зроблено в роботах [6, 7] для випадку адитивного керування, тут неможливо. Тому припустимо, що для гіперболічного рівняння функція $v(t)$ є відомою. Тоді для задачі (6) отримаємо її альтернативне зображення

$$\begin{gathered}
y_0(t) = \frac{\exp\left(-\int_0^t u(\xi)d\xi\right)}{1+\alpha u(0)} \left[\varphi_0 + \int\limits_{-\alpha}^{0} (\tau+\alpha)v(\tau)y_0(\tau)d\tau \right], \quad t > 0, \\
y_0(t) = -\frac{(t+\alpha)u(0)}{1+\alpha u(0)} \left[\varphi_0 + \alpha \int\limits_{-\alpha}^{0} v(\tau)y_0(\tau)d\tau + \int\limits_{-\alpha}^{0} \tau v(\tau)y_0(\tau)d\tau \right] \\
+ \int\limits_{-\alpha}^{0} v(\tau)y_0(\tau)d\tau(t+\alpha) + \varphi_0 - \int\limits_{-\alpha}^{t} (t-\tau)v(\tau)y_0(\tau)d\tau, \quad t < 0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Друге рівняння системи (9) має єдиний розв'язок $y_0(t) \in C(-\alpha, 0)$. Справді, його можна розглядати як інтегральне рівняння Вольтерра другого роду, права частина якого є лінійною функцією лінійних функціоналів від цього розв'язку. Тоді, використовуючи метод ітерованих ядер [13], його розв'язок записуємо у вигляді

$$y_0(t) = f_0(t, y_0) - \int_{-\alpha}^{t} \Gamma_0(t,\tau) f_0(\tau, y_0) d\tau,$$

де

$$f_0(t, y_0) = \frac{1 - tu(0)}{1 + \alpha u(0)} \varphi_0 + \frac{t + \alpha}{1 + \alpha u(0)} C_0(y_0),$$

$$\Gamma_0(t,\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \mathcal{K}_{0,j}(t,\tau),$$

до того ж

$$C_0(y_0) = \int_{-\alpha}^{0} (1 - \tau u(0)) v(\tau) y_0(\tau) d\tau,$$

$$\mathcal{K}_{0,j+1}(t,\tau) = \int_{\tau}^{t} \mathcal{K}_{0,1}(t,s) \mathcal{K}_{0,j}(s,\tau) ds, \qquad \mathcal{K}_{0,1}(t,\tau) = (t - \tau)\ v(\tau).$$

Число $C_0(y_0)$ задається формулою

$$C_0(y_0) = \Delta_0\big(u(0), v\big)^{-1} \varphi_0 \times \left(\int_{-\alpha}^{0} (1 - \tau u(0)) v(\tau) d\tau - \int_{-\alpha}^{0} \int_{\tau}^{0} \Gamma_0(t,\tau)(1 - \tau u(0)) v(t) dt d\tau \right), \tag{10}$$

де

$$\Delta_0\big(u(0), v\big) = 1 + \alpha u(0) - \int_{-\alpha}^{0} (\tau + \alpha)(1 - \tau u(0)) v(\tau) d\tau + \int_{-\alpha}^{0} \int_{\tau}^{0} \Gamma_0(t,\tau)(\tau + \alpha)(1 - tu(0)) v(t)) dt d\tau.$$

Вираз для числа $C_0(y_0)$ можна перетворити таким чином. Визначимо неперервні функції $z_{0,i}(t)$, $i = \overline{1,2}$, як розв'язки рівнянь Вольтерра вигляду

$$\begin{aligned} z_{0,1}(t) + \int_{-\alpha}^{t} \mathcal{K}_{0,1}(t,\tau) z_{0,1}(\tau) d\tau &= t + \alpha, \\ z_{0,2}(t) + \int_{-\alpha}^{t} \mathcal{K}_{0,1}(t,\tau) z_{0,2}(\tau) d\tau &= 1 - tu(0). \end{aligned} \tag{11}$$

Тоді формула (10) набере вигляду

$$C_0(y_0) = C_0(z_{0,1}, z_{0,2}) = \frac{\varphi_0 \displaystyle\int_{-\alpha}^{0} (1 - tu(0))v(t)z_{0,2}(t)dt}{\Delta_0\big(u(0), v\big)}, \tag{12}$$

де

$$\Delta_0\big(u(0), v\big) = 1 + \alpha u(0) - \int\limits_{-\alpha}^{0} (1 - \tau u(0))v(\tau)z_{0,1}(\tau)d\tau.$$

Знаменник формули (12) може перетворюватись на нуль при деяких значеннях керування $\hat{u}$. Справді, розглянемо випадок, коли $v = \mathrm{const} > 0 \ \forall t \in [-\alpha, 0)$. Тоді розв'язок першого рівняння з (11) буде мати вигляд

$$z_{0,1}(t) = \frac{\sin\sqrt{v}(t + \alpha)}{\sqrt{v}}.$$

Щоб цей розв'язок перетворював на нуль знаменник формули (12), його параметри повинні додатково задовольняти умову

$$\sqrt{v}\cos\sqrt{v}\alpha + u(0)\sin\sqrt{v}\alpha = 0. \tag{13}$$

Умова (13) не виконуватиметься, якщо для будь-яких цілих додатних k і будь-яких $v, u(0) \in [\hat{u}_1, \hat{u}_2]$

$$\psi + \sqrt{v}\alpha \neq k\pi, \tag{14}$$

де

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{v}{v + u^2(0)}}, \qquad \cos\psi = \frac{u(0)}{\sqrt{v + u^2(0)}}.$$

Якщо керування $v(t)$ не є сталим, то повинні існувати допустимі пари $(u(0), v(t))$, для яких виконується нерівність

$$|\Delta_0\big(u(0), v\big)| \geq \varrho_0, \tag{15}$$

де ϱ_0 — достатньо мале додатне число.

При виконанні умови (14) зазначена множина пар не порожня. Навіть більше, при фіксованих значеннях параметрів α, $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ може виявитися, що або

$$\min_{u(0), v(.) \in [\hat{u}_1, \hat{u}_2]} \Delta_0\big(u(0), v\big) = \Delta_{0,*} > 0,$$

або

$$\max_{u(0), v(.) \in [\hat{u}_1, \hat{u}_2]} \Delta_0\big(u(0), v\big) = \Delta_0^* < 0. \tag{16}$$

Тоді можна покласти $\varrho_0 = \hat{\varrho}_0 : \hat{\varrho}_0 = \Delta_{0,*} > 0$ чи $\hat{\varrho}_0 = |\Delta_0^*|$, тому умова (15) стає зайвою.

Таким чином, для задачі (6) отримаємо таке остаточне еквівалентне зображення:

$$
\begin{gathered}
y_0(t)=\Phi_{0,+}(t,u(0),u,v,z_{0,1},z_{0,2})\varphi_0,\quad t>0,\\
y_0(t)=-\int\limits_{-\alpha}^{t}\mathcal{K}_{0,1}(t,\tau)y_0(\tau)d\tau+\Phi_{0,-}(t,u(0),v,z_{0,1},z_{0,2})\varphi_0,\quad t<0,
\end{gathered}
\tag{17}
$$

де

$$
\Phi_{0,+}(t,\ldots)=\frac{\exp\Big(-\int_0^t u(\xi)d\xi\Big)}{(1+\alpha u(0))^2}\left[1+\alpha u(0)+\int\limits_{-\alpha}^{0}(\tau+\alpha)v(\tau)z_{0,2}(\tau)d\tau\right.
$$

$$
\left.+\frac{\int_{-\alpha}^0(\tau+\alpha)v(\tau)z_{0,1}(\tau)d\tau\int_{-\alpha}^0(1-\tau u(0))v(\tau)z_{0,2}(\tau)d\tau}{\Delta_0\big(u(0),v\big)}\right],
$$

$$
\Phi_{0,-}(t,\ldots)=\frac{1}{1+\alpha u(0)}\left[1-tu(0)+(t+\alpha)\frac{\int_{-\alpha}^0(1-\tau u(0))v(\tau)z_{0,2}(\tau)d\tau}{\Delta_0\big(u(0),v\big)}\right],
$$

функції $z_{0,1}(t),\ z_{0,2}(t)$ визначаються як єдині розв'язки рівнянь Вольтерра (11) при виконанні нерівності (15) чи умови (16).

Побудуємо альтернативне зображення задачі (7). Її загальний розв'язок за заданої функції $v(t)$ має вигляд

$$
y_{2k-1}(t)=c_{2k-1}\exp\left(-\left(\lambda_k^2t+\int\limits_0^t u(\tau)d\tau\right)\right),\quad t>0,
$$

$$
\begin{aligned}
y_{2k-1}(t)=a_{2k-1}&\cos(\lambda_k t)+b_{2k-1}\sin(\lambda_k t)\\
&-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t}\sin(\lambda_k(t-\tau))v(\tau)y_{2k-1}(\tau)d\tau,\quad t<0.
\end{aligned}
$$

Умови спряження і початкові умови приводять до системи рівнянь для визначення сталих:

$$
\begin{gathered}
a_{2k-1}-c_{2k-1}=f_{2k-1,1},\\
\big(\lambda_k^2+u(0)\big)c_{2k-1}+\lambda_k b_{2k-1}=f_{2k-1,2},\\
a_{2k-1}\cos(\lambda_k\alpha)-b_{2k-1}\sin(\lambda_k\alpha)=f_{2k-1,3},
\end{gathered}
\tag{18}
$$

де

$$f_{2k-1,1} = -\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{0} \sin\lambda_k\tau v(\tau) y_{2k-1}(\tau)d\tau,$$

$$f_{2k-1,2} = \int\limits_{-\alpha}^{0} \cos\lambda_k\tau v(\tau) y_{2k-1}(\tau)d\tau, f_{2k-1,3} = \varphi_{2k-1}.$$

З роботи [4] випливає, що для визначника системи (18)

$$\delta_k(\alpha, u(0)) = \lambda_k\cos\lambda_k\alpha + \bigl(\lambda_k^2 + u(0)\bigr)\sin\lambda_k\alpha$$

при раціональних значеннях $\alpha = p/q,\ (p,q) = 1$ і досить великих значеннях k виконується оцінка

$$\bigl|\delta_k(\alpha, u(0))\bigr| \geq Ck^2, \tag{19}$$

де стала $C = 4\pi^2\left|\sin\dfrac{\pi}{2q}\right|$ не залежить від k.

Тоді

$$\begin{aligned} c_{2k-1} &= \frac{-\lambda_k\cos(\lambda_k\alpha)f_{2k-1,1} + \sin(\lambda_k\alpha)f_{2k-1,2} + \lambda_k f_{2k-1,3}}{\delta_k(\alpha, u(0))}, \\ a_{2k-1} &= \frac{\bigl(\lambda_k^2 + u(0)\bigr)\sin(\lambda_k\alpha)f_{2k-1,1} + \sin(\lambda_k\alpha)f_{2k-1,2} + \lambda_k f_{2k-1,3}}{\delta_k(\alpha, u(0))}, \\ b_{2k-1} &= \frac{1}{\delta_k(\alpha, u(0))}\Bigl[\bigl(\lambda_k^2 + u(0)\bigr)\cos(\lambda_k\alpha)f_{2k-1,1} \\ &\quad + \cos(\lambda_k\alpha)f_{2k-1,2} - \bigl(\lambda_k^2 + u(0)\bigr)f_{2k-1,3}\Bigr]. \end{aligned} \tag{20}$$

При цьому розв'язок задачі (7) набере вигляду

$$\begin{aligned} y_{2k-1}(t) &= \frac{\exp\left(-\left(\lambda_k^2 t + \int_0^t u(\tau)d\tau\right)\right)}{\delta_k(\alpha, u(0))} \\ &\quad \times\left[\lambda_k\varphi_{2k-1} + \int\limits_{-\alpha}^{0} \sin\lambda_k(\alpha+\tau)v(\tau)y_{2k-1}(\tau)d\tau\right], \quad t > 0, \\ y_{2k-1}(t) &= \frac{1}{\delta_k(\alpha, u(0))}\Biggl[\varphi_{2k-1}\delta_k(-t, u(0)) \\ &\quad + \frac{\sin\lambda_k(t+\alpha)}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{0} \delta_k(-\tau, u(0))v(\tau)y_{2k-1}(\tau)d\tau\Biggr] \end{aligned} \tag{21}$$

$$-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t}\sin\lambda_k(t-\tau)v(\tau)y_{2k-1}(\tau)d\tau,\quad t<0.$$

Як і у попередньому випадку, розв'язок (21) можна подати у вигляді

$$y_{2k-1}(t)=f_{2k-1}(t,y_{2k-1})-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t}\Gamma_{2k-1}(t,\tau)f_{2k-1}(\tau,y_{2k-1})d\tau,$$

де

$$f_{2k-1}(t,y_{2k-1})=\frac{\delta_k(-t,u(0))}{\delta_k(\alpha,u(0))}\varphi_{2k-1}+\frac{\sin\lambda_k(t+\alpha)}{\delta_k(\alpha,u(0))\lambda_k}C_{2k-1}(y_{2k-1}),$$

$$\Gamma_{2k-1}(t,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{\lambda_k}\right)^{j-1}\mathcal{K}_{2k-1,j}(t,\tau),$$

до того ж

$$C_{2k-1}(y_{2k-1})=\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-\tau,u(0))v(\tau)y_{2k-1}(\tau)d\tau,$$

$$\mathcal{K}_{2k-1,j+1}(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}\mathcal{K}_{2k-1,1}(t,s)\mathcal{K}_{2k-1,j}(s,\tau)ds,$$

$$\mathcal{K}_{2k-1,1}(t,\tau)=\sin\lambda_k(t-\tau)v(\tau).$$

Число $C_{2k-1}(y_{2k-1})$ задається формулою

$$C_{2k-1}(y_{2k-1})=\frac{\lambda_k\varphi_{2k-1}\int_{-\alpha}^{0}\delta_k(-t,u(0))v(t)z_{2k-1,2}(t)dt}{\Delta_{2k-1}\big(u(0),v\big)},$$

де

$$\Delta_{2k-1}\big(u(0),v\big)=\lambda_k\delta_k(\alpha,u(0))-\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-t,u(0))v(t)z_{2k-1,1}(t)dt, \tag{22}$$

а функції $z_{2k-1,1}(t),\ z_{2k-1,2}(t)$ визначаються як єдині неперервні розв'язки інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду

$$z_{2k-1,1}(t)+\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t}\mathcal{K}_{2k-1,1}(t,\tau)z_{2k-1,1}(\tau)d\tau=\sin\lambda_k(t+\alpha), \tag{23}$$

$$z_{2k-1,2}(t)+\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t}\mathcal{K}_{2k-1,1}(t,\tau)z_{2k-1,2}(\tau)d\tau=\delta_k(-t,u(0)). \tag{24}$$

Таким чином, для задачі (7) отримуємо таке її остаточне еквівалентне зображення:

$$
\begin{aligned}
y_{2k-1}(t) &= \Phi^{2k-1}_{2k-1,+}(t, u(0), u, v, z_{2k-1,1}, z_{2k-1,2})\varphi_{2k-1}, \quad t > 0, \\
y_{2k-1}(t) &= -\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t} \mathcal{K}_{2k-1,1}(t,\tau)y_{2k-1}(\tau)d\tau \\
&\qquad + \Phi^{2k-1}_{2k-1,-}(t, u(0), v, z_{2k-1,1}, z_{2k-1,2})\varphi_{2k-1}, \quad t < 0,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

де

$$
\Phi^{2k-1}_{2k-1,+}(t,\ldots) = \frac{\exp\left(-\left(\lambda_k^2 t + \int_0^t u(\tau)d\tau\right)\right)}{\delta_k^2(\alpha, u(0))}
$$

$$
\times \left[\lambda_k \delta_k(\alpha, u(0)) + \int\limits_{-\alpha}^{0} \sin\lambda_k(\alpha+\tau)v(\tau)z_{2k-1,2}(\tau)d\tau \right.
$$

$$
\left. + \frac{\int_{-\alpha}^{0} \delta_k(-\tau, u(0))v(\tau)z_{2k-1,2}(\tau)d\tau \int_{-\alpha}^{0} \sin\lambda_k(\alpha+\xi)v(\xi)z_{2k-1,1}(\xi)d\xi}{\Delta_{2k-1}\big(u(0), v\big)}\right],
$$

$$
\Phi^{2k-1}_{2k-1,-}(t,\ldots) = \frac{1}{\delta_k(\alpha, u(0))}\left[\delta_k(-t, u(0)) + \sin\lambda_k(t+\alpha)\right.
$$

$$
\left. \times \frac{\int_{-\alpha}^{0} \delta_k(-\tau, u(0))v(\tau)z_{2k-1,2}(\tau)d\tau}{\Delta_{2k-1}\big(u(0), v\big)}\right].
$$

При досить великому k буде справедливою оцінка

$$
\left|\Delta_{2k-1}\big(u(0), v\big)\right| > C_1 k^3, \tag{26}
$$

де додатна змінна C_1 не залежить від k.

Справді, з (22) і (19) маємо

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta_{2k-1}\big(u(0), v\big)\right| &\geq \left|\lambda_k\left|\delta_k(\alpha, u(0))\right| - \left|\int\limits_{-\alpha}^{0} \delta_k(-t, u(0))v(t)z_{2k-1,1}(t)dt\right|\right| \\
&\geq \left|\sin\frac{\pi}{2q}\right|(2\pi)^3 k^3(1-\gamma_k), \quad 1 > \gamma_k,
\end{aligned}
$$

де

$$\gamma_k = \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\pi}{2q}\right|(2\pi)^3k^3}\left|\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-t,u(0))v(t)z_{2k-1,1}(t)dt\right|.$$

Для γ_k справедливою є оцінка

$$\gamma_k \leq \frac{\alpha\hat{u}_2}{(2\pi)^3k^3\left|\sin\dfrac{\pi}{2q}\right|}\max\big|\delta_k(-t,u(0))\big|\max\big|z_{2k-1,1}(t)\big|.$$

Для розв'язку рівняння (23) справедливим є зображення

$$z_{2k-1,1}(t) = \sin\lambda_k(t+\alpha) - \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t}\Gamma_{2k-1}(t,\tau)\sin\lambda_k(\tau+\alpha)d\tau. \tag{27}$$

Для складових резольвенти $\Gamma_{2k-1}(t,\tau)$, згідно з [13], справджується оцінка

$$\big|\mathcal{K}_{2k-1,j+1}(t,\tau)\big| \leq \frac{|t|^j\,\hat{u}_2^{j+1}}{j!}.$$

Тоді для самої резольвенти отримуємо нерівність

$$\big|\Gamma_{2k-1}(t,\tau)\big| \leq \hat{u}_2\exp\frac{\alpha\hat{u}_2}{\lambda_k}. \tag{28}$$

З (27) і (28) одержуємо

$$\big|z_{2k-1,1}(t)\big| \leq 1 + \frac{\alpha\hat{u}_2}{\lambda_k}\exp\frac{\alpha\hat{u}_2}{\lambda_k} \leq 1 + \frac{\alpha\hat{u}_2}{2\pi}\exp\frac{\alpha\hat{u}_2}{2\pi}. \tag{29}$$

Для функції $\big|\delta_k(-t,u(0))\big|$ справедливою є оцінка

$$\big|\delta_k(-t,u(0))\big| \leq \sqrt{\lambda_k^2 + \big(\lambda_k^2 + u(0)\big)^2} \leq (2k\pi)^2\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2} + \left(1 + \frac{\hat{u}_2}{(2\pi)^2}\right)^2}.$$

Тоді для γ_k маємо

$$\gamma_k \leq \frac{\alpha\hat{u}_2}{2\pi k|\sin\pi/2q|}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2} + \left(1 + \frac{\hat{u}_2}{(2\pi)^2}\right)^2}\left(1 + \frac{\alpha\hat{u}_2}{2\pi}\exp\frac{\alpha\hat{u}_2}{2\pi}\right).$$

Нехай k_0 — найменше ціле додатне число, для якого виконуються нерівності

$$1 > \frac{\alpha\hat{u}_2}{2\pi k|\sin\pi/2q|}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2} + \left(1 + \frac{\hat{u}_2}{(2\pi)^2}\right)^2}\left(1 + \frac{\alpha\hat{u}_2}{2\pi}\exp\frac{\alpha\hat{u}_2}{2\pi}\right).$$

Тоді при $k \geq k_0$ буде виконуватися нерівність (26).

Для $k < k_0$, як і у випадку $k = 0$, слід знаходити найбільше та найменше значення $\Delta_{2k-1}\big(u(0), v\big)$ при обмеженні (26). Нехай

$$\min_{u(0),v(.)\in[\hat{u}_1,\hat{u}_2]} \Delta_{2k-1}\big(u(0), v\big) = \Delta_{2k-1,*} > 0$$

або

$$\max_{u(0),v(.)\in[\hat{u}_1,\hat{u}_2]} \Delta_{2k-1}\big(u(0), v\big) = \Delta^*_{2k-1} < 0, \tag{30}$$

якщо $\Delta_{2k-1,*} < 0$.

Тоді покладемо $\hat{\varrho}_{2k-1} = \Delta_{2k-1,*} > 0$ чи $\hat{\varrho}_{2k-1} = |\Delta^*_{2k-1}|$ і $\varrho_0 = \min\big\{\hat{\varrho}_0, \hat{\varrho}_1, \hat{\varrho}_3, \ldots, \hat{\varrho}_{2k_0-3}\big\}$. При цьому початкову крайову задачу називатимемо *регулярною за керуванням.*

Якщо ж для деяких індексів $j \in \hat{S}_{k_0}$ з множини $S_{k_0} = \{0, 1, 3, \ldots, 2k_0 - 3\}$ $\Delta_{j,*} < 0$ і $\Delta^*_j > 0$, то покладемо $\bar{\varrho}_0 = \min_{i\in S_{k_0}\setminus\hat{S}_{k_0}}\{\hat{\varrho}_i\}$ і вимагатимемо додатково виконання нерівностей

$$\big|\Delta_j\big(u(0), v\big)\big| \geq \varrho_0, \quad j \in \hat{S}_{k_0},$$

до того ж $\bar{\varrho}_0 \geq \varrho_0$.

При цьому початкову задачу називатимемо *регуляризованою за керуванням*.

Побудуємо альтернативне зображення задачі (8). Її загальний розв'язок за заданої функції $v(t)$ має вигляд

$$\begin{aligned} y_{2k}(t) &= \exp\left(-\left(\lambda_k^2 t + \int\limits_0^t u(\tau)d\tau\right)\right)\left[c_{2k} - \frac{2\lambda_k t}{\delta_k(\alpha, u(0))}\right. \\ &\qquad \left.\times\left(\lambda_k\varphi_{2k-1} + \int\limits_{-\alpha}^0 \sin\lambda_k(\alpha+\tau)v(\tau)y_{2k-1}(\tau)d\tau\right)\right], \quad t > 0, \\ y_{2k}(t) &= a_{2k}\cos(\lambda_k t) + b_{2k}\sin(\lambda_k t) \\ &\qquad - \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^t \sin(\lambda_k(t-\tau))(2\lambda_k y_{2k-1}(\tau) + v(\tau)y_{2k}(\tau))d\tau, \quad t < 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Умови спряження та початкові умови приводять до системи рівнянь для визначення сталих

$$\begin{aligned} a_{2k} - c_{2k} &= f_{2k,1}, \\ \big(\lambda_k^2 + u(0)\big)c_{2k} + \lambda_k b_{2k} &= f_{2k,2}, \\ a_{2k}\cos(\lambda_k\alpha) - b_{2k}\sin(\lambda_k\alpha) &= f_{2k,3}, \end{aligned} \tag{32}$$

де

$$f_{2k,1} = -\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^0 \sin\lambda_k\tau(2\lambda_k y_{2k-1}(\tau) + v(\tau)y_{2k}(\tau))d\tau,$$

$$f_{2k,2}=\int\limits_{-\alpha}^{0}\cos\lambda_k\tau v(\tau)y_{2k}(\tau)d\tau-\frac{2\lambda_k^2\varphi_{2k-1}}{\delta_k(\alpha,u(0))}$$

$$+2\lambda_k\int\limits_{-\alpha}^{0}\left(\cos\lambda_k\tau-\frac{\sin\lambda_k(\alpha+\tau)v(\tau)}{\delta_k(\alpha,u(0))}\right)y_{2k-1}(\tau)d\tau,$$

$$f_{2k,3}=\varphi_{2k}.$$

Розв'язок системи (32) задається формулами (20), в яких індекс $2k-1$ потрібно замінити на $2k$.

Тоді система рівнянь (31) набере вигляду

$$y_{2k}(t)=\frac{\exp\left(-\left(\lambda_k^2t+\int_0^t u(\tau)d\tau\right)\right)}{\delta_k(\alpha,u(0))}\left[\int\limits_{-\alpha}^{0}\sin\lambda_k(\alpha+\tau)v(\tau)y_{2k}(\tau)d\tau\right.$$

$$+2\lambda_k\int\limits_{-\alpha}^{0}\sin\lambda_k(\alpha+\tau)\left(1-v(\tau)\left(\frac{\sin\lambda_k\alpha}{\delta_k(\alpha,u(0))}+t\right)\right)y_{2k-1}(\tau)d\tau$$

$$\left.-2\lambda_k^2\varphi_{2k-1}\left(\frac{\sin\lambda_k\alpha}{\delta_k(\alpha,u(0))}+t\right)+\lambda_k\varphi_{2k}\right],\quad t>0,$$

$$y_{2k}(t)=\frac{1}{\delta_k(\alpha,u(0))}\left[\sin\lambda_k(\alpha+t)\left(\int\limits_{-\alpha}^{0}\frac{\delta_k(-\tau,u(0))v(\tau)y_{2k}(\tau)}{\lambda_k}d\tau\right.\right.$$

$$\left.+2\int\limits_{-\alpha}^{0}\left(\delta_k(-\tau,u(0))-\frac{v(\tau)\lambda_k\sin\lambda_k(\alpha+\tau)}{\delta_k(\alpha,u(0))}\right)y_{2k-1}(\tau)d\tau-\frac{2\lambda_k^2\varphi_{2k-1}}{\delta_k(\alpha,u(0))}\right)$$

$$\left.+\varphi_{2k}\delta_k(-t,u(0))\right]-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t}\sin\lambda_k(t-\tau)(2\lambda_k y_{2k-1}(\tau)+v(\tau)y_{2k}(\tau))d\tau,\quad t<0. \tag{33}$$

Як і у випадку непарних коефіцієнтів, розв'язок рівняння (33) можемо подати у вигляді

$$y_{2k}(t)=f_{2k}(t,y_{2k})-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t}\Gamma_{2k-1}(t,\tau)f_{2k}(\tau,y_{2k})d\tau,$$

де

$$f_{2k}(t,y_{2k})=\frac{1}{\delta_k(\alpha,u(0))}\left(\hat{\Phi}_{2k-1,-}(t)\varphi_{2k-1}+\delta_k(-t,u(0))\varphi_{2k}+\frac{\sin\lambda_k(t+\alpha)}{\lambda_k}C_{2k}(y_{2k})\right),$$

до того ж

$$\hat{\Phi}_{2k-1,-}(t) = \frac{2\sin\lambda_k(\alpha+t)}{\delta_k(\alpha,u(0))}\left(\int\limits_{-\alpha}^{0}\left(\delta_k(-\tau,u(0)) - \frac{v(\tau)\lambda_k\sin\lambda_k(\alpha+\tau)}{\delta_k(\alpha,u(0))}\right)\right.$$
$$\times\left(z_{2k-1,2}(\tau) + \frac{z_{2k-1,1}(\tau)}{\Delta_{2k-1}\big(u(0),v\big)}\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-\xi,u(0))v(\xi)z_{2k-1,2}(\xi)d\xi\right)d\tau - \lambda_k^2\left.\vphantom{\int}\right)$$
$$-\,2\int\limits_{-\alpha}^{t}\sin\lambda_k(t-\tau)\left(z_{2k-1,2}(\tau) + \frac{z_{2k-1,1}(\tau)}{\Delta_{2k-1}\big(u(0),v\big)}\right.$$
$$\times\left.\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-\xi,u(0))v(\xi)z_{2k-1,2}(\xi)d\xi\right)d\tau,$$

$$C_{2k}(y_{2k-1},y_{2k-1}) = \int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-\tau,u(0))v(\tau)y_{2k}(\tau)d\tau.$$

Число $C_{2k}(y_{2k})$ визначається формулою

$$C_{2k}(y_{2k}) = \frac{\lambda_k}{\Delta_{2k-1}\big(u(0),v\big)}\left(\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-t,u(0))v(t)z_{2k}(t)dt\varphi_{2k-1}\right.$$
$$\left.+\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-t,u(0))v(t)z_{2k-1,2}(t)dt\varphi_{2k}\right),$$

де функція $z_{2k}(t)$ визначається як розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра другого роду

$$z_{2k}(t) + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{0}\mathcal{K}_{2k-1,1}(t,\tau)z_{2k}(\tau)d\tau = \hat{\Phi}_{2k-1,-}(t). \tag{34}$$

Таким чином, для задачі (8) отримаємо таке її остаточне еквівалентне зображення:

$$\begin{gathered}y_{2k}(t) = \Phi_{2k-1,+}^{2k}\big(t,u(0),u,v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2},z_{2k}\big)\varphi_{2k-1} \\ +\,\Phi_{2k,+}^{2k}\big(t,u(0),u,v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2}\big)\varphi_{2k}, \quad t>0, \\ y_{2k}(t) = -\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t}\mathcal{K}_{2k-1,1}(t,\tau)y_{2k}(\tau)d\tau + \Phi_{2k-1,-}^{2k}\big(t,u(0),v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2},z_{2k}\big)\varphi_{2k-1} \\ +\,\Phi_{2k,-}^{2k}\big(t,u(0),v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2}\big)\varphi_{2k}, \quad t<0,\end{gathered} \tag{35}$$

де

$$\Phi^{2k}_{2k-1,+}(t,\ldots) = \frac{\exp\left(-\left(\lambda_k^2 t + \int_0^t u(\tau)d\tau\right)\right)}{\delta_k(\alpha,u(0))}\left[\frac{1}{\delta_k(\alpha,u(0))}\int\limits_{-\alpha}^{0}\sin\lambda_k(\alpha+\tau)v(\tau)\right.$$

$$\times\left(z_{2k}(\tau) + \frac{z_{2k-1,1}(\tau)}{\Delta_{2k-1}\big(u(0),v\big)}\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-\xi,u(0))v(\xi)z_{2k}(\xi)d\xi\right)d\tau$$

$$+\frac{2\lambda_k}{\delta_k(\alpha,u(0))}\int\limits_{-\alpha}^{0}\sin\lambda_k(\alpha+\tau)\left(1 - v(\tau)\left(\frac{\sin\lambda_k\alpha}{\delta_k(\alpha,u(0))}+t\right)\right)$$

$$\times\left(z_{2k-1,2}(\tau) + \frac{z_{2k-1,1}(\tau)}{\Delta_{2k-1}\big(u(0),v\big)}\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-\xi,u(0))v(\xi)z_{2k-1,2}(\xi)d\xi\right)d\tau$$

$$\left.-2\lambda_k^2\left(\frac{\sin\lambda_k\alpha}{\delta_k(\alpha,u(0))}+t\right)\right],$$

$$\Phi^{2k}_{2k,+}(t,\ldots) = \frac{\exp\left(-\left(\lambda_k^2 t + \int_0^t u(\tau)d\tau\right)\right)}{\delta_k(\alpha,u(0))}\left[\frac{1}{\delta_k(\alpha,u(0))}\int\limits_{-\alpha}^{0}\sin\lambda_k(\alpha+\tau)v(\tau)\right.$$

$$\left.\times\left(z_{2k-1,2}(\tau) + \frac{z_{2k-1,1}(\tau)}{\Delta_{2k-1}\big(u(0),v\big)}\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-\xi,u(0))v(\xi)z_{2k-1,2}(\xi)d\xi\right)d\tau + \lambda_k\right],$$

$$\Phi^{2k}_{2k-1,-}(t,\ldots) = \frac{\sin\lambda_k(\alpha+t)}{\Delta_{2k-1}\big(u(0),v\big)\delta_k(\alpha,u(0))}\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-\xi,u(0))v(\xi)z_{2k}(\xi)d\xi + \frac{\hat\Phi_{2k-1,-}(t)}{\delta_k(\alpha,u(0))},$$

$$\Phi^{2k}_{2k,-}(t,\ldots) = \frac{\sin\lambda_k(\alpha+t)}{\Delta_{2k-1}\big(u(0),v\big)\delta_k(\alpha,u(0))}\int\limits_{-\alpha}^{0}\delta_k(-\xi,u(0))v(\xi)z_{2k-1,2}(\xi)d\xi + \frac{\delta_k(-t,u(0))}{\delta_k(\alpha,u(0))}.$$

3. Умови існування єдиного розв’язку крайової задачі. Далі знайдемо умови на функції $\varphi(x)$ та $\hat u(t)$, які забезпечують існування єдиного розв’язку вихідної задачі.

З (5) – (8) формальним диференціюванням знаходимо

$$y_t(x,t) = -X_0(x)u(t)y_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\Big(X_{2k-1}(x)\big(\lambda_k^2 + u(t)\big)y_{2k-1}(t)$$

$$+ X_{2k}(x)\big((\lambda_k^2 + u(t))y_{2k}(t) + 2\lambda_k y_{2k-1}(t)\big)\Big), \quad t>0,$$

$$y_{tt}(x,t) = -X_0(x)v(t)y_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty}X_{2k-1}(x)\big(\lambda_k^2 + v(t)\big)y_{2k-1}(t)$$

$$+ X_{2k}(x)\Big((\lambda_k^2+v(t))y_{2k}(t)+2\lambda_k y_{2k-1}(t)\Big), \quad t<0, \tag{36}$$

$$y_{xx}(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\big(\lambda_k^2 X_{2k-1}(x)$$

$$+ 2\lambda_k X_{2k}(x)\big)y_{2k-1}(t)+\lambda_k^2 X_{2k}(x)y_{2k}(t)\Big), \quad t\in(-\alpha,T).$$

Для зображення (17) маємо нерівності

$$|y_0(t)| \le \big|\Phi_{0,+}(t,u(0),u,v,z_{0,1},z_{0,2})\big||\varphi_0|, \quad t>0,$$

$$|y_0(t)| \le \Bigg(\big|\Phi_{0,-}(t,u(0),v,z_{0,1},z_{0,2})\big| \tag{37}$$

$$+\int_{-\alpha}^{t}|\Gamma_0(t,\tau)|\big|\Phi_{0,-}(\tau,u(0),v,z_{0,1},z_{0,2})\big|d\tau\Bigg)|\varphi_0|, \quad t<0.$$

Оцінки для розв'язків рівнянь (11) мають вигляд

$$|z_{0,1}(t)| \le \alpha\left(1+\int_{-\alpha}^{t}|\Gamma_0(t,\tau)|d\tau\right) \le \alpha\big(1+\hat{u}_2\exp\alpha\hat{u}_2\big)=c_{0,1},$$

$$|z_{0,2}(t)| \le (1+\alpha\hat{u}_2)\big(1+\hat{u}_2\exp\alpha\hat{u}_2\big)=c_{0,2}.$$

Тоді

$$\big|\Phi_{0,+}(t,\ldots)\big| \le \frac{1}{(1+\alpha\hat{u}_1)^2}\left[1+\alpha\hat{u}_2+\alpha^2\hat{u}_2c_{0,2}+\frac{\alpha^3\hat{u}_2^2c_{0,1}(1+\alpha\hat{u}_2)c_{0,2}}{\varrho_0}\right]=C_{0,+},$$

$$\big|\Phi_{0,-}(t,\ldots)\big| \le \frac{1}{1+\alpha\hat{u}_1}\left[1+\alpha\hat{u}_2+\alpha^2\frac{(1+\alpha\hat{u}_2)\hat{u}_2c_{0,2}}{\varrho_0}\right]=\hat{C}_{0,-}$$

і нерівності (37) набирають вигляду

$$|y_0(t)| \le C|\varphi_0|, \quad t>0,$$

$$|y_0(t)| \le C|\varphi_0|, \quad t<0.$$

Для зображення (25) виконуються нерівності

$$\big|y_{2k-1}(t)\big| \le \Big|\Phi_{2k-1,+}^{2k-1}(t,u(0),u,v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2})\Big||\varphi_{2k-1}|, \quad t>0,$$

$$\big|y_{2k-1}(t)\big| \le \Bigg(\Big|\Phi_{2k-1,-}^{2k-1}(t,u(0),v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2})\Big| \tag{38}$$

$$+\frac{1}{\lambda_k}\int_{-\alpha}^{t}\big|\Gamma_{2k-1,1}(t,\tau)\big|\Big|\Phi_{2k-1,-}^{2k-1}(\tau,u(0),v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2})\Big|d\tau\Bigg)|\varphi_{2k-1}|, \quad t<0.$$

Далі будемо вважати, що $k \geq k_0$. Тоді, згідно з (28), (30), оцінки для розв'язків рівнянь (23)–(26) матимуть вигляд

$$\left|z_{2k-1,1}(t)\right| \leq C, \qquad |z_{2k-1,2}(t)| \leq Ck^2.$$

Тоді

$$\left|\Phi^{2k-1}_{2k-1,+}(t,\ldots)\right| \leq \frac{C}{k^4}(k^3+k^2+k) < \frac{C}{k},$$

$$\left|\Phi^{2k-1}_{2k-1,-}(t,\ldots)\right| \leq \frac{C}{k^2}(k^2+k) < C,$$

і нерівності (38) наберуть вигляду

$$\left|y_{2k-1}(t)\right| \leq C\frac{|\varphi_{2k-1}|}{k}, \quad t>0,$$

$$\left|y_{2k-1}(t)\right| \leq C|\varphi_{2k-1}|, \quad t<0.$$

Для зображення (35) виконуються нерівності

$$\begin{aligned}|y_{2k}(t)| \leq & \left|\Phi^{2k}_{2k-1,+}(t,u(0),u,v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2},z_{2k})\right||\varphi_{2k-1}| \\ & + \left|\Phi^{2k}_{2k,+}(t,u(0),u,v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2})\right||\varphi_{2k}|, \quad t>0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|y_{2k}(t)| \leq & \Bigg(\left|\Phi^{2k}_{2k-1,-}(t,u(0),v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2},z_{2k})\right| + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t}|\Gamma_{2k-1,1}(t,\tau)| \\ & \times|\Phi^{2k}_{2k-1,-}(\tau,u(0),v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2},z_{2k})|d\tau\Bigg)|\varphi_{2k-1}| \\ & + \Bigg(|\Phi^{2k}_{2k,-}(t,u(0),v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2})| \\ & + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{t}\left|\Gamma_{2k-1,1}(t,\tau)\right|\left|\Phi^{2k}_{2k,-}(\tau,u(0),v,z_{2k-1,1},z_{2k-1,2})\right|d\tau\Bigg)|\varphi_{2k}|, \quad t<0.\end{aligned} \tag{39}$$

Далі нам знадобиться оцінка для розв'язків рівняння (34). Вона має вигляд

$$|z_{2k}(t)| \leq \left|\hat{\Phi}_{2k-1,-}(t)\right| + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_{-\alpha}^{0}\left|\Gamma_{2k-1,1}(t,\tau)\right|\left|\hat{\Phi}_{2k-1,-}(\tau)\right|d\tau \leq Ck^2,$$

оскільки

$$\left|\hat{\Phi}_{2k-1,-}(t)\right| \leq C\left[\left(1+\frac{1}{k^3}\right)(k^2+k)+1+k^2+k\right] \leq Ck^2.$$

Тоді

$$\left|\Phi^{2k}_{2k-1,+}(t,\ldots)\right| \le \frac{C}{k^2}\left[\frac{1}{k^2}(k^2+k)+\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(k^2+k)+k^2\left(\frac{1}{k^2}+1\right)\right] \le C,$$

$$\left|\Phi^{2k}_{2k,+}(t,\ldots)\right| \le \frac{C}{k^2}\left[\frac{1}{k^2}(k^2+k)+k\right] \le \frac{C}{k},$$

$$\left|\Phi^{2k}_{2k-1,-}(t,\ldots)\right| \le C\left(\frac{1}{k}+1\right) \le C,$$

$$\left|\Phi^{2k}_{2k,-}(t,\ldots)\right| \le C\left(\frac{1}{k}+1\right) \le C.$$

На підставі отриманих вище оцінок нерівності (39) наберуть вигляду

$$|y_{2k}(t)| \le C\left(|\varphi_{2k-1}|+\frac{|\varphi_{2k}|}{k}\right), \quad t>0,$$

$$|y_{2k}(t)| \le C\big(|\varphi_{2k-1}|+|\varphi_{2k}|\big), \quad t<0.$$

Знайдемо рівномірну оцінку ряду (5), врахувавши отримані вище оцінки його коефіцієнтів:

$$|y(x,t)| \le |X_0(x)||y_0(t)| + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(|X_{2k-1}(x)|\big|y_{2k-1}(t)\big| + |X_{2k}(x)||y_{2k}(t)|\Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{k_0-1}|X_i(x)||y_i(t)| + \sum_{i=k_0}^{\infty}|X_i(x)||y_i(t)|$$

$$\le C_1 + C_2\sum_{i=k_0}^{\infty}|\varphi_i| \quad \forall t\in[-\alpha,T],$$

де

$$\sum_{i=0}^{k_0-1}|X_i(x)||y_i(t)| \le C_1.$$

Аналогічно знаходимо оцінки для рядів (36):

$$|y_t(x,t)| \le |X_0(x)|\hat{u}_2|y_0(t)| + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(|X_{2k-1}(x)|(\lambda_k^2+\hat{u}_2)\big|y_{2k-1}(t)\big|$$

$$+ |X_{2k}(x)|\big((\lambda_k^2+\hat{u}_2)|y_{2k}(t)| + 2\lambda_k\big|y_{2k-1}(t)\big|\big)\Big)$$

$$\le C_{1,+} + C_{2,+}\sum_{i=k_0}^{\infty}\big(i^2|\varphi_{2i-1}| + i|\varphi_{2i}|\big), \quad t>0,$$

де

$$|X_0(x)|\hat{u}_2|y_0(t)| + \sum_{k=1}^{k_0-1}\Big(|X_{2k-1}(x)|\big(\lambda_k^2+\hat{u}_2\big)\big|y_{2k-1}(t)\big|$$

$$+ |X_{2k}(x)|\Big((\lambda_k^2+\hat{u}_2)|y_{2k}(t)| + 2\lambda_k\big|y_{2k-1}(t)\big|\Big)\Big)C_{1,+};$$

$$|y_{tt}(x,t)| \le |X_0(x)|\hat{u}_2|y_0(t)| + \sum_{k=1}^{\infty}|X_{2k-1}(x)|\big(\lambda_k^2+\hat{u}_2\big)\big|y_{2k-1}(t)\big|$$

$$+ |X_{2k}(x)|\Big((\lambda_k^2+\hat{u}_2)|y_{2k}(t)| + 2\lambda_k\big|y_{2k-1}(t)\big|\Big)$$

$$\le C_{1,-} + C_{2,-}\sum_{i=k_0}^{\infty} i^2\big(|\varphi_{2i-1}| + |\varphi_{2i}|\big), \quad t<0,$$

де

$$|X_0(x)|\hat{u}_2|y_0(t)| + \sum_{k=1}^{k_0-1}|X_{2k-1}(x)|\big(\lambda_k^2+\hat{u}_2\big)\big|y_{2k-1}(t)\big|$$

$$+ |X_{2k}(x)|\Big((\lambda_k^2+\hat{u}_2)|y_{2k}(t)| + 2\lambda_k\big|y_{2k-1}(t)\big|\Big) \le C_{1,-};$$

$$|y_{xx}(x,t)| \le \sum_{k=1}^{\infty}\Big((\lambda_k^2|X_{2k-1}(x)|$$

$$+ 2\lambda_k|X_{2k}(x)|)\big|y_{2k-1}(t)\big| + \lambda_k^2|X_{2k}(x)||y_{2k}(t)|\Big)$$

$$\le \hat{C}_1 + \hat{C}_2\sum_{i=k_0}^{\infty} i^2\big(|\varphi_{2i-1}| + |\varphi_{2i}|\big), \quad t\in(-\alpha,T),$$

де

$$\sum_{k=1}^{k_0-1}\Big((\lambda_k^2|X_{2k-1}(x)| + 2\lambda_k|X_{2k}(x)|)\big|y_{2k-1}(t)\big| + \lambda_k^2|X_{2k}(x)||y_{2k}(t)|\Big) \le \hat{C}_1.$$

Таким чином, справедливою є така теорема.

Теорема. *Нехай за досить великого* k_0 *виконуються нерівності* (19), (26), $u(t)\in C[-\alpha,0)$, $v(t)\in C[0,T]$, $\hat{u}_1\le\hat{u}(t)\le\hat{u}_2$ $\forall t\in[-\alpha,T]$, *а неперервно диференційовна функція* $\varphi(x)$ *задовольняє умови*

$$\varphi(0)=0, \qquad \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(1)}{dx},$$

$$\sum_k \lambda_k^2(|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|) < \infty.$$

Тоді задача (1) – (4) *має єдиний розв'язок і він визначається рядом* (5).

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. И. М. Гельфанд, *Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений*, Успехи мат. наук, **14**, № 3, 3 – 19 (1959).
2. O. A. Ladyzhenskaya, L. Stupyalis, *Boundary value problems for equations of mixed type. Boundary value problems of mathematical physics*, Pt 7, Trudy Mat. Inst. Steklov, 101 – 136 (1971).
3. М. Х. Абрегов, З. Х. Гучаева, *Аналог задачи Бицадзе – Самарского для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа*, Современные наукоемкие технологии, № 11, 126 – 128 (2013).
4. K. B. Sabitov, *Boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a nonlocal integral condition*, Different. Equat., **46**, 1472 – 1481 (2010); https://doi.org/10.1134/S0012266110100113.
5. O. A. Repin, S. K. Kumykova, *A nonlocal problem for a mixed-type equation whose order degenerates along the line of change of type*, Russ. Math., **57**, 49 – 56 (2013); https://doi.org/10.3103/S1066369X13080069.
6. В. О. Капустян, І. О. Пишнограєв, *Умови існування і єдиності розв'язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами*, Наукові вісті НТУУ „КПІ". Теор. та прикл. пробл. математики, № 4, 72 – 76 (2012); https://nbuv.gov.ua/UJRN/NVKPI_2012_4_13.
7. V. O. Kapustyan, I. O. Pyshnograiev, *Distributed control with the general quadratic criterion in a special norm for systems described by parabolic-hyperbolic equations with nonlocal boundary conditions*, Cybernet. and Systems Anal., **51**, № 3, 438 – 447 (2015); https://doi.org/10.1007/s10559-015-9735-8.
8. В. Е. Капустян, И. А. Пышнограев, *Задача оптимального управления с полуопределенным критерием качества для параболо-гиперболических уравнений с нелокальными точечными краевыми условиями*, Укр. мат. журн., **67**, № 8, 1068 – 1081 (2015); https://nbuv.gov.ua/UJRN/UMJ_2015_67_8_8.
9. В. Е. Капустян, И. А. Пышнограев, *Оптимальное управление для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с полуопределенным критерием качества*, Вестник ДНУ им. О. Гончара, Сер. Моделирование, вып. 8, № 8, 93 – 105 (2016); https://dx.doi.org/10.15421/141606.
10. U. I. Baltaeva, *Boundary-value problem for a loaded mixed-type equation with a characteristic line of type change*, J. Math. Sci., **272**, 202 – 214 (2023); https://doi.org/10.1007/s10958-023-06410-4.
11. G. A. Balkizov, *On a priori estimates of solutions of the tricomi problem for a certain mixed-type second-order equation*, J. Math. Sci., **260**, 286 – 293 (2022); https://doi.org/10.1007/s10958-022-05692-4.
12. D. K. Durdiev, *Determining the coefficient of a mixed parabolic-hyperbolic equation with noncharacteristic type change line*, Different. Equat., **58**, 1618 – 1629 (2022); https://doi.org/10.1134/S00122661220120059.
13. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).

Одержано 13.06.23