DOI: 10.3842/umzh.v76i5.7926

УДК 512.64

Володимир Прокіп[1] (Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, Львів)

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ НАД ПОЛЕМ

The polynomial $(n\times n)$ matrices $A(\lambda)$ and $B(\lambda)$ over a field $\mathbb{F}$ are called semiscalar equivalent if there exists a nonsingular $(n\times n)$ matrix P over $\mathbb{F}$ and an invertible $(n\times n)$ polynomial matrix $Q(\lambda)$ over $\mathbb{F}[\lambda]$ such that $A(\lambda)=PB(\lambda)Q(\lambda)$. We establish conditions under which nonsingular polynomial matrices $A(\lambda)$ and $B(\lambda)$ are semiscalar equivalent. As a consequence, we present the conditions of equivalence and similarity of two sets of $(n\times n)$ matrices over an arbitrary field $\mathbb{F}$.

Кажуть, що многочленні $(n\times n)$-матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ над полем $\mathbb{F}$ напівскалярно еквівалентні, якщо існують неособлива матриця P над $\mathbb{F}$ та зворотна многочленна $(n\times n)$-матриця $Q(\lambda)$ над $\mathbb{F}[\lambda]$ такі, що $A(\lambda)=PB(\lambda)Q(\lambda)$. Встановлено умови, за яких неособливі многочленні матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ напівскалярно еквівалентні. Як наслідок, наведено умови еквівалентності та подібності двох наборів $(n\times n)$-матриць над довільним полем $\mathbb{F}$.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{F}$ — довільне поле. Введемо позначення: $\mathbb{F}_{n,m}$ і $\mathbb{F}_{n,m}[\lambda]$ — множини $(n\times m)$-матриць над полем $\mathbb{F}$ та кільцем многочленів $\mathbb{F}[\lambda]$ відповідно, I_n — одинична матриця вимірності n, $0_{n,k}$ — нульова $(n\times k)$-матриця. Для неособливої матриці $B(\lambda)\in\mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ через $B^*(\lambda)$ позначимо взаємну матрицю для $B(\lambda)$, тобто $B^*(\lambda)B(\lambda)=I_n\det B(\lambda)$. Символ t означає транспонування матриці.

Кажуть, що матриці $A(\lambda),B(\lambda)\in\mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ напівскалярно еквівалентні [6], якщо існують неособлива матриця $P\in\mathbb{F}_{n,n}$ і матриця $Q(\lambda)\in GL(n,\mathbb{F}[\lambda])$ такі, що $A(\lambda)=PB(\lambda)Q(\lambda)$. Якщо ж $A(\lambda)=Q(\lambda)B(\lambda)P$, то в цьому випадку кажуть, що матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ є PS-еквівалентними [12]. Отже, якщо матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ напівскалярно еквівалентні, то транспоновані матриці $A^t(\lambda)$ і $B^t(\lambda)$ є PS-еквівалентними. Очевидно, якщо матриці $A(\lambda),B(\lambda)\in\mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ напівскалярно еквівалентні (PS-еквівалентні), то вони еквівалентні. Легко переконатись у тому, що обернене твердження не завжди є правильним. Іншими словами, з еквівалентності матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ не завжди випливає напівскалярна еквівалентність (PS-еквівалентність) цих матриць.

Якщо $\mathbb{F}$ — нескінченне поле, то неособлива матриця $A(\lambda)\in\mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ перетвореннями напівскалярної еквівалентності зводиться до нижньої трикутної матриці (див. [6]). Таким чином, для $A(\lambda)$ існують матриці $P\in GL(n,\mathbb{F})$ і $Q(\lambda)\in GL(n,\mathbb{F}[\lambda])$ такі, що

$$PA(\lambda)Q(\lambda)=T_A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0\\ t_{21}(\lambda) & a_2(\lambda) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ t_{n1}(\lambda) & t_{n2}(\lambda) & t_{n3}(\lambda) & \dots & a_n(\lambda)\end{bmatrix},$$

де $a_j(\lambda)$ — інваріантні многочлени матриці $A(\lambda)$, тобто $a_1(\lambda)|a_2(\lambda)|\,\dots\,|a_n(\lambda)$ (ділить) і $a_j(\lambda)|t_{ij}(\lambda)$ для всіх $1\le j<i\le n$. Крім цього, $\deg t_{ij}(\lambda)<\deg a_i(\lambda)$ для всіх $1<i\le n$. Зауважимо, що матриця $T_A(\lambda)$ визначена неоднозначно. Проте неособлива матриця $A(\lambda)\in\mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ над скінченним полем $\mathbb{F}$ не завжди перетвореннями напівскалярної еквівалентності зводиться до нижньої трикутної матриці $T_A(\lambda)$ (див. приклади в [26, 27]).

[1] E-mail: v.prokip@gmail.com.

Незважаючи на значну кількість статей, у яких досліджувалась задача про напівскалярну еквівалентність, канонічної форми для многочленних матриць над полем $\mathbb{F}$ щодо таких перетворень не встановлено. Можна стверджувати, що якщо для неособливої матриці $A(\lambda)$ виконується $\deg\det A(\lambda) > n$, то канонічна форма для $A(\lambda)$ щодо перетворень напівскалярної еквівалентності може існувати лише в окремих дискретних випадках. В роботах [8, 9, 26] для матричної в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 \in \mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ над довільним полем $\mathbb{F}$ з неособливою матрицею A_0 встановлено канонічні форми щодо перетворень напівскалярної еквівалентності в термінах клітин Фробеніуса (приєднаних матриць), які побудовано за елементарними дільниками та інваріантними многочленами $A(\lambda)$.

Перетворення напівскалярної еквівалентності виявились добрим технічним інструментом при встановлені умов [6], за яких для неособливої матриці $A(\lambda) \in \mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{F}$ характеристики нуль існує дільник $B(\lambda) = I_n\lambda^r + \sum_{i=1}^{r} B_i\lambda^{r-i} \in \mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$, де $r < \deg A(\lambda)$. В роботах [3 – 7, 12, 26, 27] наведено застосування напівскалярної еквівалентності до задачі про подібність неособливих многочленних матриць над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль. Зазначимо, що напівскалярна еквівалентність регулярних матричних поліномів має застосування до задач класифікації лінійних керованих систем, коли допускається заміна базисів у просторах стану та вхідних даних (див. [13, 14, 25, 27]).

Очевидно, якщо неособливі матриці $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ напівскалярно еквівалентні, то визначники цих матриць асоційовані. В цьому зв'язку об'єктом дослідження будуть пари неособливих необоротних матриць над довільним полем $\mathbb{F}$ з асоційованими визначниками. У цій статті встановимо умови, за яких неособливі матриці $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ напівскалярно еквівалентні. Крім цього, наведемо умови, за яких два набори $(n \times n)$-матриць над довільним полем $\mathbb{F}$ строго еквівалентні та подібні.

2. Основний результат. Прямий добуток $(n \times m)$-матриці $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ та матриці B позначимо так:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1m}B \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1}B & \ldots & a_{nm}B \end{bmatrix}.$$

Однією з важливих властивостей прямого добутку є те, що він дозволяє перетворювати матрицю на вектор-стовпчик. Матриці A поставимо у відповідність вектор-стовпчик, який побудований за її елементами таким чином (див. [22]):

$$\mathbf{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} & a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \ldots & a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}^t.$$

Нехай визначники неособливих матриць $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ асоційовані, тобто $\det B(\lambda) = b(\lambda) = p\det A(\lambda)$, де $p \in \mathbb{F}$. Матрицям $A^t(\lambda)$ і $B^*(\lambda)$ поставимо у відповідність матрицю $A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda)$. Елементи матриці $A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda)$ поділимо з остачею на многочлен $b(\lambda)$. В результаті отримаємо $A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda) = D(\lambda)b(\lambda) + R(\lambda)$, де $D(\lambda), R(\lambda) \in \mathbb{F}_{n^2,n^2}[\lambda]$ і $\deg R(\lambda) < \deg b(\lambda)$. Зрозуміло, що таке зображення для матриці $A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda)$ визначене однозначно. З огляду на викладене вище сформулюємо основний результат цієї статті.

Теорема 1. *Нехай визначники неособливих матриць* $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ *асоційовані, тобто* $\det B(\lambda) = b(\lambda) = p\det A(\lambda)$, *де* $p \in \mathbb{F}$ *і* $\deg b(\lambda) = r \geq 1$. *Нехай, далі,* $A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda) = D(\lambda)b(\lambda) + R(\lambda)$, *де* $D(\lambda), R(\lambda) \in \mathbb{F}_{n^2,n^2}[\lambda]$ *і* $\deg R(\lambda) < \deg b(\lambda)$. *Матриці* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$

напівскалярно еквівалентні тоді й лише тоді, коли однорідне рівняння $R(\lambda)X = 0_{n^2,1}$ *має розв'язок*

$$X_0 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n & \ldots & v_{n^2-n+1} & v_{n^2-n+2} & \ldots & v_{n^2} \end{bmatrix}^t \in \mathbb{F}_{n^2,1}$$

такий, що матриця $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_{n+1} & \ldots & v_{n^2-n+1} \\ v_2 & v_{n+2} & \ldots & v_{n^2-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & v_{2n} & \ldots & v_{n^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_{n,n}$ *неособлива.*

Доведення. *Необхідність*. Нехай неособливі многочленні $(n \times n)$-матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ напівскалярно еквівалентні, тобто

$$A(\lambda) = PB(\lambda)Q(\lambda), \tag{1}$$

де $P \in GL(n,\mathbb{F})$ і $Q(\lambda) \in GL(n,\mathbb{F}[\lambda])$. Очевидно, що визначники матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ асоційовані, тобто $\det B(\lambda) = b(\lambda) = p \det A(\lambda)$, де $p \in \mathbb{F}$. Із рівності (1) отримуємо

$$B^*(\lambda)P^{-1}A(\lambda) = b(\lambda)Q(\lambda). \tag{2}$$

Покладемо

$$V = P^{-1} = \begin{bmatrix} v_1 & v_{n+1} & \ldots & v_{n^2-n+1} \\ v_2 & v_{n+2} & \ldots & v_{n^2-n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_n & v_{2n} & \ldots & v_{n^2} \end{bmatrix},$$

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} q_1(\lambda) & q_{n+1}(\lambda) & \ldots & q_{n^2-n+1}(\lambda) \\ q_2(\lambda) & q_{n+1}(\lambda) & \ldots & q_{n^2-n+2}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_n(\lambda) & q_{2n}(\lambda) & \ldots & q_{n^2}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Тепер рівність (2) запишемо у вигляді (див. [22], глава 3)

$$\big(A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda)\big)\mathbf{vec}(V) = b(\lambda)\mathbf{vec}(Q(\lambda)). \tag{3}$$

Елементи матриці $A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda)$ поділимо на $b(\lambda)$ з остачею. Отже,

$$A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda) = D(\lambda)b(\lambda) + R(\lambda),$$

де $D(\lambda), R(\lambda) \in \mathbb{F}_{n^2,n^2}[\lambda]$ і $\deg R(\lambda) < \deg b(\lambda)$. Таким чином, із рівності (3) отримуємо

$$R(\lambda)\,\mathbf{vec}(V) = b(\lambda)\big(\mathbf{vec}(Q(\lambda)) - D(\lambda)\mathbf{vec}(V)\big).$$

Оскільки $\deg R(\lambda) < \deg b(\lambda)$, то з останньої рівності одержуємо $R(\lambda)\mathbf{vec}(V) = 0_{n^2,1}$.

Отже, для однорідного рівняння $R(\lambda)X = 0_{n^2,1}$ існує нетривіальний розв'язок $X_0 = \mathbf{vec}(V) \in \mathbb{F}_{n^2,1}$, який побудований за елементами неособливої матриці $V = P^{-1}$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для однорідного рівняння $R(\lambda)X = 0_{n^2,1}$ існує нетривіальний розв'язок $X_0 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n & \ldots & v_{n^2-n+1} & v_{n^2-n+2} & \ldots & v_{n^2} \end{bmatrix}^t \in \mathbb{F}_{n^2,1}$ такий, що матриця $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_{n+1} & \ldots & v_{n^2-n+1} \\ v_2 & v_{n+2} & \ldots & v_{n^2-n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_n & v_{2n} & \ldots & v_{n^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_{n,n}$ неособлива.

Прямий добуток матриць $A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda)$ запишемо у вигляді

$$A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda) = D(\lambda)b(\lambda) + R(\lambda),$$

де $D(\lambda), R(\lambda) \in \mathbb{F}_{n^2,n^2}[\lambda]$ і $\deg R(\lambda) < \deg b(\lambda)$. Останню рівність помножимо справа на вектор X_0. В результаті отримаємо

$$A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda)X_0 = b(\lambda)D(\lambda)X_0 + R(\lambda)X_0. \tag{4}$$

Оскільки $R(\lambda)X_0 = 0_{n^2,1}$, то з рівності (4) маємо $A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda)X_0 = b(\lambda)D(\lambda)X_0$. Покладемо

$$D(\lambda)X_0 = \bar{q}(\lambda) = \begin{bmatrix} q_1(\lambda) & q_2(\lambda) & \ldots & q_n(\lambda) & \ldots & q_{n^2-n+1}(\lambda) & q_{n^2-n+2}(\lambda) & \ldots & q_{n^2}(\lambda) \end{bmatrix}^t \in \mathbb{F}_{n^2,1}.$$

На підставі викладеного вище рівність $A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda)X_0 = b(\lambda)\bar{q}(\lambda)$ запишемо у вигляді (див. [22], глава 3)

$$B^*(\lambda)VA(\lambda) = b(\lambda)Q(\lambda), \tag{5}$$

де матриця $Q(\lambda) = \begin{bmatrix} q_1(\lambda) & q_{n+1}(\lambda) & \ldots & q_{n^2-n+1}(\lambda) \\ q_2(\lambda) & q_{n+1}(\lambda) & \ldots & q_{n^2-n+2}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_n(\lambda) & q_{2n}(\lambda) & \ldots & q_{n^2}(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ побудована за елементами вектора $\bar{q}(\lambda)$.

Оскільки $B^*(\lambda)B(\lambda) = I_n b(\lambda)$, то з рівності (5) дістаємо $VA(\lambda) = B(\lambda)Q(\lambda)$. Переходячи до визначників в обох частинах цієї рівності, отримуємо

$$(\det V)\det A(\lambda) = \det B(\lambda)(\det Q(\lambda)).$$

Оскільки визначники матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ асоційовані і $\det V \neq 0$, то з останньої рівності маємо $\det Q(\lambda) = \mathrm{const} \neq 0$, тобто $Q(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$.

Отже, $A(\lambda) = V^{-1}B(\lambda)Q(\lambda)$, тобто матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ напівскалярно еквівалентні.

Теорему доведено.

Теорему 1 проілюструємо на прикладі.

***Приклад* 1.** Нехай $\mathbb{F}$ — поле характеристики $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$. Над полем $\mathbb{F}$ розглянемо матриці $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^2 + a\lambda & \lambda^3 \end{bmatrix}$ і $B(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^2 - a\lambda & \lambda^3 \end{bmatrix}$, де $a \neq 0$. Очевидно, що $\det A(\lambda) = \det B(\lambda) = b(\lambda) = \lambda^3$. Матрицю $A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda)$ запишемо у вигляді

$$A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda) = D(\lambda)b(\lambda) + R(\lambda), \quad \text{де} \quad R(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a\lambda - \lambda^2 & 1 & a^2\lambda^2 & a\lambda + \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вектор $X_0 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 2 & -a^2 \end{bmatrix}^t$ є розв'язком рівняння $R(\lambda)X = 0_{4,1}$.

Отже, для вектора X_0 отримуємо, що матриця $V = \begin{bmatrix} a^2 & 2 \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix}$ неособлива для довільного $a \neq 0$. Згідно з теоремою 1 із рівності $B^*(\lambda)VA(\lambda) = b(\lambda)Q(\lambda)$ одержуємо $Q(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 & 2\lambda^3 \\ -2\lambda & -2\lambda^2 + 2a\lambda - a^2 \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{F})$, тобто матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ напівскалярно еквівалентні.

Зазначимо, що із прикладу 1 випливає, що для неособливої матриці $A(\lambda)$ трикутна форма $T_A(\lambda)$ щодо перетворень напівскалярної еквівалентності визначена неоднозначно.

Легко довести, що матриці $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{F}_{n,m}[\lambda]$ напівскалярно еквівалентні тоді й лише тоді, коли для довільних $U(\lambda), V(\lambda) \in GL(m, \mathbb{F}[\lambda])$ матриці $A(\lambda)U(\lambda)$ і $B(\lambda)V(\lambda)$ напівскалярно еквівалентні.

Припустимо, що $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{F}_{n,m}[\lambda]$, $n < m$, — матриці рангу n. Тоді для $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ існують матриці $U(\lambda), V(\lambda) \in GL(m, \mathbb{F}[\lambda])$ такі, що

$$A(\lambda)U(\lambda) = \begin{bmatrix} A_1(\lambda) & 0_{n,m-n} \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B(\lambda)V(\lambda) = \begin{bmatrix} B_1(\lambda) & 0_{n,m-n} \end{bmatrix},$$

де $A_1(\lambda), B_1(\lambda) \in \mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ — неособливі матриці. В цьому випадку $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ напівскалярно еквівалентні тоді й лише тоді, коли матриці $A_1(\lambda)$ і $B_1(\lambda)$ напівскалярно еквівалентні.

Отже, на підставі теореми 1 отримуємо умови напівскалярної еквівалентності матриць $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbb{F}_{n,m}[\lambda]$ рангу n.

Застосування. Класичною алгоритмічною проблемою лінійної алгебри є перевірка еквівалентності та подібності матриць. Кажуть, що набори $(n \times n)$-матриць над полем $\mathbb{F}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_0, & A_1, & \ldots, & A_r \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_0, & B_1, & \ldots, & B_r \end{pmatrix}$$

строго (*strictly*) еквівалентні, якщо існують неособливі матриці $P, Q \in \mathbb{F}_{n,n}$ такі, що $PA_i = B_iQ$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, r$.

Якщо $r = 0$, то задача про строгу еквівалентність є тривіальною. Матриці A_0 і B_0 строго еквівалентні тоді й лише тоді, коли $\mathrm{rank} A_0 = \mathrm{rank} B_0$. Більш складною є задача класифікації пари матриць (A_0, A_1) з точністю до перетворення еквівалентності. Ця задача була розв'язана Кронекером. Він довів, що матричні в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda + A_0 \in \mathbb{F}_{m,n}[\lambda]$ і $B(\lambda) = B_0\lambda + B_1 \in \mathbb{F}_{m,n}[\lambda]$ строго еквівалентні тоді й лише тоді, коли вони мають однакові скінченні та нескінченні елементарні дільники та однакові мінімальні індекси (див. [1], гл. XII). Форма Кронекера є класичною канонічною формою для матричних в'язок при строгому перетворенні еквівалентності. Проте аналіз матричних в'язок на цей час є активною областю досліджень головним чином через чисельні проблеми або пошук способів ефективного отримання канонічної форми Кронекера. Дослідження зв'язків між лінійними співвідношеннями та матричними в'язками наведено в [10, 21]. Нові доведення деяких відомих результатів про збурення матричних в'язок наведено в роботі [18].

Наборам матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ поставимо у відповідність многочленні матриці

$$A(\lambda) = \sum_{i=0}^{r} A_i \lambda^{r-i} \quad \text{і} \quad B(\lambda) = \sum_{i=0}^{r} B_i \lambda^{r-i}$$

відповідно. Якщо набори матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ строго еквівалентні, то матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ напівскалярно еквівалентні. Проте із напівскалярної еквівалентності матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ не завжди випливає, що набори $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ строго еквівалентні (див. приклад 1). Задача значно спрощується, якщо в наборах $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ для деякого $0 \le k_0 \le r$ матриці A_{k_0} і B_{k_0} неособливі. Нехай $k_0, k_1, \ldots, k_r$ — деяка перестановка індексів $0, 1, \ldots, r$. Очевидно, що набори матриць $\widehat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A_{k_0}, & A_{k_1}, & \ldots, & A_{k_r} \end{pmatrix}$ і $\widehat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} B_{k_0}, & B_{k_1}, & \ldots, & B_{k_r} \end{pmatrix}$ строго еквівалентні тоді й лише тоді, коли набори $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ строго еквівалентні. Далі будемо вважати, що матриці A_0 і B_0 неособливі. Отже, многочленні матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ регулярні [1]. На підставі теореми 1 та наведених вище міркувань отримуємо твердження, яке сформулюємо у такому вигляді.

***Наслідок* 1.** *Нехай визначники регулярних многочленних* $(n \times n)$*-матриць* $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{r} A_i \lambda^{r-i}$ *і* $B(\lambda) = \sum_{i=0}^{r} B_i \lambda^{r-i}$ *над полем* $\mathbb{F}$ *асоційовані, тобто* $\det B(\lambda) = b(\lambda) = p \det A(\lambda)$, *де* $p \in F$. *Нехай, далі,* $A^t(\lambda) \otimes B^*(\lambda) = D(\lambda) b(\lambda) + R(\lambda)$, *де* $D(\lambda), R(\lambda) \in \mathbb{F}_{n^2,n^2}[\lambda]$ *і* $\deg R(\lambda) < \deg b(\lambda)$.

Набори матриць $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_0, & A_1, & \ldots, & A_r \end{pmatrix}$ *і* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_0, & B_1, & \ldots, & B_r \end{pmatrix}$ *строго еквівалентні над полем* $\mathbb{F}$ *тоді й лише тоді, коли однорідне рівняння* $R(\lambda)X = 0_{n^2,1}$ *має розв'язок*

$$X_0 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n & \ldots & v_{n^2-n+1} & v_{n^2-n+2} & \cdots & v_{n^2} \end{bmatrix}^t \in \mathbb{F}_{n^2,1}$$

такий, що матриця $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_{n+1} & \ldots & v_{n^2-n+1} \\ v_2 & v_{n+2} & \ldots & v_{n^2-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & v_{2n} & \ldots & v_{n^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_{n,n}$ *неособлива.*

Кажуть, що набори $(n \times n)$-матриць $\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_r \end{pmatrix}$ і $\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} B_1, B_2, \ldots, B_r \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{F}$ подібні, якщо існує матриця $T \in GL(n, \mathbb{F})$ така, що $A_i = T B_i T^{-1}$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, r$.

Якщо $r = 1$, то з математичної точки зору задача про подібність матриць $A_1, B_1 \in \mathbb{F}_{n,n}$ була розв'язана в 19-му столітті за допомогою різних інваріантів, втілених у канонічних формах Сміта матриць $I_n\lambda - A_1$ і $I_n\lambda - B_1$. Крім цього, теорія канонічних форм Жордана та Фробеніуса [1] дозволяє конструктивно визначити подібність матриць A_1 і B_1. Складнішою задачею є опис структури пари матриць (A_1, A_2) з точністю до перетворення подібності. У статті [2] було показано, що задача про канонічний вигляд пари комутативних матриць (A_1, A_2) з точністю до перетворення подібності містить задачу про канонічний вигляд скінченного числа довільних некомутативних матриць $\begin{pmatrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_r \end{pmatrix}$, $r \ge 3$.

Отже, задача про знаходження канонічного вигляду пари матриць (A_1, A_2) з точністю до перетворення подібності не має сенсу. На цей час вона відома як „дика" проблема лінійної алгебри [15]. Незважаючи на такий висновок, у багатьох роботах (див. [16, 28] та наведену там бібліографію) описано пари матриць, для яких ця задача є „дикою". З іншого боку, вивчення одночасної подібності матричних наборів має вирішальне значення в багатьох областях математики: в теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, теорії груп та операторів, теорії інваріантів і зображень та складності обчислень.

Фрідланд у роботі [17] вказав алгоритм, який дозволяє зводити пари $(n \times n)$-матриць над полем комплексних чисел до канонічного вигляду за допомогою перетворень одночасної подібності. В роботі [11] доведено, що набори матриць $\widetilde{\mathbf{A}}$ і $\widetilde{\mathbf{B}}$ над полем подібні тоді й лише тоді, коли для кожного набору $(n \times n)$-матриць $T = (T_0, T_1, \ldots, T_r)$ виконується

$$\operatorname{rank}(I \otimes T_0 + A_1 \otimes T_1 + \cdots + A_r \otimes T_r) = \operatorname{rank}(I \otimes T_0 + B_1 \otimes T_1 + \cdots + B_r \otimes T_r).$$

У статті [24] наведено критерій одночасної подібності наборів $\widetilde{\mathbf{A}}$ і $\widetilde{\mathbf{B}}$ при умові, що матриці в цих наборах комутують, тобто $A_iA_j = A_jA_i$ і $B_iB_j = B_jB_i$ для всіх $i \neq j$. Крім цього, однією з задач про подібність наборів матриць є встановлення умов, за яких набори унітарно подібні (див. [19, 20, 23] та наведену в них бібліографію). Таким чином, доцільним є пошук інших умов, за яких набори $(n \times n)$-матриць $\widetilde{\mathbf{A}}$ і $\widetilde{\mathbf{B}}$ над полем $\mathbb{F}$ подібні.

Наборам матриць $\widetilde{\mathbf{A}}$ і $\widetilde{\mathbf{B}}$ поставимо у відповідність унітальні многочленні матриці $\widetilde{A}(\lambda) = I_n\lambda^r + \sum_{i=1}^r A_i\lambda^{r-i}$ і $\widetilde{B}(\lambda) = I_n\lambda^r + \sum_{i=1}^r B_i\lambda^{r-i}$ відповідно. Згідно з [6, 12] набори $\widetilde{\mathbf{A}}$ і $\widetilde{\mathbf{B}}$ подібні тоді й лише тоді, коли матриці $\widetilde{A}(\lambda)$ і $\widetilde{B}(\lambda)$ напівскалярно еквівалентні. Очевидно, що необхідною умовою подібності наборів матриць $\widetilde{\mathbf{A}}$ і $\widetilde{\mathbf{B}}$ є те, що визначники матриць $\widetilde{A}(\lambda)$ і $\widetilde{B}(\lambda)$ збігаються, тобто $\det \widetilde{A}(\lambda) = \det \widetilde{B}(\lambda) = \Delta(\lambda)$, $\deg \Delta(\lambda) = nr$. На підставі викладеного та теореми 1 отримуємо таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай визначники матриць* $\widetilde{A}(\lambda) = I_n\lambda^r + \sum_{i=1}^r A_i\lambda^{r-i} \in \mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ *і* $\widetilde{B}(\lambda) = I_n\lambda^r + \sum_{i=1}^r B_i\lambda^{r-i} \in \mathbb{F}_{n,n}[\lambda]$ *збігаються, тобто* $\det \widetilde{A}(\lambda) = \det \widetilde{B}(\lambda) = \Delta(\lambda)$. *Нехай, далі,* $\widetilde{A}^t(\lambda) \otimes \widetilde{B}^*(\lambda) - I_{n^2}\Delta(\lambda) = R(\lambda)$, *де* $R(\lambda) \in \mathbb{F}_{n^2,n^2}[\lambda]$ *і* $\deg R(\lambda) < nr$.

Набори матриць $\big(A_1, \ A_2, \ \ldots, \ A_r\big)$ *і* $\big(B_1, \ B_2, \ \ldots, \ B_r\big)$ *подібні над полем* $\mathbb{F}$ *тоді й лише тоді, коли однорідне рівняння* $R(\lambda)X = 0_{n^2,1}$ *має розв'язок*

$$X_0 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n & \ldots & v_{n^2-n+1} & v_{n^2-n+2} & \ldots & v_{n^2} \end{bmatrix}^t \in \mathbb{F}_{n^2,1}$$

такий, що матриця $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_{n+1} & \ldots & v_{n^2-n+1} \\ v_2 & v_{n+2} & \ldots & v_{n^2-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & v_{2n} & \ldots & v_{n^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_{n,n}$ *неособлива.*

Конфлікт інтересів. Автор заявляє, що він не має потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Автор заявляє, що під час підготовки цього рукопису не було отримано коштів, грантів чи іншої підтримки.

Література

1. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва (1988).
2. И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, *Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве*, Функцион. анализ и его прил., **3**, № 4, 81 – 82 (1969).
3. П. С. Казимирский, Д. М. Билонога, *Полускалярная эквивалентность многочленных матриц с попарно взаимно простыми элементарными делителями*, Докл. АН УССР, Сер. А, № 4, 8–9 (1990).
4. П. С. Казімірський, Л. М. Гринів, *Виділення „великого" множника з матричного многочлена*, Доп. АН УРСР. Сер. А, № 4, 293 – 297 (1974).
5. П. С. Казімірський, В. Р. Зеліско, В. М. Петричкович, *До питання про подібність матричних многочленів*, Доп. АН УРСР, Сер. А, № 10, 876 – 878 (1976).
6. П. С. Казімірський, *Розклад матричних многочленів на множники*, Наук. думка, Київ (1981).
7. О. М. Мельник, *Подобие матричных многочленов*, Мат. методы и физ.-мех. поля, вып. 20, 31 – 38 (1984).
8. В. М. Прокіп, *Канонічна форма відносно напівскалярної еквівалентності матричної в'язки з невиродженою першою матрицею*, Укр. мат. журн., **63**, № 8, 1435 – 1440 (2011).
9. В. М. Прокіп, *Про нормальну форму відносно напівскалярної еквівалентності многочленних матриць над полем*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **55**, № 3, 21 – 26 (2012).

10. F. De Terán, F. M. Dopico, *On bundles of matrix pencils under strict equivalence*, Linear Algebra and Appl., **658**, 1 – 31 (2023).
11. H. Derksen, I. Klep, V. Makam, Ju. Volčič, *Ranks of linear matrix pencils separate simultaneous similarity orbits*, Adv. Math., **415**, Article 108888 (2023).
12. J. A. Dias da Silva, T. J. Laffey, *On simultaneous similarity of matrices and related questions*, Linear Algebra and Appl., **291**, 167 – 184 (1999).
13. M. Dodig, *Controllability of series connections*, Electron. J. Linear Algebra, **16**, 135 – 156 (2007).
14. M. Dodig, *Eigenvalues of partially prescribed matrices*, Electron. J. Linear Algebra, **17**, 316–332 (2008).
15. Yu. A. Drozd, *Tame and wild matrix problems*, Lect. Notes Math., **832**, 242 – 258 (1980).
16. Yu. A. Drozd, *Matrix problems and representations of algebras*, Збірник праць Ін-ту математики НАН України, **20**, 1 – 23 (2020).
17. S. Friedland, *Simultaneous similarity of matrices*, Adv. Math., **50**, 189 – 265 (1983).
18. V. Futorny, T. Klymchuk, O. Klymenko, V. V. Sergeichuk, N. Shvai, *Perturbation theory of matrix pencils through miniversal deformations*, Linear Algebra and Appl., **614**, 455 – 499 (2021).
19. V. Futorny, R. A. Horn, V. V. Sergeichuk, *Specht's criterion for systems of linear mappings*, Linear Algebra and Appl., **519**, 278 – 295 (2017).
20. T. G. Gerasimova, R. A. Horn, V. V. Sergeichuk, *Simultaneous unitary equivalences*, Linear Algebra and Appl., **438**, № 10, 3829 – 3835 (2013).
21. H. Gernandt, F. M. Peŕia, F. Philipp, C. Trunk, *On characteristic invariants of matrix pencils and linear relations*; arXiv:2203.08296 (2022).
22. A. Graham, *Kronecker products and matrix calculus with applications*, Courier Dover Publ., New York (2018).
23. N. Jing, *Unitary and orthogonal equivalence of sets of matrices*, Linear Algebra and Appl., **481**, 235 – 242 (2015).
24. S. Kouchekian, B. Shektman, *On simultaneous similarity of families of commuting operators*; arXiv:2305.01196 (2023).
25. S. Marcaida, I. Zaballa, *On a homeomorphism between orbit spaces of linear systems and matrix polynomials*, Linear Algebra and Appl., **436**, № 6, 1664 – 1682 (2012).
26. V. M. Prokip, *Equivalence of polynomial matrices over a field*, Hot Topics in Linear Algebra, Chapter 6, 205 – 232 (2020).
27. V. M. Prokip, *A note on semiscalar equivalence of polynomial matrices*, Electron. J. Linear Algebra, **38**, 195 – 203 (2022).
28. V. V. Sergeichuk, *Canonical matrices for linear matrix problems*, Linear Algebra and Appl., **317**, № 1-3, 53 – 102 (2000).

Одержано 06.11.23