DOI: 10.3842/umzh.v76i5.7899

УДК 517.5

Євген Севостьянов[1] (Житомирський державний університет імені Івана Франка; Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.),

Олександр Довгопятий, Наталія Ількевич, Марія Андрощук (Житомирський державний університет імені Івана Франка)

ПРО ПОВЕДІНКУ ОДНОГО КЛАСУ ВІДОБРАЖЕНЬ, ЩО ДІЮТЬ НА ОБЛАСТІ З ЛОКАЛЬНО КВАЗІКОНФОРМНОЮ МЕЖЕЮ

We study the mappings satisfying the so-called inverse Poletsky inequality. We consider mappings of the domains with quasiextreme distance, domains with locally quasiconformal boundary, and domains regular (in a sense of prime ends) onto the domains with locally quasiconformal boundary, regular domains, or domains that are locally Hölder equivalent to a half ball on their boundary. For these mappings, we prove their Hölder logarithmic continuity in a neighborhood of points of the boundary.

Статтю присвячено дослідженню відображень, які задовольняють так звану обернену нерівність Полецького. Розглядаються відображення областей квазіекстремальної довжини, областей з локально квазіконформною межею та регулярних (в сенсі простих кінців) областей на області з локально квазіконформною межею, регулярних областей, або областей, локально гельдерево еквівалентних до півкулі на своїй межі. Для таких відображень отримано логарифмічну неперервність за Гельдером в околі точок межі.

1. Вступ. У статті [1] розглянуто відображення одиничної кулі з оберненою умовою спотворення модуля сімей кривих типу Полецького і встановлено їх логарифмічну неперервність за Гельдером у межових точках. У цій статті ми розглянемо зазначене питання в інших областях. Зокрема, покажемо, що логарифмічна неперервність за Гельдером виконується в межових точках заданої області, якщо ця область є областю квазіекстремальної довжини, а відображена область є обмеженою областю з локально квазіконформною межею. Крім того, розглянемо й інші області, в тому числі такі, щодо яких логарифмічну неперервність за Гельдером слід розуміти в сенсі простих кінців. Логарифмічну неперервність за Гельдером у внутрішніх точках було доведено раніше, причому у довільній області [2]. Отже, це питання є актуальним лише для межових точок. Зауважимо також, що обернені модульні нерівності відомі давно і відіграють ключову роль при вивченні квазіконформних і квазірегулярних відображень, а також відображень зі скінченним спотворенням довжини (див., наприклад, [3, теорема 3.2], [4, теорема 6.7.II] і [5, теорема 8.5]).

Нагадаємо деякі означення. Борелева функція $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ називається *допустимою* для сім'ї Γ кривих γ у $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\,|dx| \geq 1 \qquad (1)$$

для всіх (локально спрямованих) кривих $\gamma \in \Gamma$. У цьому випадку пишемо $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* сім'ї кривих Γ називається величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\,dm(x).$$

[1] Відповідальний за листування, e-mail: esevostyanov2009@gmail.com.

Нехай $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що f *задовольняє обернену нерівність Полецького*, якщо співвідношення

$$M(\Gamma) \le \int\limits_{f(D)} Q(y)\rho_*^n(y)\,dm(y) \tag{2}$$

виконується для будь-якої сім'ї (локально спрямлюваних) кривих Γ в D і для будь-якої $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$. Зауважимо, що оцінки типу (2) відомі та виконуються у багатьох класах відображень (див., наприклад, [3, теорема 3.2], [4, теорема 6.7.II] і [5, теорема 8.5]). Відображення $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ називається *дискретним*, якщо прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ кожної точки $y \in \mathbb{R}^n$ складається з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^n$. Відображення f області D на D' називається *замкненим*, якщо $f(E)$ є замкненим в D' для будь-якої замкненої множини $E \subset D$ (див., наприклад, [6, розд. 3]).

Область D в $\mathbb{R}^n$ називається *областю квазіекстремальної довжини* (скорочено QED-*областю*), якщо знайдеться таке число $A_0 \ge 1$, що для будь-яких континуумів $E, F \subset D$ виконується нерівність

$$M(\Gamma(E,F,\mathbb{R}^n)) \le A_0 M(\Gamma(E,F,D)). \tag{3}$$

Зауважимо, що одинична куля, півпростір або півкуля є областями квазіекстремальної довжини (див. [7, лема 4.3]).

У подальшому в розширеному просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ використовується *сферична (хордальна) метрика* $h(x,y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, де π — стереографічна проєкція $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n\left(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2}\right)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, а саме,

$$h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}},$$

$$h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, \qquad x \ne \infty \ne y \tag{4}$$

(див., наприклад, [8, означення 12.1]). Для множин $A, B \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ покладемо

$$h(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} h(x,y), \quad h(A) = \sup_{x,y\in A} h(x,y),$$

де h — хордальная відстань, визначена в (4). Як завжди, покладемо

$$B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x-x_0| < r\}, \quad \mathbb{B}^n = B(0,1),$$

$$S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x-x_0| = r\}.$$

Розглянемо означення, яке запропонував Няккі [9] (див. також [10]). Межа області D в $\mathbb{R}^n$ називається *локально квазіконформною,* якщо кожна точка $x_0 \in \partial D$ має окіл U, для якого існує квазіконформне відображення φ околу U на одиничну кулю $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ таке, що $\varphi(\partial D \cap U) = \mathbb{B}^n_+$, де

$$\mathbb{B}^n_+ = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{B}^n\colon x_n > 0\}. \tag{5}$$

Для числа $\delta > 0$, областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, невиродженого континууму $A \subset D'$ і вимірної за Лебегом функції $Q\colon D' \to [0, \infty]$ позначимо через $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних і замкнених відображень f області D на область D', що задовольняють умову (2), і таких, що $h(f^{-1}(A), \partial D) \geq \delta$. Справедливим є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $Q \in L^1(D')$, D є областю квазіекстремальної довжини, а D' — обмеженою областю з локально квазіконформною межею. Тоді будь-яке відображення $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$, що задовольняє співвідношення* (2), *продовжується до відображення $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$, при цьому для кожної точки $x_0 \in \partial D$ знайдуться окіл U цієї точки і сталі $C = C(n, A, D, D', x_0) > 0$ і $0 < \alpha = \alpha(n, A, D, D', x_0) \leq 1$ такі, що*

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)|^{\frac{n}{\alpha^2}} \leq \frac{C\|Q\|_1}{\log\left(1 + \dfrac{\delta}{2|x-y|}\right)} \tag{6}$$

для всіх $x, y \in U \cap \overline{D}$, де $\|Q\|_1$ — норма функції Q в $L^1(D')$.

2. Допоміжні леми. Нагадаємо, що область $D \subset \mathbb{R}^n$ називається *локально зв'язною в точці* $x_0 \in \partial D$, якщо для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ точки x_0 такий, що $V \cap D$ є зв'язним. Область D локально зв'язна на ∂D, якщо D локально зв'язна в кожній точці $x_0 \in \partial D$. Межа області D називається *слабко плоскою* в точці $x_0 \in \partial D$, якщо для кожного $P > 0$ і для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ цієї ж точки такий, що $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ для будь-яких континуумів $E, F \subset D$, які перетинають ∂U і ∂V. Межа області D називається слабко плоскою, якщо відповідна властивість виконується в будь-якій точці межі D. Наступну лему у випадку одиничної кулі було доведено в [1, лема 2.1].

Лема 1. *Нехай D локально зв'язна на своїй межі, а D' має слабко плоску межу. Припустимо, що E — довільний континуум, що належить області D', $Q \in L^1(D')$. Тоді існує таке $\delta_1 > 0$, що $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q} \subset \mathfrak{S}_{\delta_1,E,Q}$. Іншими словами, якщо f — відкрите дискретне і замкнене відображення області D на D' з умовою* (2) *таке, що $h(f^{-1}(A), \partial D) \geq \delta$, то існує $\delta_1 > 0$, не залежне від f, таке, що $h(f^{-1}(E), \partial D) \geq \delta_1$.*

Доведення. Будемо використовувати схему доведення леми 2.1 з [1]. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що висновок теореми не є правильним. Тоді знайдуться послідовності $y_m \in E$, $f_m \subset \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ і $x_m \in D$ такі, що $f_m(x_m) = y_m$ і $h(x_m, \partial D) \to 0$ при $m \to \infty$. Без обмеження загальності можна вважати, що $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$, де x_0 може набувати значення ∞ у випадку, якщо область D необмежена. Зауважимо, що з теореми 3.1 в [2] випливає можливість неперервного продовження відображення f_m в точку x_0, і навіть більше, сім'я $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в точці x_0 (див., наприклад, [2, теорема 1.2]). Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $m_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $h(f_m(x_m), f_m(x_0)) < \varepsilon$ при $m \geq m_0$. З іншого боку, оскільки f_m замкнене, $f_m(x_0) \in \partial D'$. З огляду на компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ та замкненість $\partial D'$ можна вважати, що $f_m(x_0)$ збігається до деякого елемента $B \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Отже, за нерівністю трикутника

$$h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geq h(f_m(x_m), B) - h(B, f_m(x_0)) \geq \frac{1}{2} h(E, \partial D')$$

для достатньо великих $m \in \mathbb{N}$. Остаточно маємо суперечність $h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geq \delta_0$, $\delta_0 := \dfrac{1}{2} h(E, \partial D')$ і одночасно $h(f_m(x_m), f_m(x_0)) < \varepsilon$ при $m \geq m_0$. Отримана суперечність спростовує вихідне припущення.

Лему доведено.

Наступну лему було доведено у випадку, коли область D' є одиничною кулею (див. хід доведення теореми 1.1 в [1]). Для довільної обмеженої опуклої області доведення проведено в [11, лема 1].

Лема 2. *Нехай D_1 — обмежена опукла область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, і $B(y_*, \delta_*/2)$ — куля з центром у точці $y_* \in D_1$, де $\delta_* := d(y_*, \partial D_1)$. Нехай $z_0 \in \partial D_1$. Тоді для будь-яких точок $A, B \in B(z_0, \delta_*/8) \cap D_1$ знайдуться точки $C, D \in \overline{B(y_*, \delta_*/2)}$, для яких відрізки $[A, C]$ і $[B, D]$ є такими, що*

$$\mathrm{dist}\,([A, C], [B, D]) \geq C_0|A - B|,$$

де $C_0 > 0$ — деяка стала, що залежить лише від δ_* і $d(D_1)$.

3. Відображення областей квазіекстремальної довжини. Доведення теореми 1. Можливість неперервного продовження відображення f на межу області D випливає з теореми 3.1 в [2]. Зокрема, слабка плоскість ∂D є наслідком того, що D є QED-областю (див., наприклад, [12, лема 2]), а те, що область D' з локально квазіконформною межею є локально зв'язною на своїй межі, є наслідком означення цієї області.

Доведемо логарифмічну неперервність за Гельдером (6). Достатньо довести співвідношення (6) для $x, y \in U \cap D$. Покриємо межу області D' системою околів $U(x_0')$, для яких існує квазіконформне відображення φ околу U на одиничну кулю $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ таке, що $\varphi(\partial D \cap U)$ є перетином одиничної кулі $\mathbb{B}^n$ з координатною гіперплощиною $y_n = 0$, де $y = (y_1, \ldots, y_n)$. (Існування таких околів U і відображення φ випливає з означення локально квазіконформної межі.) Оскільки за умовою область D' обмежена, за теоремою Гейне – Бореля – Лебега можна виділити скінченне підпокриття $U_1, U_2, \ldots, U_p$, $1 \leq p < \infty$, межі $\partial D'$.

Нехай φ_k — відповідне квазіконформне відображення околу U_k, $1 \leq k \leq p < \infty$. Тоді φ_k і φ_k^{-1} є локально гельдеровими з деякими показниками $0 < \alpha_k \leq 1$ та сталими гельдеровості $C_k > 0$ і C_k^* відповідно (див. [4, теорема 1.11.III]). Іншими словами,

$$\frac{1}{\left(C_k^*\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}}|x - y|^{\frac{1}{\alpha_k}} \leq |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| \leq C_k|x - y|^{\alpha_k} \quad \forall x, y \in K, \tag{7}$$

де K — довільний компакт в U_k. Без обмеження загальності можна вважати, що (7) виконується при всіх $x, y \in U_k$. Покладемо

$$\alpha = \min_{1 \leq k \leq p} \alpha_k. \tag{8}$$

Покажемо, що оцінка (6) виконується для вказаного α у (8). Будемо міркувати методом від супротивного, а саме, припустимо, що співвідношення (6) не виконується принаймні в одній точці $x_0 \in \partial D$. Тоді для будь-якого натурального $m \in \mathbb{N}$ знайдуться точки $x_m, y_m \in D$ і відображення $f_m \in \mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(D, D')$ такі, що $|x_m - x_0| < \dfrac{1}{m}$, $|y_m - x_0| < \dfrac{1}{m}$, проте

$$|f_m(x_m) - f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2}} > m \frac{\|Q\|_1}{\log\left(1 + \dfrac{\delta}{2|x_m - y_m|}\right)}. \tag{9}$$

Оскільки область D' обмежена, можемо вважати, що послідовності $f_m(x_m)$ і $f_m(y_m)$ збігаються при $m \to \infty$ до однієї і тієї ж точки $y_0 \in \partial D'$. Справді, внаслідок компактності $\partial D'$ послідовність $f_m(x_0)$, $m = 1, 2, \ldots$, також можна вважати збіжною при $m \to \infty$, причому ця послідовність збігається до деякої точки з $\partial D'$, бо межа будь- якої області є замкненою. Нехай $f_m(x_0) \to y_0$ при $m \to \infty$.

Зауважимо, що за теоремою 1.2 в [2] сім'я відображень $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$. Тоді за нерівністю трикутника

$$|f_m(x_m) - y_0| \leq |f_m(x_m) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - y_0| \to 0, \quad m \to \infty.$$

Останнє співвідношення доводить, що $f_m(x_m) \to y_0 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Аналогічно можна довести, що $f_m(y_m) \to y_0 \in \partial D'$ при $m \to \infty$.

Оскільки система $U_1, U_2, \ldots, U_p$, $1 \leq p < \infty$, є покриттям межі $\partial D'$, існує $1 \leq k_0 < p$ таке, що $y_0 \in U_{k_0}$. Можна вважати, що $f_m(x_m)$ і $f_m(y_m)$ належать U_{k_0} при всіх $m \in \mathbb{N}$.

Застосовуючи додаткове мебіусове перетворення, можна вважати, що $\varphi_k(y_0) = 0$ (див. [8], доведення теореми 17.10). В контексті леми 2 покладемо $z_0 = 0$, $y_* := \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{2}\right)$, $D_1 := \mathbb{B}^n_+$, $\varphi := \varphi_{k_0}$. Тоді $\delta_* := \mathrm{dist}\,(y_*, \partial\mathbb{B}^n_+) = \dfrac{1}{2}$. Оскільки $f_m(x_m) \to y_0 \in \partial D'$ і $f_m(y_m) \to y_0 \in \partial D'$ при $m \to \infty$, то $\varphi(f_m(x_m)) \to 0 \in \partial D_1$ і $\varphi(f_m(y_m)) \to 0 \in \partial D_1$ при $m \to \infty$. Тоді $\varphi(f_m(x_m))$ і $\varphi(f_m(y_m)) \in B(0, 1/16)$ при всіх $m > m_1$ і деякому $m_1 \in \mathbb{N}$.

З огляду на опуклість $\mathbb{B}^n_+$ можна застосувати лему 2. За цією лемою знайдуться точки $C_m, D_m \in \overline{B(y_*, 1/4)}$, для яких відрізки $[\varphi(f_m(x_m)), C_m]$ і $[\varphi(f_m(y_m)), D_m]$ є такими, що

$$\mathrm{dist}\,([\varphi(f_m(x_m)), C_m], [\varphi(f_m(y_m)), D_m]) \geq C_0|\varphi(f_m(x_m)) - \varphi(f_m(y_m))|, \quad m \geq m_1, \tag{10}$$

де $C_0 > 0$ — деяка абсолютна стала. Покладемо

$$E := \varphi^{-1}(\overline{B(y_*, 1/4)}), \tag{11}$$

$$\alpha_m := \varphi^{-1}([\varphi(f_m(x_m)), C_m]), \quad \beta_m := \varphi^{-1}([\varphi(f_m(x_m)), D_m]).$$

Нехай

$$\mathrm{dist}\,(|\alpha_m|, |\beta_m|) = |w_m - u_m|, \quad w_m \in |\alpha_m|, u_m \in |\beta_m|.$$

З огляду на (7) та (10) будемо мати, що

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}\,(|\alpha_m|, |\beta_m|) = |w_m - u_m| &\geq \frac{1}{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}|\varphi(w_m) - \varphi(u_m)|^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}} \\
&\geq \frac{1}{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}(\mathrm{dist}\,([\varphi(f_m(x_m)), C_m], [\varphi(f_m(y_m)), D_m]))^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}} \\
&\geq \frac{C_0^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}(|\varphi(f_m(x_m)) - \varphi(f_m(y_m))|)^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}} \\
&\geq \frac{C_0^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}\left(C^*_{k_0}\right)^{\frac{1}{\alpha^2_{k_0}}}}|f_m(x_m) - f_m(y_m)|^{\frac{1}{\alpha^2_{k_0}}}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Нехай α_m^*, β_m^* — повні f_m-підняття кривих α_m і β_m з початковими точками x_m і y_m відповідно (вони існують за лемою 3.7 [6]). Тоді за означенням $|\alpha_m^*|\cap f_m^{-1}(E)\neq\varnothing\neq|\beta_m^*|\cap f^{-1}(E)$. За лемою 1 існує $\delta_1>0$ таке, що $h(f_m^{-1}(E),\partial D)\geq\delta_1$ для всіх $m\in\mathbb{N}$. Оскільки $x_m, y_m\in B(x_0,1/m)$, то для достатньо великих $m\in\mathbb{N}$

$$d(|\alpha_m^*|)\geq\delta_1/2,\quad d(|\beta_m^*|)\geq\delta_1/2. \tag{13}$$

Нехай

$$\Gamma_m:=\Gamma(|\alpha_m^*|,|\beta_m^*|,D).$$

Тоді, з одного боку, за нерівністю (3)

$$M(\Gamma_m)\geq(1/A_0)M(\Gamma_m(|\alpha_m^*|,|\beta_m^*|,\mathbb{R}^n)), \tag{14}$$

а, з іншого — за лемою 7.38 [13]

$$M(\Gamma_m(|\alpha_m^*|,|\beta_m^*|,\mathbb{R}^n))\geq c_n\log\left(1+\frac{1}{\widetilde{m}}\right), \tag{15}$$

де $c_n>0$ — деяка стала, що залежить лише від n,

$$\widetilde{m}=\frac{\mathrm{dist}(|\alpha_m^*|,|\beta_m^*|)}{\min\{\mathrm{diam}\,(|\alpha_m^*|),\mathrm{diam}\,(|\beta_m^*|)\}}.$$

Тепер, поєднуючи (13)–(15) і враховуючи, що $\mathrm{dist}\,(|\alpha_m^*|,|\beta_m^*|)\leq|x_m-y_m|$, отримуємо

$$M(\Gamma_m)\geq\widetilde{c_n}\log\left(1+\frac{\delta_1}{2\mathrm{dist}(|\alpha_m^*|,|\beta_m^*|)}\right)\geq\widetilde{c_n}\cdot\log\left(1+\frac{\delta_1}{2|x_m-y_m|}\right), \tag{16}$$

де $\widetilde{c_n}>0$ — деяка стала, що залежить лише від n і сталої A_0 з означення QED-області.

Встановимо верхню оцінку для $M(\Gamma_m)$. Покладемо

$$\rho_m(y)=\begin{cases}\dfrac{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}\left(C_{k_0}^*\right)^{\frac{1}{\alpha_{k_0}^2}}}{C_0^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}|f_m(x_m)-f_m(y_m)|^{-\frac{1}{\alpha_{k_0}^2}}, & y\in D',\\ 0, & y\notin D'.\end{cases}$$

Зауважимо, що ρ_m задовольняє співвідношення (1) для сім'ї кривих $f_m(\Gamma_m)$ на підставі співвідношення (12). Тоді за означенням сім'ї $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ одержуємо, що

$$M(\Gamma_m)\leq\frac{\left(\dfrac{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}\left(C_{k_0}^*\right)^{\frac{1}{\alpha_{k_0}^2}}}{C_0^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}\right)^n}{|f_m(x_m)-f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha_{k_0}^2}}}\int\limits_{D'}Q(y)\,dm(y). \tag{17}$$

З (16) і (17) випливає, що

$$\widetilde{c_n}\log\left(1+\frac{\delta_1}{2|x_m-y_m|}\right)\leq\left(\frac{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}\left(C_{k_0}^*\right)^{\frac{1}{\alpha_{k_0}^2}}}{C_0^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}\right)^n\frac{\|Q\|_1}{|f_m(x_m)-f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha_{k_0}^2}}}.$$

З останнього співвідношення випливає, що

$$|f_m(x_m)-f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2_{k_0}}}\le(\widetilde{c_n})^{-1}\left(\frac{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}\left(C^*_{k_0}\right)^{\frac{1}{\alpha^2_{k_0}}}}{C_0^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}\right)^n\frac{(\|Q\|_1)}{\log\left(1+\dfrac{\delta_1}{2|x_m-y_m|}\right)}. \qquad (18)$$

Покладемо

$$M_0:=(\widetilde{c_n})^{-1}\left(\frac{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}\left(C^*_{k_0}\right)^{\frac{1}{\alpha^2_{k_0}}}}{C_0^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}\right)^n.$$

Тоді з (18) випливає, що

$$|f_m(x_m)-f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2_{k_0}}}\le M_0\frac{\|Q\|_1}{\log\left(1+\dfrac{\delta_1}{2|x_m-y_m|}\right)},\quad m>m_1. \qquad (19)$$

Нарешті за правилом Лопіталя $\log\left(1+\dfrac{1}{nt}\right)\sim\log\left(1+\dfrac{1}{kt}\right)$ при $t\to+0$ для різних фіксованих $k,n>0$. Тоді з (19) при деякому $m_2\in\mathbb{N}$ маємо, що

$$|f_m(x_m)-f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2_{k_0}}}\le M_0\frac{\|Q\|_1}{\log\left(1+\dfrac{\delta}{2|x_m-y_m|}\right)},\quad m>m_2. \qquad (20)$$

Оскільки сім'я відображень $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$ (див. [2, теорема 1.2]), можемо вважати, що $|f(x_m)-f(y_m)|<1$ при всіх $m\in\mathbb{N}$. Тоді оскільки $\alpha_{k_0}\ge\alpha$, то $\dfrac{n}{\alpha^2_{k_0}}\le\dfrac{n}{\alpha^2}$. Отже,

$$|f_m(x_m)-f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2_{k_0}}}\ge|f_m(x_m)-f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2}}.$$

Тепер з (20) випливає, що

$$|f_m(x_m)-f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2}}\le M_0\frac{\|Q\|_1}{\log\left(1+\dfrac{\delta}{2|x_m-y_m|}\right)},\quad m>m_2. \qquad (21)$$

Співвідношення (20) суперечить припущенню, зробленому в (9). Отримана суперечність доводить теорему.

4. Відображення на області, локально гельдерово та локально ліпшицево еквівалентні до півкулі на межі. По аналогії з областями, які мають локально квазіконформні межі, введемо означення, які допоможуть нам сформулювати результати щодо логарифмічної неперервності за Гельдером з конкретними показниками α.

Домовимось називати область D в $\mathbb{R}^n$ *локально α-гельдерово еквівалентною до півкулі на своїй межі,* якщо для кожної точки $x_0\in\partial D$ існують її окіл U, сталі $C_1=C_1(x_0)>0$, $C_1^*=C_1^*(x_0)>0$ і гомеоморфізм φ околу U на $\mathbb{B}^n$ такі, що

$$\frac{1}{(C_1^*)^{\frac{1}{\alpha}}}|x-y|^{\frac{1}{\alpha}}\le|\varphi(x)-\varphi(y)|\le C|x-y|^{\alpha}\quad\forall x,y\in U, \qquad (22)$$

причому $\varphi(\partial D\cap U)=\mathbb{B}^n_+$, де $\mathbb{B}^n_+$ визначено в (5). Область D в $\mathbb{R}^n$ буде називатися *локально ліпшицево еквівалентною до півкулі на своїй межі,* якщо в (22) $\alpha=1$. Справедливим є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $Q\in L^1(D')$, D є областю квазіекстремальної довжини, а D' є обмеженою областю, яка є локально α-гельдерово еквівалентною до півкулі на своїй межі. Тоді будь-яке відображення $f\in\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$, яке задовольняє співвідношення* (2), *продовжується до відображення $f:\overline{D}\to\overline{D'}$, при цьому для кожної точки $x_0\in\partial D$ знайдуться окіл U цієї точки і стала $C=C(n,A,D,D',x_0)>0$ такі, що*

$$|\overline{f}(x)-\overline{f}(y)|^{\frac{n}{\alpha^2}}\leq\frac{C\|Q\|_1}{\log\left(1+\dfrac{\delta}{2|x-y|}\right)}\tag{23}$$

для всіх $x,y\in U\cap\overline{D}$, де $\|Q\|_1$ — норма функції Q в $L^1(D')$.

Доведення. Хід доведення теореми 2 майже дослівно повторює хід доведення теореми 1, тому наведемо його лише схематично. Достатньо встановити співвідношення (23) для $x,y\in U\cap D$ (випадок $x,y\in U\cap\overline{D}$ тоді можна отримати шляхом граничного переходу).

Як і при доведенні теореми 1, будемо міркувати методом від супротивного. Припустимо, що співвідношення (23) не виконується принаймні в одній точці $x_0\in\partial D$. Тоді для будь-якого натурального $m\in\mathbb{N}$ знайдуться точки $x_m,y_m\in D$ і відображення $f_m\in\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ такі, що $|x_m-x_0|<\dfrac{1}{m}$, $|y_m-x_0|<\dfrac{1}{m}$, проте

$$|f_m(x_m)-f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2}}>m\frac{\|Q\|_1}{\log\left(1+\dfrac{\delta}{2|x_m-y_m|}\right)}.\tag{24}$$

Оскільки область D' обмежена, можемо вважати, що послідовності $f_m(x_m)$ і $f_m(y_m)$ збігаються при $m\to\infty$.

Далі, використовуючи позначення з доведення теореми 1, приходимо до співвідношення (12), яке виходить з означення відображення φ у (22). Міркуючи далі аналогічно доведенню теореми 1, приходимо до співвідношення (21), яке суперечить припущенню (24) $\Bigg($тут слід врахувати, що за правилом Лопіталя $\log\left(1+\dfrac{1}{nt}\right)\sim\log\left(1+\dfrac{1}{kt}\right)$ при $t\to+0$ для різних фіксованих $k,n>0\Bigg)$. Отримана суперечність завершує доведення теореми 2.

5. Відображення областей з квазіконформними межами на такі ж області. Справедливим є таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $Q\in L^1(D')$, D і D' — області з локально квазіконформною межею, причому D' обмежена. Тоді будь-яке відображення $f\in\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$, що задовольняє співвідношення* (2), *продовжується до відображення $f:\overline{D}\to\overline{D'}$, при цьому для кожної точки $x_0\in\partial D$ знайдуться окіл U цієї точки і сталі $C=C(n,A,D,D',x_0)>0$, $0<\alpha^*=\alpha^*(n,A,D,D',x_0)\leq 1$ і $0<\alpha=\alpha(n,A,D,D',x_0)\leq 1$ такі, що*

$$|\overline{f}(x)-\overline{f}(y)|^{\frac{n}{\alpha^2}}\leq\frac{C\|Q\|_1}{\log\left(1+\dfrac{\delta}{2|x-y|^{\alpha^*}}\right)}\tag{25}$$

для всіх $x,y\in U\cap\overline{D}$, де $\|Q\|_1$ — норма функції Q в $L^1(D)$.

Доведення. Можливість неперервного продовження відображення f на межу області D випливає з теореми 3.1 в [2]. Зокрема, області з локально квазіконформними межами є слабко плоскими (див. [14, твердження 2.2], або [8, теорема 17.10]). З іншого боку, очевидно, такі області є й локально зв'язними на своїй межі.

За означенням локально квазіконформної межі області D існують окіл U^* точки x_0 і квазіконформне відображення $\varphi^*\colon U^* \to \mathbb{B}^n$, $\varphi(U^*) = \mathbb{B}^n$ такі, що $\varphi^*(D \cap U^*) = \mathbb{B}^n_+$, де $\mathbb{B}^n_+ = \{x \in \mathbb{B}^n : x = (x_1, \ldots, x_n), x_n > 0\}$ — півкуля. Можна вважати, що $x_0 \neq \infty$ і $\varphi^*(x_0) = 0$ (див. хід доведення теореми 17.10 у [8]). Оскільки φ^* є квазіконформним відображенням, таким є і відображення $(\varphi^*)^{-1}$, причому воно є неперервним за Гельдером з деякою сталою $\widetilde{C} > 0$ і деяким показником $0 < \alpha^* \leq 1$ (див. [4, теорема 1.11.III]).

Доведемо співвідношення (25) зі вказаним показником α^*. Частково будемо міркувати так само, як і при доведенні теореми 1. Покриємо межу області D' системою околів $U(y_0)$, $y_0 \in \partial D'$, для яких існує квазіконформне відображення φ околу U на одиничну кулю $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ таке, що $\varphi(\partial D \cap U)$ є перетином одиничної кулі $\mathbb{B}^n$ з координатною гіперплощиною $x_n = 0$, де $x = (x_1, \ldots, x_n)$. (Існування таких околів U і відображення φ випливає з означення локально квазіконформної межі.) Оскільки за умовою область D' обмежена, за теоремою Гейне – Бореля – Лебега можна виділити скінченне підпокриття $U_1, U_2, \ldots, U_p$, $1 \leq p < \infty$, межі $\partial D'$.

Нехай φ_k — відповідне квазіконформне відображення околу U_k, $1 \leq k \leq p < \infty$. Тоді φ_k і φ_k^{-1} є локально гельдеровими з деяким показником $0 < \alpha_k \leq 1$ та сталими гельдеровості $C_k > 0$ і C_k^* відповідно (див. [4, теорема 1.11.III]). Іншими словами, виконується співвідношення (7), де K — довільний компакт в U_k. Нехай α визначено співвідношенням (8). Без обмеження загальності можна вважати, що (7) виконано при всіх $x, y \in U_k$.

Припустимо, що співвідношення (25) не виконується принаймні в одній точці $x_0 \in \partial D$. Тоді для будь-якого натурального $m \in \mathbb{N}$ знайдуться точки $x_m, y_m \in D$ і відображення $f_m \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ такі, що $|x_m - x_0| < \dfrac{1}{m}$, $|y_m - x_0| < \dfrac{1}{m}$, проте

$$|f_m(x_m) - f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2}} > m\, \frac{\|Q\|_1}{\log\left(1 + \dfrac{\delta}{2|x_m - y_m|^{\alpha^*}}\right)}. \tag{26}$$

Далі, міркуючи аналогічно доведенню теореми 1, отримуємо співвідношення (12) (в якому ми зберігаємо всі позначення, введені під час цього доведення. Зокрема, нехай далі E визначено в (11)).

Нехай V^* — окіл точки x_0, який належить U^* разом із своїм замиканням. Покладемо

$$\delta_2 := \mathrm{dist}\,(\partial V^*, \partial U^*). \tag{27}$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $x_m, y_m \in V^*$ при всіх $m \in \mathbb{N}$. Розглянемо допоміжне відображення

$$F_m(w) := f_m((\varphi^*)^{-1}(w)), \quad F_m\colon \mathbb{B}^n_+ \to D'. \tag{28}$$

Нехай α_m^*, β_m^* — повні f_m-підняття кривих α_m і β_m з початковими точками x_m і y_m відповідно (вони існують за лемою 3.7 [6]). Тоді за означенням $|\alpha_m^*| \cap f_m^{-1}(E) \neq \varnothing \neq |\beta_m^*| \cap f_m^{-1}(E)$. Оскільки $d(f_m^{-1}(E), \partial D) \geq \delta_1$ і $x_m, y_m \in V^*$, то

$$|\alpha_m^*| \cap U^* \neq \varnothing \neq |\alpha_m^*| \cap (\mathbb{R}^n \setminus U^*)$$

і
$$|\beta_m^*|\cap U^*\neq\varnothing\neq|\beta_m^*|\cap(\mathbb{R}^n\setminus U^*).$$
На підставі теореми 1.I.5.46 [15]
$$|\alpha_m^*|\cap\partial U^*\neq\varnothing,\quad |\beta_m^*|\cap\partial U^*\neq\varnothing. \tag{29}$$
Аналогічно
$$|\alpha_m^*|\cap\partial V^*\neq\varnothing,\quad |\beta_m^*|\cap\partial V^*\neq\varnothing. \tag{30}$$
З огляду на (30), криві α_m^* і β_m^* з початковими точками x_m і y_m відповідно мають підкриві $\widetilde{\alpha_m^*}$ і $\widetilde{\beta_m^*}$ з початковими точками у V^* і кінцевими точками у ∂U^*. На підставі співвідношень (27), (29) і (30) одержуємо, що
$$d(\alpha_m^*)\geq\delta_2,\quad d(\beta_m^*)\geq\delta_2.$$
Розглянемо криві $\varphi^*(\widetilde{\alpha_m^*})$ і $\varphi^*(\widetilde{\beta_m^*})$. Нехай $\overline{x}_m,\overline{y}_m\in U^*$ є такими, що $d(\widetilde{\alpha_m^*})=|\overline{x}_m-\overline{y}_m|$. Покладемо $x_m^*=\varphi^*(\overline{x}_m)$ і $y_m^*=\varphi^*(\overline{y}_m)$. Тоді за співвідношенням (22), застосованим до φ^* замість φ,
$$|x_m^*-y_m^*|^{\alpha^*}\geq\frac{1}{\widetilde{C}}|\overline{x}_m-\overline{y}_m|=d(\alpha_m^*)\geq\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2$$
або
$$|x_m^*-y_m^*|\geq\left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha^*}. \tag{31}$$
З (31) отримуємо, що $d(\varphi^*(\widetilde{\alpha_m^*}))\geq\left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha^*}$. Аналогічно $d(\varphi^*(\widetilde{\beta_m^*}))\geq\left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha^*}$. Нехай
$$\widetilde{\Gamma_m}:=\Gamma\Big(\varphi^*(\widetilde{\alpha_m^*}),\varphi^*(\widetilde{\beta_m^*}),\mathbb{B}^n_+\Big).$$
Зауважимо, що $\mathbb{B}^n_+$ є обмеженою опуклою областю, тому вона є областю Джона (див. [16, зауваження 2.4]), а отже рівномірною областю (див. [16, зауваження 2.13(c)]), а також QED-областю з деяким $A_0^*<\infty$ у (3) (див. [17, лема 2.18]). Тоді, з одного боку, за нерівністю (3)
$$M(\widetilde{\Gamma_m})\geq(1/A_0^*)M(\Gamma(\varphi^*(\widetilde{\alpha_m^*}),\varphi^*(\widetilde{\beta_m^*}),\mathbb{R}^n)), \tag{32}$$
а з іншого — за лемою 7.38 [13]
$$M(\Gamma(\varphi^*(\widetilde{\alpha_m^*}),\varphi^*(\widetilde{\beta_m^*}),\mathbb{R}^n))\geq c_n\log\left(1+\frac{1}{\widetilde{m}}\right), \tag{33}$$
де $c_n>0$ — деяка стала, що залежить лише від n,
$$\widetilde{m}=\frac{\operatorname{dist}(\varphi^*(\widetilde{\alpha_m^*}),\varphi^*(\widetilde{\beta_m^*}))}{\min\{\operatorname{diam}(\varphi^*(\widetilde{\alpha_m^*})),\operatorname{diam}\varphi^*(\widetilde{\beta_m^*})\}}.$$
Поєднуючи (32) і (33) та враховуючи, що $\operatorname{dist}(\varphi^*(\widetilde{\alpha_m^*}),\varphi^*(\widetilde{\beta_m^*}))\leq|\varphi^*(x_m)-\varphi^*(y_m)|$, отримуємо

$$M(\widetilde{\Gamma_m}) \geq \widetilde{c_n} \log\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha^*}}{(\widetilde{C})^{1/\alpha^*}\operatorname{dist}(\varphi^*(\widetilde{\alpha_m^*}), \varphi^*(\widetilde{\beta_m^*}))}\right)$$

$$\geq \widetilde{c_n} \log\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha^*}}{(\widetilde{C})^{1/\alpha^*}|\varphi^*(x_m) - \varphi^*(y_m)|}\right), \tag{34}$$

де $\widetilde{c_n} > 0$ — деяка стала, що залежить лише від n і сталої A_0^* з означення QED-області.

Встановимо тепер верхню оцінку для $M(\widetilde{\Gamma_m})$. Зауважимо, що відображення F_m у (28) задовольняє співвідношення (2) з функцією $\widetilde{Q(x)} = K_0 \cdot Q(x)$ замість Q, де $K_0 \geq 1$ — стала квазіконформності відображення $(\varphi^*)^{-1}$. Покладемо

$$\rho_m(y) = \begin{cases} \dfrac{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha}}\left(C_{k_0}^*\right)^{\frac{1}{\alpha_{k_0}^2}}}{C_0^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}|f_m(x_m) - f_m(y_m)|^{-\frac{1}{\alpha_{k_0}^2}}, & y \in D', \\ 0, & y \notin D'. \end{cases}$$

Зауважимо, що ρ_m задовольняє співвідношення (1) для сім'ї кривих $F_m(\widetilde{\Gamma_m})$ на підставі співвідношення (12). Тоді за означенням сім'ї $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ отримаємо, що

$$M(\widetilde{\Gamma_m}) \leq \frac{K_0\left(\dfrac{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha}}(C_1^*)^{\frac{1}{\alpha_{k_0}^2}}}{C_0^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}\right)^n}{|f_m(x_m) - f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha_{k_0}^2}}} \int\limits_{D'} Q(y)\, dm(y). \tag{35}$$

Із (34) і (35) випливає, що

$$\widetilde{c_n} \log\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha^*}}{(\widetilde{C})^{1/\alpha^*}|\varphi^*(x_m) - \varphi^*(y_m)|}\right) \leq \frac{K_0\left(\dfrac{C_1^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}\left(C_{k_0}^*\right)^{\frac{1}{\alpha_{k_0}^2}}}{C_0^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}\right)^n}{|f_m(x_m) - f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha_{k_0}^2}}} \int\limits_{D'} Q(y)\, dm(y).$$

З останнього співвідношення, з урахуванням неперервності за Гельдером відображення φ^* (див. (22)), випливає, що

$$|f_m(x_m) - f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha_{k_0}^2}}$$

$$\leq K_0\|Q\|_1\left(\frac{C_{k_0}^{\frac{1}{\alpha}}\left(C_{k_0}^*\right)^{\frac{1}{\alpha_{k_0}^2}}}{C_0^{\frac{1}{\alpha_{k_0}}}}\right)^n \widetilde{c_n}\frac{1}{\log\left(1 + \dfrac{\delta_2^{1/\alpha^*}}{(\widetilde{C})^{1/\alpha^*}|\varphi^*(x_m) - \varphi^*(y_m)|}\right)}$$

$$\leq M_0 \cdot \frac{\|Q\|_1}{\log\left(1 + \dfrac{\delta}{2|x_m - y_m|^{\alpha^*}}\right)} \tag{36}$$

для деякої сталої $M_0 > 0$, бо за правилом Лопіталя $\log\left(1+\dfrac{1}{nt}\right) \sim \log\left(1+\dfrac{1}{kt}\right)$ при $t \to +0$ для різних фіксованих $k, n > 0$. Оскільки сім'я відображень $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$ (див. [2, теорема 1.2]), можна вважати, що $|f(x_m) - f(y_m)| < 1$ при всіх $m \in \mathbb{N}$. Тоді оскільки $\alpha_{k_0} \geq \alpha$, то $\dfrac{n}{\alpha^2_{k_0}} \leq \dfrac{n}{\alpha^2}$. Отже,

$$|f_m(x_m) - f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2_{k_0}}} \geq |f_m(x_m) - f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2}}.$$

Тепер з (36) випливає, що

$$|f_m(x_m) - f_m(y_m)|^{\frac{n}{\alpha^2}} \leq M_0 \frac{\|Q\|_1}{\log\left(1 + \dfrac{\delta}{2|x_m - y_m|^{\alpha^*}}\right)}, \quad m > m_2. \tag{37}$$

Співвідношення (37) суперечить припущенню, зробленому в (26). Отримана суперечність доводить теорему.

***Зауваження* 1.** Теорема 3 залишається справедливою, якщо в ній одна або дві області D і D' є відповідно локально α^*-гельдерово та α-гельдерово еквівалентними до півкулі на своїй межі. В цьому випадку будемо мати співвідношення (25), у якому показник α^* відповідає „гельдеровій еквівалентності” D, а показник α — області D'. Доведення цього твердження з невеликими відмінностями повторює доведення теореми 3, тому ми його не наводимо.

6. Прості кінці. Означення простого кінця, яке використовується нижче, можна знайти в [10]. Тут і далі $\overline{D}_P$ позначає поповнення області D її простими кінцями, а $E_D = \overline{D}_P \setminus D$ — множина всіх простих кінців в D. Говоримо, що обмежена область D в $\mathbb{R}^n$ *регулярна*, якщо D може бути квазіконформно відображена на область з локально квазіконформною межею, замикання якої є компактом в $\mathbb{R}^n$, крім того, кожен простий кінець $P \subset E_D$ є регулярним. Зауважимо, що замикання $\overline{D}_P$ регулярної області D є *метризовним*, при цьому якщо $g\colon D_0 \to D$ — квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D, то для $x, y \in \overline{D}_P$ покладемо

$$\rho(x, y) := |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|, \tag{38}$$

де для $x \in E_D$ елемент $g^{-1}(x)$ розуміється як деяка (єдина) точка межі D_0, коректно визначена з огляду на теорему 4.1 [9]. Справедливим є таке твердження.

Теорема 4. *Нехай $Q \in L^1(D')$, а D — регулярна область.*

1. *Якщо D' є обмеженою областю з локально квазіконформною межею, то будь-яке відображення $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ продовжується до відображення $f\colon \overline{D}_P \to \overline{D'}$, при цьому для кожної точки $P_0 \in E_D$ знайдуться окіл U цієї точки у метричному просторі $(\overline{D}_P, \rho)$ і сталі $C = C(n, A, D, D') > 0$, $0 < \alpha = \alpha(n, A, D, D') \leq 1$ і $0 < \alpha^* = \alpha^*(n, A, D, D') \leq 1$ такі, що*

$$|\overline{f}(P_1) - \overline{f}(P_2)|^{\frac{n}{\alpha^2}} \leq \frac{C(\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \dfrac{\delta}{\rho^{\alpha^*}(P_1, P_2)}\right)} \tag{39}$$

для всіх $P_1, P_2 \in U$, де $\|Q\|_1$ — норма функції Q в $L^1(D')$.

2. *Якщо D' є обмеженою локально α-гельдерово еквівалентною до півкулі на своїй межі в сенсі співвідношення* (22), *то будь-яке відображення $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ продовжується до*

відображення $f\colon \overline{D}_P \to \overline{D'}$, *при цьому для кожної точки* $P_0 \in E_D$ *знайдуться окіл* U *цієї точки у метричному просторі* $(\overline{D}_P, \rho)$ *і стала* $C = C(n, A, D, D') > 0$ *такі, що виконується співвідношення* (39).

Доведення. Нехай $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$. Достатньо обмежитися випадком $P_1, P_2 \in U \cap D$. Оскільки D — регулярна область, існує квазіконформне відображення g^{-1} області D на область D_0 з локально квазіконформною межею, причому, за означенням метрики ρ в (38),

$$\rho(P_1, P_2) := |g^{-1}(P_1) - g^{-1}(P_2)|.$$

Розглянемо допоміжне відображення

$$F(x) = (f \circ g)(x), \quad x \in D_0. \tag{40}$$

Оскільки відображення g є квазіконформним, то існує стала $1 \le K_1 < \infty$ така, що

$$\frac{1}{K_1} M(\Gamma) \le M(g(\Gamma)) \le K_1 M(\Gamma) \tag{41}$$

для будь-якої сім'ї кривих Γ в D_0. З огляду на нерівності (41) та з урахуванням того, що f задовольняє співвідношення (2), отримуємо, що F також задовольняє співвідношення (2) з новою функцією $\widetilde{Q}(x) := K_1 Q(x)$. Крім того, оскільки g — фіксоване відображення, яке є гомеоморфізмом, то $h(F^{-1}(A), \partial D) \ge \delta_0 > 0$, де $\delta_0 > 0$ — деяке фіксоване число. Оскільки g — квазіконформне відображення, воно є локально гельдеровим з деяким показником α^*.

Розглянемо випадок 1. Тоді до відображення F можна застосувати теорему 3. Застосовуючи цю теорему, одержуємо, що для будь-якої точки $x_0 \in \partial D_0$ знайдуться окіл U^* цієї точки і сталі $C^* = C(n, A, D_0, D') > 0$, $0 < \alpha^* = \alpha^*(n, A, D_0, D') \le 1$ і $0 < \alpha = \alpha(n, A, D_0, D') \le 1$ такі, що

$$|F(x) - F(y)|^{\frac{n}{\alpha^2}} \le \frac{C^* K_1 \|Q\|_1}{\log\left(1 + \dfrac{\delta_0}{2|x-y|^{\alpha^*}}\right)} \tag{42}$$

для всіх $x, y \in U^* \cap D_0$, де $\|Q\|_1$ — норма функції Q в $L^1(D)$. Нехай $U := g(U^*)$, $P_0 := g(x_0)$. Тоді за означенням U є околом простого кінця $P_0 \in E_D$. Якщо $P_1, P_2 \in D_P \cap U$, то $P_1 = g(x)$ і $P_2 = g(y)$ для деяких $x, y \in U^* \cap D_0$. З огляду на співвідношення (42), враховуючи, що $|x - y| = |g^{-1}(P_1) - g^{-1}(P_2)| = \rho(P_1, P_2)$, отримуємо, що

$$|F(g^{-1}(P_1)) - F(g^{-1}(P_2))|^{\frac{n}{\alpha^2}} \le \frac{C^* K_1 \|Q\|_1}{\log\left(1 + \dfrac{\delta_0}{2\rho^{\alpha^*}(P_1, P_2)}\right)},$$

або, з огляду на (40),

$$|f(P_1) - f(P_2)|^{\frac{n}{\alpha^2}} \le \frac{C^* K_1 \|Q\|_1}{\log\left(1 + \dfrac{\delta_0}{2\rho^{\alpha^*}(P_1, P_2)}\right)}.$$

Не обмежуючи загальності можна вважати, що в останньому співвідношенні $\delta_0 = \delta$, бо, як вже зазначалося, $\log\left(1 + \dfrac{1}{nt}\right) \sim \log\left(1 + \dfrac{1}{kt}\right)$ при $t \to +0$ для різних фіксованих $k, n > 0$. Це і є бажаним співвідношенням.

У випадку 2 із зауваження 1 випливає співвідношення (42) з конкретними α^* і α. Все решта в доведенні залишиться без змін.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Це дослідження підтримано науковим проєктом МОН України „Сучасні проблеми геометричної теорії функцій і відображень” (реєстраційний номер УкрІНТЕІ 0122U000821).

Авторські внески. Усі автори внесли рівний внесок у роботу.

Література

1. E. A. Sevost'yanov, *On logarithmic Hölder continuity of mappings on the boundary*, Ann. Fenn. Math., **47**, 251 – 259 (2022).
2. E. A. Sevost'yanov, S. O. Skvortsov, O. P. Dovhopiatyi, *On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality*, J. Math. Sci., **252**, № 4, 541 – 557 (2021).
3. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Distortion and singularities of quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **465**, 1 – 13 (1970).
4. S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
5. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Sci.-Business Media, LLC, New York (2009).
6. M. Vuorinen, *Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss., **11**, 1 – 44 (1976).
7. M. Vuorinen, *On the existence of angular limits of n-dimensional quasiconformal mappings*, Ark. Math., **18**, 157 – 180 (1980).
8. J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
9. R. Näkki, *Prime ends and quasiconformal mappings*, J. Anal. Math., **35**, 13 – 40 (1979).
10. Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, *К теории простых концов для пространственных областей*, Укр. мат. журн., **67**, № 4, 467 – 479 (2015).
11. O. Dovhopiatyi, *On the possibility of joining two pairs of points in convex domains using paths*, Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України, **47**, № 1, 3 – 12 (2023).
12. E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, *On the convergence of mappings in metric spaces with direct and inverse modulus conditions*, Ukr. Math. J., **70**, № 7, 1097 – 1114 (2018).
13. M. Vuorinen, *Conformal geometry and quasiregular mappings*, Lecture Notes in Math., **1319**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1988).
14. N. S. Ilkevych, E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, *On the global behavior of inverse mappings in terms of prime ends*, Ann. Fenn. Math., **46**, 371 – 388 (2021).
15. K. Kuratowski, *Topology*, vol. 2, Academic Press, New York, London (1968).
16. O. Martio, J. Sarvas, *Injectivity theorems in plane and space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **4**, 384 – 401 (1978/1979).
17. F. W. Gehring, O. Martio, *Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings*, J. Anal. Math., **45**, 181 – 206 (1985).

Одержано 25.10.23