DOI: 10.3842/umzh.v76i5.7769

УДК 517.9

Марія Сердюк[1] (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З РЕГУЛЯРНОЮ ОСОБЛИВІСТЮ ДЛЯ РАДІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ p-АДИЧНОГО АРГУМЕНТУ

We consider the case of regular singularity for a class of equations with pseudodifferential operator $D^{\alpha},\ \alpha > 0$, on radial functions

$$|t|_p^{\alpha}(D^{\alpha})(|t|_p) = A(|t|_p)u(|t|_p).$$

Under certain conditions, we prove the existence of a solution specified in the form of a locally absolutely convergent power series.

Розглянуто випадок регулярної сингулярності для класу рівнянь з псевдодиференціальним оператором $D^{\alpha},\ \alpha > 0$, на радіальних функціях

$$|t|_p^{\alpha}(D^{\alpha})(|t|_p) = A(|t|_p)u(|t|_p).$$

За певних умов доведено існування розв'язку, що задається у вигляді локально абсолютно збіжного степеневого ряду.

1. Вступ. Теорія псевдодиференціальних операторів p-адичного аргументу має досить довгу історію і пов'язана з роботами Владімірова, Воловича та Зеленова [12], Кочубея [8], Тейблсона [11], Альбеверіо, Хреннікова та Шелковича [1]. Важливість цього напрямку пов'язана із теоремою Островського, яка стверджує, що довільна нетривіальна норма на полі раціональних чисел $\mathbb{Q}$ еквівалентна звичайному абсолютному значенню $|\cdot|$ або p-адичній нормі $|\cdot|_p$. Таким чином, операторний аналіз у просторах функцій над неархімедовим локально компактним полем є альтернативною математичною моделлю, що має потенціал для застосувань не менший, ніж звичайний аналіз, що базується на евклідовій відстані (див., наприклад, [3, 4, 13]).

У роботі [7] було розглянуто несингулярну нелінійну задачу Коші на радіальних функціях

$$(D^{\alpha})(|t|_p) = f(|t|_p, u(|t|_p)), \quad 0 \neq t \in \mathbb{Q}_p,$$

$$u(0) = u_0,$$

та доведено існування відповідного розв'язку. Подальший розвиток цього напрямку було зроблено у роботі [2], де розглянуто випадок *слабкого виродження*, який відповідає нелінійному псевдодиференціальному рівнянню

$$|t|_p^{\gamma}(D^{\alpha})(|t|_p) = f(|t|_p, u(|t|_p)), \quad 0 \neq t \in \mathbb{Q}_p,$$

при $\gamma < \min(1, \alpha)$, та знайдено умови існування локального та глобального розв'язку. В цій роботі ми робимо наступний крок і розглядаємо випадок регулярної особливості. Основним результатом є теорема 3.1, яка показує, що формальний розв'язок, який задається степеневим рядом, надає справжній розв'язок у тому сенсі, що цей ряд є абсолютно збіжним.

Зауважимо, що оператор $D^{\alpha},\ \alpha > 0$, можна розглядати як p-адичний аналог дробової похідної Рімана – Ліувілля. Класичні дробові рівняння з регулярною особливістю було розглянуто в

[1] E-mail: mariia.v.serdiuk@gmail.com.

роботі А. Н. Кочубея [6]. Спираючись на методи [6], ми розглядаємо лінійні псевдодиференціальні рівняння з регулярним виродженням при $\gamma = \alpha$

$$|t|_p^{\alpha}(D^{\alpha})(|t|_p) = A(|t|_p)u(|t|_p) \tag{1.1}$$

та доводимо існування локального розв'язку у вигляді степеневого ряду

$$u(|t|_p) = \sum_{N=0}^{\infty} u_N |t|_p^{\beta N},$$

де $\beta > 0$, за відповідних умов на праву частину рівняння (1.1).

2. Основні означення та попередні результати. Нехай $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адичних чисел, яке визначається як поповнення поля раціональних чисел $\mathbb{Q}$ щодо неархімедової p-адичної норми $|\cdot|_p$. Для раціонального числа $x = p^{\gamma}(m/n)$, де цілі числа m та n взаємно прості з p, p-адична норма x дорівнює $|x|_p = p^{-\gamma}$. Ця норма задовольняє сильну нерівність трикутника $|x+y|_p \le \max(|x|_p, |y|_p)$.

Функція $\varphi : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ називається *локально сталою*, якщо існує таке ціле число ℓ, що для будь-якого $x \in \mathbb{Q}_p$

$$\varphi(x + x') = \varphi(x) \quad \text{при} \quad |x'|_p \le p^{-\ell}.$$

Найменше з таких чисел ℓ називається показником локальної сталості функції φ.

Позначимо через $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ лінійний топологічний простір всіх локально сталих функцій $\varphi : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ з компактними носіями. Сильно спряжений простір $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ називається простором узагальнених функцій Бруа – Шварца (див. [1], розділ 4.3).

Нехай $\chi_p(\xi x) = \exp(2\pi i\{\xi x\}_p)$, де $\xi \in \mathbb{Q}_p$, — адитивний характер $\mathbb{Q}_p$. Перетворення Фур'є основної функції $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ визначається як

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)\varphi(x)dx, \quad x \in \mathbb{Q}_p.$$

Оператор дробового диференціювання D^{α}, $\alpha > 0$, на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ визначається таким чином (див. [12]):

$$(D^{\alpha}\varphi)(x) = \mathcal{F}^{-1}\big[|\xi|_p^{\alpha}(\mathcal{F}(\varphi))(\xi)\big](x).$$

Відомо [5], що

$$D^{\alpha}(|\cdot|_p^{\beta}) = \frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta-\alpha+1)}|\cdot|_p^{\beta-\alpha}, \quad \beta \ne \alpha, \tag{2.1}$$

де

$$\Gamma_p(z) = \frac{1-p^{z-1}}{1-p^{-z}} \tag{2.2}$$

— p-адичний аналог гамма-функції.

3. Регулярна особливість. Будемо розглядати рівняння вигляду

$$|t|_p^{\alpha}(D^{\alpha}u)(|t|_p) = A(|t|_p)u(|t|_p), \tag{3.1}$$

де

$$A(|t|_p) = \sum_{N=0}^{\infty} A_N |t|_p^{\beta N},$$

$A_N \in \mathbb{C},\ \beta > 0$ і для деяких $M, \mu > 0$

$$|A_N| \leq M\mu^N, \quad N \geq 0. \tag{3.2}$$

Припустимо, що функція u розкладається у формальний ряд вигляду

$$u(|t|_p) = \sum_{N=0}^{\infty} u_N |t|_p^{\beta N}, \quad u_N \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

Підставляючи ряд (3.3) формально у рівняння (3.1), з урахуванням формули (2.1), у випадку $\alpha \neq \beta N,\ N \geq 0$, отримуємо

$$|t|_p^{\alpha} \sum_{N=0}^{\infty} u_N D^{\alpha}(|t|_p^{\beta N}) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k |t|_p^{\beta k}\right)\left(\sum_{N=0}^{\infty} u_N |t|_p^{\beta N}\right),$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} u_N \frac{\Gamma_p(\beta N+1)}{\Gamma_p(\beta N-\alpha+1)} |t|_p^{\beta N} = \sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} A_k u_{N-k}\right)|t|_p^{\beta N}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $|t|_p^N$, маємо

$$\frac{\Gamma_p(\beta N+1)}{\Gamma_p(\beta N-\alpha+1)} u_N = \sum_{k=0}^{N} A_k u_{N-k}, \quad N \geq 0,$$

або, еквівалентно, оскільки $\Gamma_p(1) = \dfrac{1-p^0}{1-p^{-1}} = 0$,

$$0 = A_0 u_0, \tag{3.4}$$

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta N+1)}{\Gamma_p(\beta N-\alpha+1)}\right] u_N = -\sum_{k=1}^{N} A_k u_{N-k}, \quad N \geq 1. \tag{3.5}$$

Означення 3.1. *Будемо називати ряд* (3.3) *формальним розв'язком рівняння* (3.1), *якщо виконуються співвідношення* (3.4), (3.5).

Теорема 3.1. *Нехай* $A_0 = 0$. *Якщо ряд* (3.3) *є формальним розв'язком рівняння* (3.1), *то ряд* (3.3) *є локально абсолютно збіжним.*

Доведення. Нехай $A_0 = 0$. Тоді рівняння (3.4) виконується для будь-якого $u_0 \in \mathbb{C}$.

Із рівняння (2.2) маємо

$$\frac{\Gamma_p(\beta N+1)}{\Gamma_p(\beta N-\alpha+1)} = \frac{1-p^{\beta N}}{1-p^{-(\beta N+1)}}\frac{1-p^{-(\beta N-\alpha+1)}}{1-p^{\beta N-\alpha}} = \frac{p^{\beta N}(p^{-\beta N}-1)}{1-p^{-(\beta N+1)}}\frac{1-p^{-(\beta N-\alpha+1)}}{p^{\beta N}(p^{-\beta N}-p^{-\alpha})}$$

$$= \frac{p^{-\beta N} - 1}{1 - p^{-(\beta N+1)}} \frac{1 - p^{-(\beta N-\alpha+1)}}{p^{-\beta N} - p^{-\alpha}} \sim \frac{-1}{-p^{-\alpha}} = p^{\alpha}, \quad N \to \infty.$$

Тому існує таке $N_0 \in \mathbb{N}$, що для деякого $C > 0$ виконується

$$\left| \left[\frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right]^{-1} \right| \leq C p^{-\alpha}, \quad N \geq N_0. \tag{3.6}$$

Розглядаючи, якщо необхідно, $\lambda u(|t|_p)$ замість $u(|t|_p)$ при достатньо малому $|\lambda|$, можна припустити, що $|u_0| \leq 1$.

Виберемо $r > 0$ настільки великим, щоб виконувалось $|u_N| \leq r^N$ для $N \leq N_0$ і

$$C M p^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{r} \right)^k \leq 1. \tag{3.7}$$

Тоді за індукцією

$$|u_N| \leq r^N, \quad N \geq 0. \tag{3.8}$$

Справді, припустимо, що (3.8) виконується для деякого $N \geq N_0$. Тоді із (3.2), (3.5)–(3.7) випливає, що

$$|u_{N+1}| \leq \left| \left[\frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right]^{-1} \right| \left| \sum_{k=1}^{N+1} A_k u_{N+1-k} \right|$$

$$\leq C M p^{-\alpha} \sum_{k=1}^{N+1} \mu^k r^{N+1-k}$$

$$= C M p^{-\alpha} r^{N+1} \sum_{k=1}^{l+1} \left(\frac{\mu}{r} \right)^k \leq r^{N+1}.$$

Оскільки радіус збіжності R степеневого ряду (3.3) дорівнює [10] (твердження 6.1)

$$R^{-1} = \limsup_{N \to \infty} |u_N|^{1/N},$$

то із (3.8) випливає, що якщо ряд (3.3) є формальним розв'язком рівняння (3.1), він збігається абсолютно при $|t|_p \leq r^{-1}$.

Теорему доведено.

Далі розглянемо випадок $A_0 \neq 0$. Аналізуючи рівняння (3.4) і (3.5), легко бачити, що різні випадки значень A_0, які задовольняють цю систему, розгалужуються подібно до дерева, тому буде зручно далі позначати кожний крок індексом m. Припустимо, що ряд (3.3) є формальним розв'язком рівняння (3.1). Позначимо

$$\{A^m\} = \{A_0^{(1)}, \ldots, A_0^{(m-1)}\}.$$

Крок $m = 1$. Із рівняння (3.4) випливає, що або $A_0 = 0$, або $u_0 = 0$.

Випадок (1): $A_0^{(1)} = 0,\ u_0$ можемо вибрати довільне. Тоді із рівняння (3.5) маємо

$$u_N^{(1)} = -\left[\frac{\Gamma_p(\beta N+1)}{\Gamma_p(\beta N-\alpha+1)}\right]^{-1}\sum_{k=1}^{N} A_k u_{N-k}, \quad N \geq 1,$$

і за теоремою 3.1 ряд (3.3) є локально абсолютно збіжним.

Випадок (2): $A_0 \neq 0$ довільне, $u_0 = 0$. Тоді із (3.5) для $N = 1$ маємо

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta-\alpha+1)}\right]u_1 = -A_1 u_0 = 0.$$

Крок $m = 2$. Тоді або $\left[A_0 - \dfrac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta-\alpha+1)}\right] = 0$, або $u_1 = 0$.

Випадок (21): $A_0^{(21)} = \dfrac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta-\alpha+1)},\ u_0 = 0,\ u_1$ довільне. Тоді із (3.5) маємо

$$u_N^{(21)} = -\left[\frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta-\alpha+1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N+1)}{\Gamma_p(\beta N-\alpha+1)}\right]^{-1}\sum_{k=1}^{N-1} A_k u_{N-k}, \quad N \geq 2.$$

Оскільки $\dfrac{\Gamma_p(\beta N+1)}{\Gamma_p(\beta N-\alpha+1)} \sim p^\alpha$, то існує таке $N_0 \in \mathbb{N}$, що для деякого $C > 0$

$$\left|\left[\frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta-\alpha+1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N+1)}{\Gamma_p(\beta N-\alpha+1)}\right]^{-1}\right| \leq C\left|\frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta-\alpha+1)} - p^\alpha\right|^{-1}, \quad N \geq N_0.$$

Тоді, аналогічно доведенню теореми 3.1, можна вибрати $r > 0$ так, щоб $|u_N| \leq r^N$ для $N \leq N_0$ і

$$CM\left|\frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta-\alpha+1)} - p^\alpha\right|^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{r}\right)^k \leq 1.$$

Далі за індукцією легко довести, що

$$|u_N| \leq r^N, \quad N \geq 0.$$

Звідси випливає, що формальний ряд (3.3) є абсолютно збіжним для $|t|_p \leq r^{-1}$.

Випадок (22): $A_0 \notin \{A^1\}$ довільне, $u_0 = u_1 = 0$. Тоді із (3.5) для $N = 2$ маємо

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(2\beta+1)}{\Gamma_p(2\beta-\alpha+1)}\right]u_2 = -A_1 u_0 - A_2 u_0 = 0.$$

Крок $m = 3$. Тоді або $\left[A_0 - \dfrac{\Gamma_p(2\beta+1)}{\Gamma_p(2\beta-\alpha+1)}\right] = 0$, або $u_2 = 0$.

Випадок (221): $A_0^{(221)} = \dfrac{\Gamma_p(2\beta+1)}{\Gamma_p(2\beta-\alpha+1)},\ u_0 = u_1 = 0,\ u_2$ довільне. Тоді із (3.5) маємо

$$u_N^{(221)} = -\left[\frac{\Gamma_p(2\beta+1)}{\Gamma_p(2\beta-\alpha+1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N+1)}{\Gamma_p(\beta N-\alpha+1)}\right]^{-1}\sum_{k=1}^{N-2} A_k u_{N-k}, \quad N \geq 3.$$

Випадок (222): $A_0 \notin \{A^2\}$ довільне, $u_0 = u_1 = u_2 = 0$. Тоді із (3.5) для $N = 3$

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(3\beta+1)}{\Gamma_p(3\beta-\alpha+1)}\right]u_3 = -A_1u_2 - A_2u_1 - A_3u_0 = 0.$$

Крок $m = 4$. Тоді або $\left[A_0 - \dfrac{\Gamma_p(3\beta+1)}{\Gamma_p(3\beta-\alpha+1)}\right] = 0$, або $u_3 = 0$.

І так далі.

Крок m. *Випадок* (2…21) (тут в індексі стоять $m-1$ ‘2‘ перед ‘1‘): $A_0^{(2\cdots21)} = \dfrac{\Gamma_p(\beta(m-1)+1)}{\Gamma_p(\beta(m-1)-\alpha+1)}$, $u_0 = \ldots = u_{m-2} = 0$, u_{m-1} довільне. Тоді із (3.5) маємо

$$u_N^{(2\cdots21)} = -\left[\frac{\Gamma_p(\beta(m-1)+1)}{\Gamma_p(\beta(m-1)-\alpha+1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N+1)}{\Gamma_p(\beta N-\alpha+1)}\right]^{-1}\sum_{k=1}^{N-m+1} A_k u_{N-k}, \quad N \ge m.$$

Випадок (2…22) (тут в індексі стоять m ‘2‘): $A_0 \notin \{A^{m-1}\}$ довільне, $u_0 = \ldots = u_{m-1} = 0$. Із рівняння (3.5) для $N = m$ маємо

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta(m-1)+1)}{\Gamma_p(\beta(m-1)-\alpha+1)}\right]u_{m-1} = 0$$

і так далі.

За допомогою аналогічних міркувань до випадку (21) отримуємо такий результат.

Теорема 3.2. (i) *Нехай* $A_0 = \dfrac{\Gamma_p(\beta(m-1)+1)}{\Gamma_p(\beta(m-1)-\alpha+1)}$ *для деякого цілого* $m \ge 2$. *Якщо ряд* (3.3) *є формальним розв'язком рівняння* (3.1), *то ряд* (3.3) *є локально абсолютно збіжним, а його коефіцієнти* u_N, $N \ge 0$, *задовольняють співвідношення*

$$u_0 = \ldots = u_{m-2} = 0,$$

$$u_N = -\left[\frac{\Gamma_p(m)}{\Gamma_p(m-\alpha)} - \frac{\Gamma_p(N+1)}{\Gamma_p(N-\alpha+1)}\right]^{-1}\sum_{k=1}^{N-m+1} A_k u_{N-k}, \quad N \ge m,$$

для деякого $u_{m-1} \in \mathbb{C}$.

(ii) *Якщо* $A_0 \ne 0$ *та* $A_0 \ne \dfrac{\Gamma_p(m)}{\Gamma_p(m-\alpha)}$ *для жодного цілого* $m \ge 2$, *то рівняння* (3.1) *має лише нульовий розв'язок* $u \equiv 0$.

Конфлікт інтересів. Авторка заявляє, що вона не має потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Авторка заявляє, що під час підготовки цього рукопису не було отримано коштів, грантів чи іншої підтримки.

Література

1. S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, *Theory of p-adic distributions. Linear and nonlinear models*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2010).
2. A. V. Antoniouk, A. N. Kochubei, M. V. Serdiuk, *Pseudo-differential equations with weak degeneration for radial functions of p-adic argument*, Math. Anal. and Appl., **523** (2023). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127026.

3. I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *Strings, gravity and p-adic space-time*, World Sci., Singapore (1988).
4. B. Dragovich, Lj. Nesic, *On p-adic numbers in gravity*, Balkan Phys. Lett., **6**, 78 – 81 (1998).
5. A. Yu. Khrennikov, A. N. Kochubei, *p-Adic analogue of the Porous medium equation*, J. Fourier Anal. and Appl., **24**, 1401 – 1424 (2018); https://doi.org/10.1007/s00041-017-9556-4.
6. A. N. Kochubei, *Fractional differential equations: α-entire solutions, regular and irregular singularities*, Fract. Calc. and Appl. Anal., **12**, № 2, 135 – 158 (2009); https://zbmath.org/1178.26007.
7. A. N. Kochubei, *Nonlinear pseudo-differential equations for radial real functions on a non-Archimedean field*, J. Math. Anal. and Appl., **483** (2020); https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123609.
8. A. N. Kochubei, *Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields*, Marcel Dekker, New York (2001).
9. A. N. Kochubei, *Radial solutions of non-Archimedean pseudo-differential equations*, Pacif. J. Math., **269**, 355 – 369 (2014); https://dx.doi.org/10.2140/pjm.2014.269.355.
10. A. M. Robert, *A course in p-adic analysis*, Grad. Texts in Math., **198**, Springer-Verlag, New York (2000).
11. M. H. Tableson, *Fourier analysis on local fields*, Princeton Univ. Press, Princeton (1975).
12. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-Adic analysis and mathematical physics*, World Sci., Singapore (1994).
13. W. A. Zuniga-Galindo, C. He, B.A. Zambrano-Luna, *p-Adic statistical field theory and convolutional deep Boltzmann machines*, Prog. Theor. Phys., **2023**, № 6 (2023); https://doi.org/10.1093/ptep/ptad061.

Одержано 31.08.23