

Леонід Курдаченко (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара),

Микола Семко¹ (Державний податковий університет, Ірпінь Київської області),

Вікторія Ящук (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара)

ПРО БУДОВУ АЛГЕБРИ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ ДЕЯКИХ АЛГЕБР ЛЕЙБНІЦА, ЯКІ МАЮТЬ МАЛУ РОЗМІРНІСТЬ

We start the description of the algebra of derivations of Leibniz algebras with dimension 3. It is clear that the description of the algebra of derivations of all Leibniz algebras with dimension 3, is quite large. Therefore, we focus on the description of nilpotent Leibniz algebras whose nilpotency class is equal to 3 and nilpotent Leibniz algebras whose center has dimension 2.

Ми розпочинаємо опис алгебри диференціювань алгебр Лейбніца, що мають розмірність 3. Зрозуміло, що опис алгебри диференціювань всіх алгебр Лейбніца розмірності 3 є досить великим. Тому ми зосередимося на описі нільпотентних алгебр Лейбніца, клас нільпотентності яких дорівнює 3, та нільпотентних алгебр Лейбніца, центр яких має розмірність 2.

1. Вступ. Нехай L — алгебра над полем F з бінарними операціями $+$ та $[\cdot, \cdot]$. Тоді L називатимемо (лівою) алгеброю Лейбніца, якщо вона задовольняє (ліву) тотожність Лейбніца:

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]] - [b, [a, c]] \quad \text{для всіх } a, b, c \in L.$$

Ми також будемо використовувати іншу форму цієї тотожності:

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]].$$

Алгебри Лейбніца були визначені у статті А. Блоха [2], проте сам термін „алгебра Лейбніца” з’явився значно пізніше у монографії Ж.-Л. Лоде [11] та його ж статті [12]. А в роботі [13] Ж.-Л. Лоде та Т. Пірашвілі розпочали детальне дослідження властивостей алгебр Лейбніца. Теорія алгебр Лейбніца дуже інтенсивно розвивалася в багатьох різних напрямках. З деякими результатами цієї теорії можна ознайомитись у монографії [1]. Зазначимо, що алгебри Лі є частковим випадком алгебр Лейбніца. Водночас, якщо L — алгебра Лейбніца, для якої $[a, a] = 0$ для кожного елемента $a \in L$, то вона є алгеброю Лі. Отже, алгебри Лі можуть бути охарактеризовані як антикомутативні алгебри Лейбніца. Як і в алгебрах Лі, великий вплив на структуру алгебр Лейбніца здійснюють їх алгебри диференціювань.

Позначимо через $\mathbf{End}_{[\cdot, \cdot]}(L)$ множину всіх лінійних перетворень L . Тоді L є асоціативною алгеброю з операціями $+$ та \circ . Як завжди, $\mathbf{End}_{[\cdot, \cdot]}(L)$ є алгеброю Лі з операціями $+$ та $[\cdot, \cdot]$, де $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ для всіх $f, g \in \mathbf{End}_{[\cdot, \cdot]}(L)$.

Лінійне перетворення f алгебри Лейбніца L називається *диференціюванням*, якщо $f([a, b]) = [f(a), b] + [a, f(b)]$ для всіх $a, b \in L$.

Нехай $\mathbf{Der}_{[\cdot, \cdot]}(L)$ є підмножиною всіх диференціювань L . Можна довести, що $\mathbf{Der}_{[\cdot, \cdot]}(L)$ є підалгеброю алгебри Лі $\mathbf{End}_{[\cdot, \cdot]}(L)$. $\mathbf{Der}_{[\cdot, \cdot]}(L)$ називається *алгеброю диференціювань* алгебри Лейбніца L .

¹ Відповідальний за листування, e-mail: dr.mykola.semko@gmail.com.

Вплив на будову алгебри Лейбніца їхніх алгебр диференціювань можна побачити з такого результату: якщо A є ідеалом алгебри Лейбніца, то фактор-алгебра L за анулятором A є ізоморфною до деякої підалгебри $\text{Der}_{[]}(L)$ [7] (твердження 3.2).

Опис структури алгебр диференціювань скінченновимірних циклічних алгебр Лейбніца було отримано в роботах [8 – 10, 14]. Звісно, виникає питання про алгебри диференціювань алгебр Лейбніца, що мають малу розмірність. На відміну від алгебр Лі, ситуація з алгебрами Лейбніца розмірності 3 дуже різноманітна. Алгебри Лейбніца розмірності 3 здебільшого описані, опис алгебр Лейбніца розмірностей 4 і 5 зараз проводять достатньо інтенсивно. Список робіт, присвячених цим дослідженням, досить великий, і ми не будемо наводити його тут повністю. Зазначимо лише, що вивченню алгебр Лейбніца, що мають розмірність 3, присвячено розділ 3.1 монографії [1] та статті [3, 5, 6, 15 – 17].

У цій роботі ми розпочинаємо опис алгебри диференціювань алгебр Лейбніца, що мають розмірність 3. Цей опис досить великий за обсягом, тому ми обмежимося описом алгебри диференціювань деяких типів алгебр Лейбніца, що мають розмірність 3. А саме, опишемо нільпотентні алгебри Лейбніца, клас нільпотентності яких дорівнює 3, та нільпотентні алгебри Лейбніца, центр яких має розмірність 2.

2. Попередні відомості та загальні властивості алгебри диференціювань алгебр Лейбніца. Розпочнемо з деяких загальних властивостей алгебри диференціювань алгебр Лейбніца. Ми наведемо тут деякі основні елементарні властивості диференціювань, які доведено в роботі [8]. Нагадаємо деякі означення.

Кожна алгебра Лейбніца L має один особливий ідеал. Позначимо через $\text{Leib}(L)$ підпростір, породжений елементами $[a, a]$, $a \in L$. Легко показати, що $\text{Leib}(L)$ є ідеалом алгебри L . Називатимемо його *ядром Лейбніца* алгебри L . За означенням фактор-алгебра $L/\text{Leib}(L)$ є алгеброю Лі. Навпаки, якщо K – ідеал L такий, що L/K – алгебра Лі, то K містить ядро Лейбніца.

Лівий (відповідно *правий*) *центр* $\zeta^{\text{left}}(L)$ (відповідно $\zeta^{\text{right}}(L)$) алгебри L визначимо за правилом

$$\zeta^{\text{left}}(L) = \{a \in L \mid [a, b] = 0 \text{ для кожного } b \in L\}$$

(відповідно

$$\zeta^{\text{right}}(L) = \{a \in L \mid [b, a] = 0 \text{ для кожного } b \in L\}.$$

Легко показати, що лівий центр алгебри L є ідеалом, проте це не справджується для правого центра. Правий центр є підалгеброю алгебри L . Варто зазначити, що у загальному випадку лівий та правий центри різні і можуть навіть мати різні розмірності (див., наприклад, [7]).

Центр $\zeta(L)$ алгебри L визначають як перетин лівого та правого центрів, тобто

$$\zeta(L) = \{a \in L \mid [a, b] = 0 = [b, a] \text{ для кожного } b \in L\}.$$

Очевидно, що центр $\zeta(L)$ є ідеалом алгебри L .

Визначимо *верхній центральний ряд*

$$\langle 0 \rangle = \zeta_0(L) \leq \zeta_1(L) \leq \dots \zeta_\alpha(L) \leq \zeta_{\alpha+1}(L) \leq \dots \zeta_\eta(L) = \zeta_\infty(L)$$

алгебри L за правилом $\zeta_1(L) = \zeta(L)$, $\zeta_{\alpha+1}(L)/\zeta_\alpha(L) = \zeta(L/\zeta_\alpha(L))$ для всіх порядкових чисел α та $\zeta_\lambda(L) = \bigcup_{\mu < \lambda} \zeta_\mu(L)$ для всіх граничних порядкових чисел λ . Останній член $\zeta_\eta(L) = \zeta_\infty(L)$ цього ряду називають *верхнім гіперцентром* алгебри L .

Визначимо тепер *нижній центральний ряд*

$$L = \gamma_1(L) \geq \gamma_2(L) \geq \dots \gamma_\alpha(L) \geq \gamma_{\alpha+1} \geq \dots \gamma_\delta(L) = \gamma_\infty(L)$$

алгебри L за правилом $\gamma_1(L) = L$, $\gamma_2(L) = [L, L]$, $\gamma_{\alpha+1}(L) = [L, \gamma_\alpha(L)]$ для всіх порядкових чисел α та $\gamma_\lambda(L) = \bigcap_{\mu < \lambda} \gamma_\mu(L)$ для всіх граничних порядкових чисел λ . Останній член $\gamma_\delta(L) = \gamma_\infty(L)$ цього ряду називають *нижнім гіпоцентром* алгебри L .

Алгебру Лейбніца L називатимемо *нільпотентною*, якщо існує таке натуральне число k , що $\gamma_k(L) = \langle 0 \rangle$. Разом з тим алгебру L називатимемо *нільпотентною класу нільпотентності c* , якщо $\gamma_{c+1}(L) = \langle 0 \rangle$, але $\gamma_c(L) \neq \langle 0 \rangle$.

Лема 2.1. Нехай L – алгебра Лейбніца над полем F , f – диференціювання алгебри L . Тоді $f(\zeta^{\text{left}}(L)) \leq \zeta^{\text{left}}(L)$, $f(\zeta^{\text{right}}(L)) \leq \zeta^{\text{right}}(L)$ і $f(\zeta(L)) \leq \zeta(L)$.

Наслідок 2.1. Нехай L – алгебра Лейбніца над полем F , f – диференціювання алгебри L . Тоді $f(\zeta_\alpha(L)) \leq \zeta_\alpha(L)$ для всіх порядкових чисел α .

Лема 2.2. Нехай L – алгебра Лейбніца над полем F , f – диференціювання алгебри L . Тоді $f(\gamma_\alpha(L)) \leq \gamma_\alpha(L)$ для всіх порядкових чисел α . Зокрема, $f(\gamma_\infty(L)) \leq \gamma_\infty(L)$.

Природно спочатку навести опис алгебри диференціювань алгебр Лейбніца розмірності 2. Опис алгебри Лейбніца, що має розмірність 2, міститься в кількох роботах (однією з перших була робота [4]). Алгебри Лейбніца, що мають розмірність 2, які не є алгебрами Лі, обмежені алгебрами двох типів:

$$\mathbf{Lei}_1(2, F) = Fa_1 \oplus Fa_2, \quad \text{де } [a_1, a_1] = a_2, \quad [a_1, a_2] = [a_2, a_1] = [a_2, a_2] = 0,$$

$$\mathbf{Lei}_2(2, F) = Fa_1 \oplus Fa_2, \quad \text{де } [a_1, a_1] = a_2, \quad [a_1, a_2] = a_2, \quad [a_2, a_1] = [a_2, a_2] = 0.$$

Нехай L – алгебра Лі. Будемо говорити, що L – *напівпряма сума ідеалу A і підалгебри B* , якщо $L = A + B$ та $A \cap B = \langle 0 \rangle$.

Твердження 2.1. Нехай \mathbf{D} – алгебра диференціювань алгебри Лейбніца $\mathbf{Lei}_1(2, F)$. Тоді \mathbf{D} є *напівпрямою сумою ідеалу розмірності 1 і підалгебри розмірності 1*. Точніше, \mathbf{D} ізоморфна підалгебрі матриць, що має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \text{де } \alpha_1, \alpha_2 \in F.$$

Доведення. Нехай $L = \mathbf{Lei}_1(2, F)$ і $f \in \mathbf{Der}_{[1]}(L)$. Маємо $f(a_1) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, тоді

$$\begin{aligned} f(a_2) &= f([a_1, a_1]) = [f(a_1), a_1] + [a_1, f(a_1)] \\ &= [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, a_1] + [a_1, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2] \\ &= [\alpha_1 a_1, a_1] + [a_1, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2] \\ &= \alpha_1 [a_1, a_1] + \alpha_1 [a_1, a_1] + \alpha_2 [a_1, a_2] = 2\alpha_1 a_2. \end{aligned}$$

Таким чином, диференціювання f має в базисі $\{a_1, a_2\}$ матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Нехай f_1 — ендоморфізм L , визначений за правилом $f_1(a_1) = a_1$, $f_1(a_2) = 2a_2$. Неважко перевірити, що $f_1 \in \text{Der}_{[\cdot]}(L)$. Нехай f_2 — ендоморфізм L , визначений за правилом $f_2(a_1) = a_2$, $f_2(a_2) = 0$. Так само $f_2 \in \text{Der}_{[\cdot]}(L)$. Крім того, неважко перевірити, що підпростір Ff_2 є ідеалом $\text{Der}_{[\cdot]}(L)$. Нехай f — довільне диференціювання L , $f(a_1) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, $f(a_2) = 2\alpha_1 a_2$. Маємо

$$(f - \alpha_1 f_1)(a_1) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 - \alpha_1 a_1 = \alpha_2 a_2 = \alpha_2 f_2(a_1),$$

$$(f - \alpha_1 f_1)(a_2) = 2\alpha_1 a_2 - 2\alpha_1 a_2 = 0 = \alpha_2 f_2(a_2).$$

Таким чином, $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, так що $D = Ff_2 + Ff_1$. З цього зрозуміло, що $Ff_2 \cap Ff_1 = \langle 0 \rangle$.

Твердження доведено.

Твердження 2.2. Нехай D — алгебра диференціювань алгебри Лейбніца $\text{Lei}_2(2, F)$. Тоді D є абелевою і має розмірність 1, $D = Ff$, де $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_2$.

Доведення. Нехай $L = \text{Lei}_2(2, F)$ і $f \in \text{Der}_{[\cdot]}(L)$. Маємо $f(a_1) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, тоді

$$\begin{aligned} f(a_2) &= f([a_1, a_1]) = [f(a_1), a_1] + [a_1, f(a_1)] \\ &= [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, a_1] + [a_1, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2] \\ &= [\alpha_1 a_1, a_1] + [a_1, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2] \\ &= \alpha_1 [a_1, a_1] + \alpha_1 [a_1, a_1] + \alpha_2 [a_1, a_2] \\ &= 2\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_2 = (2\alpha_1 + \alpha_2) a_2. \end{aligned}$$

Отже, диференціювання f має в базисі $\{a_1, a_2\}$ матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Навпаки, нехай g — ендоморфізм L , визначений за правилом $g(a_1) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, $g(a_2) = (2\alpha_1 + \alpha_2) a_2$, де $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. Виберемо довільні елементи $x, y \in L$, і нехай $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, $y = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2$. Маємо

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = \lambda_1 g(a_1) + \lambda_2 g(a_2) \\ &= \lambda_1 (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) + \lambda_2 (2\alpha_1 + \alpha_2) a_2 \\ &= \lambda_1 \alpha_1 a_1 + (\lambda_1 \alpha_2 + 2\lambda_2 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) a_2, \end{aligned}$$

$$g(y) = \mu_1 \alpha_1 a_1 + (\mu_1 \alpha_2 + 2\mu_2 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2) a_2,$$

$$\begin{aligned} [x, y] &= [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2] \\ &= [\lambda_1 a_1, \mu_1 a_1] + [\lambda_1 a_1, \mu_2 a_2] + [\lambda_2 a_2, \mu_1 a_1] + [\lambda_2 a_2, \mu_2 a_2] \\ &= \lambda_1 \mu_1 [a_1, a_1] + \lambda_1 \mu_2 [a_1, a_2] + \lambda_2 \mu_1 [a_2, a_1] + \lambda_2 \mu_2 [a_2, a_2] \\ &= \lambda_1 \mu_1 a_2 + \lambda_1 \mu_2 a_2 = \lambda_1 (\mu_1 + \mu_2) a_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[g(x), y] &= [\lambda_1\alpha_1a_1 + (\lambda_1\alpha_2 + 2\lambda_2\alpha_1a + \lambda_2\alpha_2)a_2, \mu_1a_1 + \mu_2a_2] \\
&= \lambda_1\alpha_1\mu_1[a_1, a_1] + \lambda_1\alpha_1\mu_2[a_1, a_2] \\
&= \lambda_1\alpha_1\mu_1a_2 + \lambda_1\alpha_1\mu_2a_2 = \lambda_1\alpha_1(\mu_1 + \mu_2)a_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x, g(y)] &= [\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2, \mu_1\alpha_1a_1 + (\mu_1\alpha_2 + 2\mu_2\alpha_1 + \mu_2\alpha_2)a_2] \\
&= \lambda_1\mu_1\alpha_1[a_1, a_1] + \lambda_1(\mu_1\alpha_2 + 2\mu_2\alpha_1 + \mu_2\alpha_2)[a_1, a_2] \\
&= \lambda_1\mu_1\alpha_1a_2 + \lambda_1(\mu_1\alpha_2 + 2\mu_2\alpha_1 + \mu_2\alpha_2)a_2 \\
&= \lambda_1(\mu_1\alpha_1 + \mu_1\alpha_2 + 2\mu_2\alpha_1a + \mu_2\alpha_2)a_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g([x, y]) &= g(\lambda_1(\mu_1 + \mu_2)a_2) = \lambda_1(\mu_1 + \mu_2)g(a_2) \\
&= \lambda_1(\mu_1 + \mu_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)a_2 \\
&= \lambda_1(2\alpha_1\mu_1 + \mu_1\alpha_2 + 2\alpha_1\mu_2 + \alpha_2\mu_2)a_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[g(x), y] + [x, g(y)] &= \lambda_1\alpha_1(\mu_1 + \mu_2)a_2 + \lambda_1(\mu_1\alpha_1 + \mu_1\alpha_2 + 2\mu_2\alpha_1a + \mu_2\alpha_2)a_2 \\
&= \lambda_1(\alpha_1\mu_1 + \alpha_1\mu_2 + \mu_1\alpha_1 + \mu_1\alpha_2 + 2\mu_2\alpha_1 + \mu_2\alpha_2)a_2 \\
&= \lambda_1(2\alpha_1\mu_1 + 3\alpha_1\mu_2 + \mu_1\alpha_2 + \mu_2\alpha_2)a_2.
\end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо

$$\lambda_1(2\alpha_1\mu_1 + \mu_1\alpha_2 + 2\alpha_1\mu_2 + \alpha_2\mu_2) = \lambda_1(2\alpha_1\mu_1 + 3\alpha_1\mu_2 + \mu_1\alpha_2 + \mu_2\alpha_2).$$

Оскільки λ_1 довільна, то

$$2\alpha_1\mu_1 + \mu_1\alpha_2 + 2\alpha_1\mu_2 + \alpha_2\mu_2 = 2\alpha_1\mu_1 + 3\alpha_1\mu_2 + \mu_1\alpha_2 + \mu_2\alpha_2.$$

Таким чином, $2\alpha_1\mu_2 = 3\alpha_1\mu_2$ або $\alpha_1\mu_2 = 0$. Оскільки μ_2 є довільним, то $\alpha_1 = 0$. Отже, одержуємо, що диференціювання g має в базисі $\{a_1, a_2\}$ матрицю

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Позначимо через Ξ канонічний мономорфізм $\mathbf{End}_{[\cdot]}(L)$ в $\mathbf{M}_2(F)$ (тобто $\Xi(f)$ є матрицею f у базисі $\{a_1, a_2\}$). Згідно з доведеним вище отримуємо, що $\Xi(\mathbf{Der}_{[\cdot]}(L))$ є підмножиною $\mathbf{M}_2(F)$, що складається з матриць, які мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in F.$$

Використовуючи цей ізоморфізм, приходимо до висновку, що $\mathbf{Der}_{[\cdot]}(L)$ є абелевою і має розмірність 1.

Твердження доведено.

3. Алгебра диференціювань деяких алгебр Лейбніца, що мають розмірність 3. Перейдемо до розгляду алгебри диференціювань алгебр Лейбніца, що має розмірність 3. Звичайно, будемо розглядати лише алгебри Лейбніца, які не є алгебрами Лі. Це означає, що їх ядро Лейбніца не дорівнює нулю. Першим типом алгебр Лейбніца, які ми розглянемо, є нільпотентні алгебри Лейбніца, а першим типом нільпотентних алгебр Лейбніца є нільпотентні алгебри Лейбніца класу нільпотентності 3. Існує лише один тип таких алгебр — алгебра $\mathbf{Lei}_1(3, F)$:

$$\mathbf{Lei}_1(3, F) = Fa_1 \oplus Fa_2 \oplus Fa_3,$$

де

$$\begin{aligned} [a_1, a_1] &= a_2, & [a_1, a_2] &= a_3, & [a_1, a_3] &= 0, \\ [a_2, a_1] &= [a_3, a_1] = [a_2, a_2] = [a_2, a_3] = [a_3, a_3] &= 0. \end{aligned}$$

Це циклічна алгебра Лейбніца

$$\begin{aligned} \mathbf{Leib}(\mathbf{Lei}_1(3, F)) &= \zeta^{\text{left}}(\mathbf{Lei}_1(3, F)) = [\mathbf{Lei}_1(3, F), \mathbf{Lei}_1(3, F)] = Fa_2 \oplus Fa_3, \\ \zeta^{\text{right}}(\mathbf{Lei}_1(3, F)) &= \zeta(\mathbf{Lei}_1(3, F)) = \gamma_3(\mathbf{Lei}_1(3, F)) = Fa_3. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. Нехай \mathbf{D} — алгебра диференціювань алгебри Лейбніца $\mathbf{Lei}_1(3, F)$. Тоді \mathbf{D} є напівпрямою сумою ідеалу \mathbf{N} розмірності 1 і підалгебри розмірності 1, яка породжена диференціюванням f_1 таким, що $f_1(a_1) = a_1$, $f_1(a_2) = 2a_2$, $f_1(a_3) = 3a_3$. Навіть більше, ідеал \mathbf{N} абелевий, $\mathbf{N} = Ff_2 \oplus Ff_3$, де $f_2(a_1) = a_2$, $f_2(a_2) = a_3$, $f_2(a_3) = 0$, $f_3(a_1) = a_3$, $f_3(a_2) = 0$, $f_3(a_3) = 0$. Алгебра \mathbf{D} ізоморфна підалгебрі Лі матриць, що має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 3\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \text{де } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F.$$

Доведення. Нехай $L = \mathbf{Lei}_1(3, F)$ і $f \in \mathbf{Der}_{[1]}(L)$. Маємо $f(a_1) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$, тоді

$$\begin{aligned} f(a_2) &= f([a_1, a_1]) = [f(a_1), a_1] + [a_1, f(a_1)] \\ &= [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, a_1] + [a_1, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3] \\ &= \alpha_1 [a_1, a_1] + \alpha_1 [a_1, a_1] + \alpha_2 [a_1, a_2] + \alpha_3 [a_1, a_3] = 2\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_3, \\ f(a_3) &= f([a_1, a_2]) = [f(a_1), a_2] + [a_1, f(a_2)] \\ &= [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, a_2] + [a_1, 2\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_3] \\ &= [\alpha_1 a_1, a_2] + [a_1, 2\alpha_1 a_2] + [a_1, \alpha_2 a_3] \\ &= \alpha_1 [a_1, a_2] + 2\alpha_1 [a_1, a_2] = 3\alpha_1 a_3. \end{aligned}$$

Таким чином, диференціювання f має в базисі $\{a_1, a_2, a_3\}$ матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 3\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $\mathbf{N} = \{f \mid f \in \mathbf{Der}_{[\cdot]}(L) \text{ і } f(a_1) \in Fa_2 \oplus Fa_3 = [L, L]\}$. Згідно з лемою 2.2 $f([L, L]) \leq [L, L]$ для кожного диференціювання f алгебри L . Тому неважко бачити, що \mathbf{N} є підалгеброю $\mathbf{Der}_{[\cdot]}(L)$. І навіть більше, \mathbf{N} є ідеалом $\mathbf{Der}_{[\cdot]}(L)$. Справді, нехай $f \in \mathbf{N}$, $g \in \mathbf{Der}_{[\cdot]}(L)$. Тоді

$$[g, f](a_1) = (g \circ f - f \circ g)(a_1) = (g \circ f)(a_1) - (f \circ g)(a_1) = g(f(a_1)) - (f(g(a_1))).$$

Маємо $g(a_1) = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$, тоді

$$f(g(a_1)) = f(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3) = \beta_1 f(a_1) + f(\beta_2 a_2 + \beta_3 a_3).$$

Лема 2.2 означає, що $f(\beta_2 a_2 + \beta_3 a_3) \in [L, L]$. Також $f \in \mathbf{N}$, $f(a_1) \in [L, L]$, і ми отримуємо, що $f(g(a_1)) \in [L, L]$. Лема 2.2 і той факт, що $f(a_1) \in [L, L]$, означають, що $g(f(a_1)) \in [L, L]$. Отже, $[g, f](a_1) \in [L, L]$. Це означає, що \mathbf{N} є ідеалом \mathbf{D} .

Позначимо через Ξ канонічний мноморфізм $\mathbf{End}_{[\cdot]}(L)$ в $\mathbf{M}_3(F)$ (тобто $\Xi(f)$ є матрицею f в базисі $\{a_1, a_2, a_3\}$). Тоді $\Xi(\mathbf{N})$ є підмножиною $\mathbf{M}_3(F)$, що складається з матриць, які мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначимо лінійне перетворення f_3 алгебри L за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $f_3(x) = \xi_1 a_3$.

Нехай x, y — довільні елементи L , $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$\begin{aligned} [x, y] &= [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] \\ &= \xi_1 \eta_1 [a_1, a_1] + \xi_1 \eta_2 [a_1, a_2] + \xi_1 \eta_3 [a_1, a_3] = \xi_1 \eta_2 a_3 + \xi_1 \eta_3 a_3, \\ [f_3(x), y] &= [\xi_1 a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] = 0, \\ [x, f_3(y)] &= [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_3] = 0, \\ f_3([x, y]) &= f_3(\xi_1 \eta_2 a_3 + \xi_1 \eta_3 a_3) = 0. \end{aligned}$$

Зокрема, $f_3([x, y]) = [f_3(x), y] + [x, f_3(y)]$, так що f_3 є диференціюванням алгебри L . Згідно з означенням $f_3 \in \mathbf{N}$.

Визначимо лінійне перетворення f_2 алгебри L за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $f_2(x) = \xi_1 a_2 + \xi_2 a_3$.

Нехай x, y — довільні елементи L , $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$\begin{aligned} [x, y] &= \xi_1 \eta_1 a_2 + \xi_1 \eta_2 a_3, \\ [f_2(x), y] &= [\xi_1 a_2 + \xi_2 a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] = 0, \\ [x, f_2(y)] &= [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_2 + \eta_2 a_3] = [\xi_1 a_1, \eta_1 a_2 + \eta_2 a_3] = \xi_1 \eta_1 a_3, \end{aligned}$$

$$f_2([x, y]) = f_2(\xi_1\eta_1a_2 + \xi_1\eta_2a_3) = \xi_1\eta_1f_2(a_2) + \xi_1\eta_2f_2(a_3) = \xi_1\eta_1a_3.$$

Зокрема, $f_2([x, y]) = [f_2(x), y] + [x, f_2(y)]$, так що f_2 є диференціюванням алгебри L . Згідно з означенням $f_2 \in \mathbf{N}$. Крім того, ми бачимо, що диференціювання f_2, f_3 є лінійно незалежними. За допомогою мономорфізму Ξ ми також бачимо, що \mathbf{N} має розмірність 2. Отже, $\mathbf{N} = \langle f_2, f_3 \rangle$. Навіть більше,

$$(f_2 \circ f_3)(x) = f_2(f_3(x)) = f_2(\xi_1a_3) = 0,$$

$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_3(f_2(x)) = f_3(\xi_1a_2 + \xi_2a_3) = 0.$$

Звідси випливає, що ідеал \mathbf{N} є абелевим.

Нарешті, визначимо лінійне перетворення f_1 алгебри L за правилом: якщо $x = \xi_1a_1 + \xi_2a_2 + \xi_3a_3$, то $f_1(x) = \xi_1a_1 + 2\xi_2a_2 + 3\xi_3a_3$.

Нехай x, y – довільні елементи L , $x = \xi_1a_1 + \xi_2a_2 + \xi_3a_3$, $y = \eta_1a_1 + \eta_2a_2 + \eta_3a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$[x, y] = \xi_1\eta_1a_2 + \xi_1\eta_2a_3,$$

$$[f_1(x), y] = [\xi_1a_1 + 2\xi_2a_2 + 3\xi_3a_3, \eta_1a_1 + \eta_2a_2 + \eta_3a_3] = [\xi_1a_1, \eta_1a_1 + \eta_2a_2 + \eta_3a_3]$$

$$= \xi_1\eta_1[a_1, a_1] + \xi_1\eta_2[a_1, a_2] + \xi_1\eta_3[a_1, a_3] = \xi_1\eta_1a_2 + \xi_1\eta_2a_3,$$

$$[x, f_1(y)] = [\xi_1a_1 + \xi_2a_2 + \xi_3a_3, \eta_1a_1 + 2\eta_2a_2 + 3\eta_3a_3] = [\xi_1a_1, \eta_1a_1 + 2\eta_2a_2 + 3\eta_3a_3]$$

$$= \xi_1\eta_1[a_1, a_1] + 2\xi_1\eta_2[a_1, a_2] + 3\xi_1\eta_3[a_1, a_3] = \xi_1\eta_1a_2 + 2\xi_1\eta_2a_3,$$

$$f_1([x, y]) = f_1(\xi_1\eta_1a_2 + \xi_1\eta_2a_3) = 2\xi_1\eta_1a_2 + 3\xi_1\eta_2a_3.$$

Таким чином, $f_1([x, y]) = [f_1(x), y] + [x, f_1(y)]$, так що f_1 є диференціюванням алгебри L . Згідно з означенням $f_1 \notin \mathbf{N}$. За допомогою мономорфізму Ξ ми бачимо, що \mathbf{D}/\mathbf{N} має розмірність 1. Отже, $\mathbf{D} = \mathbf{N} \oplus Ff_1$.

Нехай тепер L є нільпотентною алгеброю Лейбніца, клас нільпотентності якої дорівнює 2. Звичайно, ми припускаємо, що L не є алгеброю Лі. Далі, центр $\zeta(L)$ має розмірність 2 або 1. Припустимо, що $\dim_F(\zeta(L)) = 2$. Оскільки L не є алгеброю Лі, існує такий елемент a_1 , що $[a_1, a_1] = a_3 \neq 0$. Оскільки алгебра Лейбніца розмірності 1 є абелевою, $a_3 \in \zeta(L)$. Отримуємо $[a_1, a_3] = [a_3, a_1] = [a_3, a_3] = 0$. Оскільки $\zeta(L)$ є абелевою алгеброю розмірності 2, її можна зобразити у вигляді $\zeta(L) = Fa_2 \oplus Fa_3$ для деякого елемента a_3 . Отже, приходимо до такого типу нільпотентної алгебри Лейбніца:

$$\mathbf{Lei}_2(3, F) = Fa_1 \oplus Fa_2 \oplus Fa_3,$$

де

$$[a_1, a_1] = a_2, \quad [a_1, a_2] = [a_2, a_1] = [a_2, a_2] = [a_3, a_3] = 0,$$

$$[a_3, a_1] = [a_3, a_2] = [a_2, a_3] = [a_1, a_3] = 0.$$

Іншими словами, $\mathbf{Lei}_2(3, F)$ є прямою сумою двох ідеалів $A = Fa_1 \oplus Fa_2$ та $B = Fa_3$, і навіть більше, A є нільпотентною циклічною алгеброю Лейбніца розмірності 2,

$$\mathbf{Leib}(\mathbf{Lei}_2(3, F)) = [\mathbf{Lei}_2(3, F), \mathbf{Lei}_2(3, F)] = Fa_2,$$

$$\zeta^{\text{left}}(\mathbf{Lei}_2(3, F)) = \zeta^{\text{right}}(\mathbf{Lei}_2(3, F)) = \zeta(\mathbf{Lei}_2(3, F)) = Fa_2 \oplus Fa_3.$$

Теорему доведено.

Теорема 3.2. Нехай \mathbf{D} – алгебра диференціювань алгебри Лейбніца $\mathbf{Lei}_2(3, F)$. Тоді \mathbf{D} має серію ідеалів $\langle 0 \rangle \leq \mathbf{N} \leq \mathbf{C} \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{D}$ таких, що ідеал \mathbf{N} є абелевим, $\mathbf{N} = Ff_3 \oplus Ff_4$, $\mathbf{C} = \mathbf{N} \oplus Ff_2$, $\mathbf{A} = \mathbf{C} \oplus Ff_1$, $\mathbf{D} = \mathbf{A} \oplus Ff_0$, де f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 – диференціювання, визначені за правилами

$$\begin{aligned} f_0(a_1) &= a_1, & f_0(a_2) &= 2a_2, & f_0(a_3) &= 0, \\ f_1(a_1) &= 0, & f_1(a_2) &= 0, & f_1(a_3) &= a_3, \\ f_2(a_1) &= a_3, & f_2(a_2) &= 0, & f_2(a_3) &= 0, \\ f_3(a_1) &= a_2, & f_3(a_2) &= 0, & f_3(a_3) &= 0, \\ f_4(a_1) &= 0, & f_4(a_2) &= 0, & f_4(a_3) &= a_2. \end{aligned}$$

Навіть більше,

$$\begin{aligned} f_3 \circ f_4 &= f_4 \circ f_3, & f_3 \circ f_2 &= f_2 \circ f_3, \\ [f_4, f_2] &= f_3, & [f_1, f_2] &= f_2, & f_3 \circ f_1 &= f_1 \circ f_3, \\ [f_4, f_1] &= f_4, & f_0 \circ f_1 &= f_1 \circ f_0, \\ [f_2, f_0] &= f_2, & [f_0, f_3] &= f_3, & [f_0, f_4] &= 2f_4. \end{aligned}$$

Доведення. Нехай $L = \mathbf{Lei}_2(3, F)$ і $f \in \mathbf{Der}_{[\cdot]}(L)$. Згідно з лемою 2.2 $f(Fa_2) = Fa_2$, $f(Fa_2 \oplus Fa_3) \leq Fa_2 \oplus Fa_3$, так що $f(a_1) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$, $f(a_3) = \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$. Тоді

$$\begin{aligned} f(a_2) &= f([a_1, a_1]) = [f(a_1), a_1] + [a_1, f(a_1)] \\ &= [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, a_1] + [a_1, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3] \\ &= \alpha_1 [a_1, a_1] + \alpha_1 [a_1, a_1] + \alpha_2 [a_1, a_2] + \alpha_3 [a_1, a_3] = 2\alpha_1 a_2. \end{aligned}$$

Таким чином, диференціювання f має в базисі $\{a_1, a_2, a_3\}$ матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $\mathbf{N} = \{f \mid f \in \mathbf{Der}_{[\cdot]}(L) \text{ і } f(a_1), f(a_3) \in Fa_2 = [L, L]\}$. Згідно з лемою 2.2 $f([L, L]) \leq [L, L]$ для кожного диференціювання f алгебри L . Тому неважко бачити, що \mathbf{N} є підалгеброю $\mathbf{Der}_{[\cdot]}(L)$. І навіть більше, \mathbf{N} є ідеалом $\mathbf{Der}_{[\cdot]}(L)$. Справді, нехай $f \in \mathbf{N}$, $g \in \mathbf{Der}_{[\cdot]}(L)$. Тоді

$$[g, f](a_1) = (g \circ f - f \circ g)(a_1) = (g \circ f)(a_1) - (f \circ g)(a_1) = g(f(a_1)) - (f(g(a_1))).$$

Маємо $g(a_1) = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$, тоді

$$f(g(a_1)) = f(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3) = \beta_1 f(a_1) + \beta_2 f(a_2) + \beta_3 f(a_3).$$

Лема 2.2 означає, що $f(\beta_2 a_2) \in [L, L]$. Також $f \in \mathbf{N}$, $f(a_1), f(a_3) \in [L, L]$, тому ми отримуємо, що $f(g(a_1)) \in [L, L]$. Лема 2.2 і той факт, що $f(a_1), f(a_3) \in [L, L]$, означають, що $g(f(a_1)) \in [L, L]$. Отже, $[g, f](a_1) \in [L, L]$. З тих же міркувань $[g, f](a_3) \in [L, L]$. Це означає, що \mathbf{N} є ідеалом \mathbf{D} .

Позначимо через Ξ канонічний мономорфізм $\mathbf{End}_{[,]}(L)$ в $\mathbf{M}_3(F)$. Тоді $\Xi(N)$ є підмножиною $\mathbf{M}_3(F)$, що складається з матриць, які мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначимо лінійне перетворення f_3 алгебри L за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $f_3(x) = \xi_1 a_2$.

Нехай x, y — довільні елементи L , $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$\begin{aligned} [x, y] &= [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] \\ &= \xi_1 \eta_1 [a_1, a_1] + \xi_1 \eta_2 [a_1, a_2] + \xi_1 \eta_3 [a_1, a_3] = \xi_1 \eta_1 a_2, \\ [f_3(x), y] &= [\xi_1 a_2, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] = 0, \\ [x, f_3(y)] &= [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_2] = 0, \\ f_3([x, y]) &= f_3(\xi_1 \eta_1 a_2) = 0. \end{aligned}$$

Зокрема, $f_3([x, y]) = [f_3(x), y] + [x, f_3(y)]$, так що f_3 є диференціюванням алгебри L . Згідно з означенням $f_3 \in \mathbf{N}$.

Визначимо лінійне перетворення f_4 алгебри L за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $f_4(x) = \xi_3 a_2$.

Нехай x, y — довільні елементи L , $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$\begin{aligned} [x, y] &= \xi_1 \eta_1 a_2, \\ [f_4(x), y] &= [\xi_3 a_2, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] = 0, \\ [x, f_4(y)] &= [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_3 a_2] = 0, \\ f_4([x, y]) &= f_4(\xi_1 \eta_1 a_2) = 0. \end{aligned}$$

Зокрема, $f_4([x, y]) = [f_4(x), y] + [x, f_4(y)]$, так що f_4 є диференціюванням алгебри L . Згідно з означенням $f_4 \in \mathbf{N}$.

Крім того, бачимо, що диференціювання f_3, f_4 є лінійно незалежними, тому підалгебра $\langle f_2, f_3 \rangle$ має розмірність 2. Використавши мономорфізм Ξ , ми можемо побачити, що \mathbf{N} має

розмірність 2. Отже, $\mathbf{N} = \langle f_2, f_3 \rangle$. Навіть більше,

$$(f_3 \circ f_4)(x) = f_3(f_4(x)) = f_3(\xi_3 a_2) = 0,$$

$$(f_4 \circ f_3)(x) = f_4(f_3(x)) = f_4(\xi_1 a_2) = 0.$$

Звідси випливає, що ідеал \mathbf{N} є абелевим.

Згідно з лемою 2.1 $f(\zeta(L)) \leq \zeta(L)$ для кожного диференціювання f алгебри L . Покладемо

$$A = \{f \mid f \in (L) \text{ та } f(a_1) \in \zeta(L) = Fa_2 \oplus Fa_3\}.$$

Неважко побачити, що \mathbf{A} є підалгеброю $\mathbf{Der}_{[\cdot]}(L)$. Використовуючи наведені вище аргументи, можна показати, що A є ідеалом $\mathbf{Der}_{[\cdot]}(L)$. Згідно з означенням $\mathbf{N} \leq \mathbf{A}$. Також можна побачити, що $\Xi(\mathbf{N})$ є підмножиною $\mathbf{M}_3(F)$, що складається з матриць, які мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ \alpha_3 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Далі, покладемо

$$\begin{aligned} C &= \{f \mid f \in \mathbf{Der}_{[\cdot]}(L) \text{ та } f(a_1) \in \zeta(L) \\ &= Fa_2 \oplus Fa_3, f(a_3) \in Fa_2 = [L, L]\} \\ &= \{f \mid f \in A \text{ та } f(a_3) \in Fa_2 = [L, L]\}. \end{aligned}$$

Згідно з лемою 2.2 $f([L, L]) \leq [L, L]$ для кожного диференціювання f алгебри L . Використовуючи цей факт, ми можемо переконатися, що \mathbf{C} є підалгеброю \mathbf{A} . Також можна побачити, що $\Xi(\mathbf{C})$ є підмножиною $\mathbf{M}_3(F)$, що складається з матриць, які мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \mu_2 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} UV &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \mu_2 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 \lambda_1 + 2\alpha_1 \lambda_2 + \beta_2 \lambda_3 & 0 & 2\alpha_1 \mu_2 \\ \alpha_3 \lambda_1 + \beta_3 \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ VU &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \mu_2 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_3 & 0 & \mu_2 \beta_3 \\ \lambda_3 \alpha_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким чином, ми можемо побачити, що $[U, V] \in \Xi(\mathbf{C})$. Матимемо, що $\Xi(\mathbf{C})$ є ідеалом алгебри Лі $\Xi(\mathbf{D})$. Отже, \mathbf{C} є ідеалом \mathbf{D} .

Визначимо лінійне перетворення f_2 алгебри L за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $f_2(x) = \xi_1 a_3$.

Нехай x, y – довільні елементи L , $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$\begin{aligned} [x, y] &= \xi_1 \eta_1 a_2, \\ [f_2(x), y] &= [\xi_1 a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] = 0, \\ [x, f_2(y)] &= [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_3] = 0, \\ f_2([x, y]) &= f_2(\xi_1 \eta_1 a_2) = 0. \end{aligned}$$

Зокрема, $f_2([x, y]) = [f_2(x), y] + [x, f_2(y)]$, так що f_2 є диференціюванням L . Згідно з означенням $f_2 \in \mathbf{C}$, але $f_2 \notin \mathbf{N}$. Використовуючи мономорфізм Ξ , отримуємо, що фактор \mathbf{C}/\mathbf{N} має розмірність 1. Отже, \mathbf{C} є напівпрямою сумою \mathbf{N} та Ff_2 . Навіть більше,

$$\begin{aligned} \Xi(f_2)\Xi(f_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Xi(f_3)\Xi(f_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матимемо, що $f_3 \circ f_2 = f_2 \circ f_3$. Далі,

$$\begin{aligned} \Xi(f_2)\Xi(f_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Xi(f_4)\Xi(f_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Xi(f_3). \end{aligned}$$

Таким чином, $[f_4, f_2] = f_3$.

Визначимо лінійне перетворення f_1 алгебри L за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $f_1(x) = \xi_3 a_3$.

Нехай x, y – довільні елементи L , $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$\begin{aligned} [x, y] &= \xi_1 \eta_1 a_2, \\ [f_1(x), y] &= [\xi_3 a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] = 0, \end{aligned}$$

$$[x, f_1(y)] = [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_3 a_3] = 0,$$

$$f_1([x, y]) = f_1(\xi_1 \eta_1 a_2) = 0.$$

Зокрема, $f_1([x, y]) = [f_1(x), y] + [x, f_1(y)]$, так що f_1 є диференціюванням алгебри L . Згідно з означенням $f_1 \in \mathbf{A}$, але $f_1 \notin \mathbf{C}$. Використовуючи мономорфізм Ξ , отримуємо, що фактор \mathbf{A}/\mathbf{C} має розмірність 1. Отже, \mathbf{A} є наівпрямую сумою \mathbf{C} та Ff_1 . І навіть більше,

$$\Xi(f_1)\Xi(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Xi(f_2),$$

$$\Xi(f_2)\Xi(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Таким чином, $[f_1, f_2] = f_2$. Маємо

$$\Xi(f_1)\Xi(f_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi(f_3)\Xi(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $f_3 \circ f_1 = f_1 \circ f_3$. Далі,

$$\Xi(f_1)\Xi(f_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi(f_4)\Xi(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Xi(f_4).$$

Таким чином, $[f_4, f_1] = f_4$.

Визначимо лінійне перетворення f_0 алгебри L за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $f_0(x) = \xi_1 a_1 + 2\xi_2 a_2$.

Нехай x, y – довільні елементи L , $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$[x, y] = \xi_1 \eta_1 a_2,$$

$$[f_0(x), y] = [\xi_1 a_1 + 2\xi_2 a_2, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] = [\xi_1 a_1, \eta_1 a_1] = \xi_1 \eta_1 a_2,$$

$$[x, f_0(y)] = [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_1 + 2\eta_2 a_2] = [\xi_1 a_1, \eta_1 a_1] = \xi_1 \eta_1 a_2,$$

$$f_0([x, y]) = f_0(\xi_1 \eta_1 a_2) = 2\xi_1 \eta_1 a_2.$$

Зокрема, $f_0([x, y]) = [f_0(x), y] + [x, f_0(y)]$, так що f_0 є диференціюванням алгебри L . Згідно з означенням $f_0 \notin \mathbf{A}$. Використовуючи мономорфізм Ξ , отримуємо, що фактор \mathbf{D}/\mathbf{A} має розмірність 1. Отже, \mathbf{D} є напівпрямою сумою \mathbf{A} та Ff_1 . І навіть більше,

$$\Xi(f_0)\Xi(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi(f_1)\Xi(f_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $f_0 \circ f_1 = f_1 \circ f_0$. Далі,

$$\Xi(f_0)\Xi(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi(f_2)\Xi(f_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Xi(f_2).$$

Таким чином, $[f_2, f_0] = f_2$. Маємо

$$\Xi(f_0)\Xi(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\Xi(f_3),$$

$$\Xi(f_3)\Xi(f_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Xi(f_3).$$

Отже, $[f_0, f_3] = f_3$. Далі,

$$\Xi(f_0)\Xi(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\Xi(f_4),$$

$$\Xi(f_3)\Xi(f_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $[f_0, f_4] = 2f_4$.

Теорему доведено.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Автори заявляють, що під час підготовки цього рукопису не було отримано коштів, грантів чи іншої підтримки.

Авторські внески. Усі автори внесли рівний внесок у роботу.

Література

1. Sh. Ayupov, B. Omirov, I. Rakhimov, *Leibniz algebras: structure and classification*, CRC Press, Taylor and Francis Group (2020).
2. A. Blokh, *On a generalization of the concept of Lie algebra* (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, **165**, № 3, 471–473 (1965).
3. J. M. Casas, M. A. Insua, M. Ladra, S. Ladra, *An algorithm for the classification of 3-dimensional complex Leibniz algebras*, Linear Algebra and Appl., **436**, № 9, 3747–3756 (2012); DOI:10.1016/j.laa.2011.11.039.
4. C. Cuvier, *Algèbres de Leibnitz: définitions, propriétés*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), **27**, № 1, 1–45 (1994); DOI:10.24033/asens.1687.
5. I. Demir, K. C. Misra, E. Stitzinger, *On some structures of Leibniz algebras*, Recent Advances in Representation Theory, Quantum Groups, Algebraic Geometry, and Related Topics, Contemp. Math., **623**, 41–54 (2014); DOI:10.1090/conm/623/12456.
6. A. Kh. Khudoyberdiyev, T. K. Kurbanbaev, B. A. Omirov, *Classification of three-dimensional solvable p -adic Leibniz algebras*, p -Adic Numbers Ultrametric Anal. and Appl., **2**, № 3, 207–221 (2010); DOI:10.1134/S2070046610030039.
7. L. A. Kurdachenko, J. Otał, A. A. Пупка, *Relationships between the factors of the canonical central series of Leibniz algebras*, Eur. J. Math., **2**, № 2, 565–577 (2016); DOI:10.1007/s40879-016-0093-5.
8. L. A. Kurdachenko., I. Ya. Subbotin, V. S. Yashchuk, *On the endomorphisms and derivations of some Leibniz algebras*, J. Algebra and Appl. (2022); DOI:10.1142/S0219498824500026.
9. L. A. Kurdachenko, M. M. Semko, V. S. Yashchuk, *On the structure of the algebra of cyclic Leibniz algebras*, Algebra and Discrete Math., **32**, № 2, 241–252 (2021); DOI: <http://dx.doi.org/10.12958/adm1898>.
10. M. Ladra, I. M. Rikhsiboev, R. M. Turdibaev, *Automorphisms and derivations of Leibniz algebras*, Ukr. Math. J., **68**, № 7, 1062–1076 (2016); DOI:10.1007/s11253-016-1277-3.
11. J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren Math. Wiss., **301**, Springer-Verlag (1992); DOI:10.1007/978-3-662-11389-9.
12. J.-L. Loday, *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*, Enseign. Math., **39**, 269–293 (1993).
13. J.-L. Loday, T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann., **296**, № 1, 139–158 (1993); DOI:10.1007/BF01445099.
14. M. M. Semko, L. V. Skaskiv, O. A. Yarovaya, *On the derivations of cyclic Leibniz algebras*, Carpathian Math. Publ., **14**, № 2, 345–353 (2021); DOI:10.15330/cmp.14.2.346-353.
15. I. S. Rakhimov, I. M. Rikhsiboev, M. A. Mohammed, *An algorithm for classifications of three-dimensional Leibniz algebras over arbitrary fields*, JP J. Algebra, Number Theory and Appl., **40**, № 2, 181–198 (2018); DOI:10.17654/NT040020181.
16. I. M. Rikhsiboev, I. S. Rakhimov, *Classification of three dimensional complex Leibniz algebras*, AIP Conf. Proc., **1450**, № 1, 358–362 (2012); DOI:10.1063/1.4724168.
17. V. S. Yashchuk, *On some Leibniz algebras, having small dimension*, Algebra and Discrete Math., **27**, № 2, 292–308 (2019).

Одержано 27.04.23