DOI: 10.3842/umzh.v76i6.7868

УДК 512.554

Леонід Курдаченко, Олександр Пипка[1] (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара),
Микола Семко (Державний податковий університет, Ірпінь Київської обл.)

ПРО БУДОВУ ГРУП АВТОМОРФІЗМІВ ДЕЯКИХ АЛГЕБР ЛЕЙБНІЦА МАЛОЇ ВИМІРНОСТІ

Let L be an algebra over a field F with binary operations $+$ and $[,]$. L is called a left Leibniz algebra if it satisfies the left Leibniz identity: $[[a,b],c] = [a,[b,c]] - [b,[a,c]]$ for all elements $a,b,c \in L$. We study he structure of the group of automorphisms of 3-dimensional Leibniz algebras with nilpotency class 2 and a one-dimensional center.

Нехай L — алгебра над полем F з бінарними операціями $+$ та $[,]$. L називатимемо лівою алгеброю Лейбніца, якщо вона задовольняє ліву тотожність Лейбніца: $[[a,b],c] = [a,[b,c]] - [b,[a,c]]$ для всіх елементів $a,b,c \in L$. Досліджено будову групи автоморфізмів 3-вимірних алгебр Лейбніца, які мають клас нільпотентності 2 та центр розмірності 1.

1. Вступ. Нехай L — алгебра над полем F, на якій визначено дві бінарні операції $+$ та $[,]$. Тоді L називають (*лівою*) *алгеброю Лейбніца*, якщо вона задовольняє так звану (*ліву*) *тотожність Лейбніца*:

$$[[a,b],c] = [a,[b,c]] - [b,[a,c]]$$

для всіх елементів $a,b,c \in L$.

Алгебри Лейбніца вперше з'явились у статті А. Блоха [3], хоча термін „алгебра Лейбніца” вперше було використано значно пізніше у монографії Ж.-Л. Лоде [12] та його статті [13]. У роботі [14] було розпочато вивчення властивостей алгебр Лейбніца. Теорія алгебр Лейбніца розвивається дуже інтенсивно в різних напрямках досліджень, хоча й подекуди досить спорадично. Деякі сучасні результати цієї теорії можна знайти в монографії [2]. Варто зазначити, що алгебри Лейбніца є досить широким узагальненням алгебр Лі. З іншого боку, якщо L — алгебра Лейбніца та $[a,a] = 0$ для кожного елемента $a \in L$, то вона є алгеброю Лі. Таким чином, алгебри Лі можна охарактеризувати як антикомутативні алгебри Лейбніца.

Нехай L — алгебра Лейбніца. Лінійне перетворення f алгебри L називають *ендоморфізмом*, якщо

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

для всіх $a,b \in L$. Зауважимо, що добуток двох ендоморфізмів алгебри L також є ендоморфізмом. Тому множина всіх ендоморфізмів алгебри L є напівгрупою щодо операції множення. Водночас сума двох ендоморфізмів вже не обов'язково є ендоморфізмом. Отже, не можна говорити про кільце ендоморфізмів.

Бієктивний ендоморфізм алгебри Лейбніца L називатимемо *автоморфізмом* алгебри L. Легко довести, що множина $\mathrm{Aut}_{[,]}(L)$ усіх автоморфізмів алгебри L є групою щодо операції множення.

[1] Відповідальний за листування, e-mail: sasha.pypka@gmail.com.

Як і для інших алгебраїчних структур, з'ясування будови груп автоморфізмів алгебр Лейбніца є однією з важливих та природних задач цієї теорії. Варто зазначити, що цьому питанню до недавнього часу приділялось досить мало уваги. Серед робіт, які присвячені цій проблемі, можна виокремити [1, 11].

Логічно було розпочати дослідження груп автоморфізмів тих алгебр Лейбніца, будова яких добре вивчена. Опис будови груп автоморфізмів нескінченновимірних циклічних алгебр Лейбніца отримано у статті [10], а скінченновимірних циклічних — у роботі [8]. Природно виникає питання про будову груп автоморфізмів алгебр Лейбніца, які мають малу розмірність. Випадок двовимірних алгебр Лейбніца досить нескладний, а групи автоморфізмів таких алгебр описано в роботі [9]. З розмірністю 3, на відміну від алгебр Лі, ситуація стає значно складнішою та різноманітнішою. Найбільш детальний опис тривимірних алгебр Лейбніца можна знайти в роботі [7]. Через велику кількість типів тривимірних алгебр Лейбніца дослідження будови їх груп автоморфізмів є дуже об'ємним і потребує поступового підходу. Перший крок було зроблено в статті [9], де отримано опис груп автоморфізмів нільпотентних алгебр Лейбніца, які мають клас нільпотентності 3, а також нільпотентних алгебр Лейбніца, які мають клас нільпотентності 2 та центр розмірності 2. У роботі [6] розпочато дослідження будови груп автоморфізмів нільпотентних алгебр Лейбніца, які мають клас нільпотентності 2 та центр розмірності 1. Цю статтю присвячено продовженню дослідження груп автоморфізмів таких алгебр Лейбніца.

2. Попередні відомості про алгебри Лейбніца. Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Алгебру L називатимемо *абелевою*, якщо $[a,b]=0$ для всіх елементів $a,b\in L$. Беручи до уваги попередні зауваження, можна зазначити, що абелева алгебра Лейбніца є алгеброю Лі.

Нехай A,B — підпростори алгебри L. Позначимо через $[A,B]$ підпростір, породжений усіма елементами $[a,b]$, де $a\in A,\ b\in B$. Підпростір A з L називатимемо *підалгеброю* алгебри L, якщо $[a,b]\in A$ для всіх $a,b\in A$, тобто якщо $[A,A]\leq A$. Підалгебру A з L називатимемо *лівим* (відповідно *правим*) *ідеалом* алгебри L, якщо $[b,a]\in A$ (відповідно $[a,b]\in A$) для всіх $a\in A,\ b\in L$, тобто якщо $[L,A]\leq A$ (відповідно $[A,L]\leq A$). Підалгебру A з L називатимемо *ідеалом* алгебри L, якщо A є правим та лівим ідеалом L.

Позначимо через $\mathrm{Leib}(L)$ підпростір, породжений елементами $[a,a],\ a\in L$. Легко переконатися, що $\mathrm{Leib}(L)$ — ідеал алгебри L, який називають *ядром Лейбніца* алгебри L.

Лівий центр $\zeta^{\mathrm{left}}(L)$ алгебри L визначимо за правилом

$$\zeta^{\mathrm{left}}(L)=\{a\in L|\ [a,b]=0 \text{ для кожного } b\in L\},$$

а правий центр $\zeta^{\mathrm{right}}(L)$ алгебри L — за правилом

$$\zeta^{\mathrm{right}}(L)=\{a\in L|\ [b,a]=0 \text{ для кожного } b\in L\}.$$

Можна довести, що лівий центр алгебри L є її ідеалом. Проте цього не можна сказати про правий центр, який є лише підалгеброю в L. Цікаво те, що у загальному випадку лівий та правий центри різні. Навіть більше, вони можуть мати різні вимірності (див., наприклад, [5]).

Центр $\zeta(L)$ алгебри L визначають як перетин лівого та правого центрів:

$$\zeta(L)=\{a\in L|\ [a,b]=0=[b,a] \text{ для кожного } b\in L\}.$$

Очевидно, що центр $\zeta(L)$ є ідеалом алгебри L.

Визначимо *верхній центральний ряд*

$$\langle 0\rangle = \zeta_0(L) \le \zeta_1(L) \le \ldots \zeta_\alpha(L) \le \zeta_{\alpha+1}(L) \le \ldots \zeta_\eta(L) = \zeta_\infty(L)$$

алгебри Лейбніца L за таким правилом: $\zeta_1(L) = \zeta(L)$ — центр алгебри L,

$$\zeta_{\alpha+1}(L)/\zeta_\alpha(L) = \zeta(L/\zeta_\alpha(L))$$

для всіх порядкових чисел α і $\zeta_\lambda(L) = \bigcup_{\mu<\lambda} \zeta_\mu(L)$ для всіх граничних порядкових чисел λ. Останній член $\zeta_\eta(L) = \zeta_\infty(L)$ цього ряду називають *верхнім гіперцентром* алгебри L.

Тепер визначимо *нижній центральний ряд*

$$L = \gamma_1(L) \ge \gamma_2(L) \ge \ldots \gamma_\alpha(L) \ge \gamma_{\alpha+1} \ge \ldots \gamma_\delta(L) = \gamma_\infty(L)$$

алгебри Лейбніца L за таким правилом: $\gamma_1(L) = L$, $\gamma_2(L) = [L, L]$ — похідна підалгебра алгебри L,

$$\gamma_{\alpha+1}(L) = [L, \gamma_\alpha(L)]$$

для всіх порядкових чисел α і $\gamma_\lambda(L) = \bigcap_{\mu<\lambda} \gamma_\mu(L)$ для всіх граничних порядкових чисел λ. Останній член $\gamma_\delta(L) = \gamma_\infty(L)$ цього ряду називають *нижнім гіпоцентром* алгебри L.

Алгебру Лейбніца L називають *нільпотентною*, якщо існує таке натуральне число k, що $\gamma_k(L) = \langle 0\rangle$. Водночас алгебру L називають *нільпотентною класу нільпотентності* c, якщо $\gamma_{c+1}(L) = \langle 0\rangle$, проте $\gamma_c(L) \ne \langle 0\rangle$.

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, M — непорожня підмножина з L, H — підалгебра з L. Покладемо

$$\mathrm{Ann}_H^{\mathrm{left}}(M) = \{a \in H |\ [a, M] = \langle 0\rangle\},$$

$$\mathrm{Ann}_H^{\mathrm{right}}(M) = \{a \in H |\ [M, a] = \langle 0\rangle\}.$$

Підмножини $\mathrm{Ann}_H^{\mathrm{left}}(M)$ і $\mathrm{Ann}_H^{\mathrm{right}}(M)$ називають *лівим* і *правим ануляторами* підмножини M у підалгебрі H. Перетин

$$\mathrm{Ann}_H(M) = \mathrm{Ann}_H^{\mathrm{left}}(M) \cap \mathrm{Ann}_H^{\mathrm{right}}(M) = \{a \in H |\ [a, M] = \langle 0\rangle = [M, a]\}$$

називають *анулятором* підмножини M в підалгебрі H. Можна показати, що всі ці підмножини є підалгебрами алгебри L. Навіть більше, якщо M — ідеал з L, то $\mathrm{Ann}_L(M)$ є ідеалом алгебри L (див., наприклад, [4]).

Нехай L — нільпотентна алгебра Лейбніца, яка має клас нільпотентності 2 і центр розмірності 1. Звісно, припустимо, що L не є алгеброю Лі. Тоді існує такий елемент a_1, що $[a_1, a_1] = a_3 \ne 0$. Оскільки фактор-алгебра $L/\zeta(L)$ абелева, то $a_3 \in \zeta(L)$. Це означає, що

$$[a_1, a_3] = [a_3, a_1] = [a_3, a_3] = 0,$$

тобто $\zeta(L) = Fa_3$. Для кожного елемента $x \in L$ маємо

$$[a_1, x], [x, a_1] \in \zeta(L) \le \langle a_1\rangle = Fa_1 \oplus Fa_3.$$

Це означає, що підалгебра $\langle a_1\rangle$ є ідеалом в L. Оскільки $\dim_F(\langle a_1\rangle) = 2$, то $\langle a_1\rangle \ne L$. Нехай b — такий елемент, що $b \notin \langle a_1\rangle$. Тоді $[b, a_1] = \gamma a_3$ для деякого $\gamma \in F$. Якщо $\gamma \ne 0$, то покладемо

$b_1 = \gamma^{-1}b - a_1$. Тоді $[b_1, a_1] = 0$. Вибір елемента b_1 показує, що $b_1 \notin \langle a_1 \rangle$. Звідси випливає, що підалгебра $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(a_1)$ має розмірність 2. У роботі [6] розглянуто випадок, коли $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(a_1)$ є абелевою підалгеброю. Наступним природним кроком є вивчення випадку, коли $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(a_1)$ є неабелевою підалгеброю. У цьому випадку $[x, x] \neq 0$ для кожного елемента $x \in \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(a_1)$, де $x \notin \zeta(L)$. Це означає, що підалгебра $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(a_1)$ — циклічна нільпотентна алгебра розмірності 2. Навіть більше, $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(a_1)$ є ідеалом в L, оскільки

$$[L, L] = \zeta(L) \leq \mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(a_1).$$

Нехай b — елемент, який породжує $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(a_1)$. Оскільки підалгебра $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(a_1)$ неабелева, то $b \notin \zeta(L)$. Маємо $[b, a_1] = 0$ і $[a_1, b] = \gamma a_3$ для деякого $\gamma \in F$. Якщо $\gamma = 0$, то з того факту, що $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(a_1) = \langle b \rangle$, випливає, що $\mathrm{Ann}_L^{\mathrm{left}}(a_1) = \mathrm{Ann}_L(a_1)$, тобто $[\langle a_1 \rangle, \langle b \rangle] = \langle 0 \rangle$. Таким чином, отримуємо такий тип нільпотентних алгебр Лейбніца:

$$\mathrm{Lei}_4(3, F) = Fa_1 \oplus Fa_2 \oplus Fa_3, \text{ де } [a_1, a_1] = a_3,$$

$$[a_2, a_2] = \lambda a_3, \quad 0 \neq \lambda \in F,$$

$$[a_1, a_2] = [a_1, a_3] = [a_2, a_1] = [a_2, a_3] = [a_3, a_1] = [a_3, a_2] = [a_3, a_3] = 0.$$

Іншими словами, $\mathrm{Lei}_4(3, F) = L$ — це сума двох ідеалів $A_1 = Fa_1 \oplus Fa_3$ і $A_2 = Fa_2 \oplus Fa_3$, де A_1, A_2 — нільпотентні циклічні алгебри Лейбніца розмірності 2, $[A_1, A_2] = [A_2, A_1] = \langle 0 \rangle$, $\mathrm{Leib}(L) = [L, L] = \zeta^{\mathrm{left}}(L) = \zeta^{\mathrm{right}}(L) = \zeta(L) = Fa_3$.

Опису будови групи автоморфізмів саме цього типу нільпотентних алгебр Лейбніца і присвячено цю статтю.

3. Опис групи автоморфізмів алгебр Лейбніца типу $\mathbf{Lei_4(3, \boldsymbol{F})}$. Нехай x — довільний елемент з $\mathrm{Lei}_4(3, F)$, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$. Маємо

$$[x, x] = [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3]$$

$$= \xi_1^2 [a_1, a_1] + \xi_2^2 [a_2, a_2] = (\xi_1^2 + \lambda \xi_2^2) a_3.$$

Якщо припустити, що $[x, x] = 0$, то отримаємо алгебри Лейбніца, групи автоморфізмів яких описано в роботах [6, 9]. Тому припустимо, що $[x, x] \neq 0$. Якщо $\xi_1 = 0$ або $\xi_2 = 0$, то $[x, x] \neq 0$. Припустимо, що $\xi_1 \neq 0$ і $\xi_2 \neq 0$. Тоді поліном $X^2 + \lambda$ не має розв'язків у полі F.

Говорять, що поле F є 2-*замкненим*, якщо рівняння $X^2 = a$ має розв'язок в F для кожного елемента $a \neq 0$.

Зауважимо, що кожне локально скінченне (зокрема, скінченне) поле характеристики 2 є 2-замкненим. Отже, алгебра Лейбніца типу $\mathrm{Lei}_4(3, F)$ над 2-замкненим полем F може не існувати.

Алгебру Лейбніца L називають *екстраспеціальною*, якщо $[L, L] = \zeta(L)$ — ідеал розмірності 1. Таким чином, алгебра Лейбніца типу $\mathrm{Lei}_4(3, F)$ є екстраспеціальною.

Наведемо деякі загальні властивості ендоморфізмів, автоморфізмів і груп автоморфізмів алгебр Лейбніца, доведення яких можна знайти в роботі [9].

Лема 3.1. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, f — автоморфізм алгебри L. Тоді* $f(\zeta^{\mathrm{left}}(L)) = \zeta^{\mathrm{left}}(L)$, $f(\zeta^{\mathrm{right}}(L)) = \zeta^{\mathrm{right}}(L)$, $f(\zeta(L)) = \zeta(L)$, $f([L, L]) = [L, L]$.

Лема 3.2. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, f — автоморфізм алгебри L. Тоді $f(\zeta_\alpha(L)) = \zeta_\alpha(L)$, $f(\gamma_\alpha(L)) = \gamma_\alpha(L)$ для всіх порядкових чисел α. Зокрема, $f(\zeta_\infty(L)) = \zeta_\infty(L)$ та $f(\gamma_\infty(L)) = \gamma_\infty(L)$.*

Лема 3.3. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, f — ендоморфізм алгебри L. Тоді $f(\gamma_\alpha(L)) \leq \gamma_\alpha(L)$ для всіх порядкових чисел α. Зокрема, $f(\gamma_\infty(L)) \leq \gamma_\infty(L)$.*

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, A — підалгебра алгебри L, $G = \mathrm{Aut}_{[,]}(L)$. Тоді покладемо

$$C_G(A) = \{\alpha \in G |\ \alpha(x) = x \text{ для кожного } x \in A\}.$$

Якщо при цьому A — ідеал алгебри L, то покладемо

$$C_G(L/A) = \{\alpha \in G |\ \alpha(x + A) = x + A \text{ для кожного } x \in L\}$$

$$= \{\alpha \in G |\ \alpha(x) \in x + A \text{ для кожного } x \in L\}.$$

Лема 3.4. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, $G = \mathrm{Aut}[,](L)$. Якщо A — G-інваріантна підалгебра алгебри L, то $C_G(A)$ і $C_G(L/A)$ є нормальними підгрупами в G.*

Розглянемо групи автоморфізмів екстраспеціальних алгебр Лейбніца.

Нехай V — векторний простір над полем F, Φ — білінійна форма на V. Говорять, що автоморфізм f векторного простору V *зберігає* білінійну форму Φ, якщо $\Phi(f(x), f(y)) = \Phi(x, y)$ для всіх елементів $x, y \in V$.

Позначимо через $\mathrm{B}(V, \Phi)$ підмножину автоморфізмів векторного простору V, які зберігають білінійну форму Φ. Легко переконатися в тому, що $\mathrm{B}(V, \Phi)$ — підгрупа групи $\mathrm{GL}(V, F)$.

Будову груп автоморфізмів векторних просторів, які зберігають білінійну форму, досліджено в роботах [15, 16].

Лема 3.5. *Нехай L — екстраспеціальна алгебра Лейбніца над полем F, $Z = \zeta(L) = Fc$, $V = L/Z$, $G = \mathrm{Aut}_{[,]}(L)$. Визначимо відображення $\Phi : V \times V \to F$ за правилом $\Phi(x + Z, y + Z) = \sigma_{xy}$, де $[x, y] = \sigma_{xy}c$. Тоді Φ є білінійною формою, а фактор-група $G/C_G(L/Z)$ ізоморфна деякій підгрупі групи автоморфізмів векторного простору V, які зберігають білінійну форму Φ.*

Доведення. Зафіксуємо елемент c. Нехай $x + Z, y + Z$ — довільні суміжні класи. Тоді $[x, y] = \sigma_{xy}c$, де $\sigma_{xy} \in F$. Якщо x_1, y_1 — такі елементи з L, що $x_1 + Z = x + Z$, $y_1 + Z = y + Z$, то $x_1 = x + z_1$, $y_1 = y + z_2$ для деяких елементів $z_1, z_2 \in Z$. Маємо

$$[x_1, y_1] = [x + z_1, y + z_2] = [x, y].$$

Таким чином, визначення форми Φ коректне. З того факту, що операція $[,]$ білінійна, випливає, що форма Φ також білінійна.

Нехай $f \in \mathrm{Aut}_{[,]}(L)$. Згідно з лемою 3.1 $f(Z) = Z$. Визначимо відображення $f^\uparrow : L/Z \to L/Z$ за правилом $f^\uparrow(x+Z) = f(x)+Z$. Можна впевнитись у тому, що $f^\uparrow$ є лінійним перетворенням векторного простору V. Навіть більше, це перетворення невироджене. Маємо $[x, y] = \sigma_{xy}c$, $[f(x), f(y)] = \sigma_{f(x)f(y)}c$. З рівності $[f(x), f(y)] = [x, y]$ випливає, що $\sigma_{f(x)f(y)} = \sigma_{xy}$. Отже,

$$\Phi(f^\uparrow(x + Z), f^\uparrow(y + Z)) = \Phi(f(x) + Z, f(y) + Z) = \sigma_{f(x)f(y)} = \sigma_{xy} = \Phi(x + Z, y + Z).$$

Ця рівність показує, що $f^\uparrow$ є автоморфізмом векторного простору V, який зберігає білінійну форму Φ.

Розглянемо відображення $\psi : G \to \mathrm{B}(V, \phi)$, яке визначене за правилом $\psi(f) = f^\uparrow$, $f \in G$. Легко показати, що ψ є гомоморфізмом і $\mathrm{Ker}(\psi) = C_G(L/Z)$. Згідно з лемою 3.4 підгрупа $C_G(L/Z)$ нормальна в G. Отже, фактор-група $G/C_G(L/Z)$ ізоморфна підгрупі з $\mathrm{B}(V, \Phi)$.

Лема 3.6. *Нехай L — екстраспеціальна алгебра Лейбніца над полем F, $Z = \zeta(L)$, $\dim_F(L) = n+1$, $G = \mathrm{Aut}_{[,]}(L)$. Тоді підгрупа $C_G(L/Z)$ ізоморфна підгрупі групи $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$, яка складається з матриць вигляду*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_j \in F, \quad 1 \le j \le n.$$

Зокрема, підгрупа $C_G(L/Z)$ ізоморфна прямому добутку n копій адитивної групи поля F.

Доведення. Нехай $\{a_1, a_2, \dots, a_n, c\}$ — базис алгебри L. Якщо $f \in C_G(L/Z)$, то $f(a_j) = a_j + \alpha_j c$, $1 \le j \le n$. Позначимо через Ξ канонічний мономорфізм $C_G(L/Z)$ в $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$. Тоді $\Xi(C_G(L/Z))$ — підгрупа групи $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_j \in F, \quad 1 \le j \le n.$$

Легко перевірити, що ця підгрупа (а тому й підгрупа $C_G(L/Z)$) ізоморфна прямому добутку n копій адитивної групи поля F.

Теорема 3.1. *Нехай G — група автоморфізмів алгебри Лейбніца $\mathrm{Lei}_4(3, F)$.*

Якщо $\mathrm{char}(F) = 2$, то G ізоморфна підгрупі групи $\mathrm{GL}_3(F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Крім того, G містить нормальну підгрупу $C = C_G(L/\zeta(L))$, яка ізоморфна прямому добутку двох копій адитивної групи поля F, а фактор-група G/C ізоморфна підгрупі групи $\mathrm{GL}_2(F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Якщо $\mathrm{char}(F) \ne 2$, то G ізоморфна підгрупі групи $\mathrm{GL}_3(F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta\lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & -\delta\alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3 \in F, \quad \delta \in \{-1, 1\}.$$

Крім того, G містить нормальну підгрупу $C = C_G(L/\zeta(L))$, яка ізоморфна прямому добутку двох копій адитивної групи поля F, а фактор-група G/C ізоморфна підгрупі групи $\mathrm{GL}_2(F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta\lambda\alpha_2 \\ \alpha_2 & -\delta\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Нехай $L = \mathrm{Lei}_4(3, F)$, $f \in \mathrm{Aut}_{[,]}(L)$. Згідно з лемою 3.1 $f(Fa_3) = Fa_3$. Маємо

$$f(a_1) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3,$$

$$f(a_2) = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3.$$

Тоді

$$\begin{aligned} f(a_3) &= f([a_1, a_1]) = [f(a_1), f(a_1)] = [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3] \\ &= \alpha_1^2 [a_1, a_1] + \alpha_2^2 [a_2, a_2] = \alpha_1^2 a_3 + \lambda \alpha_2^2 a_3 = (\alpha_1^2 + \lambda \alpha_2^2) a_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a_3) &= \lambda^{-1} f([a_2, a_2]) = \lambda^{-1} [f(a_2), f(a_2)] \\ &= \lambda^{-1} [\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3, \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3] \\ &= \lambda^{-1} \beta_1^2 [a_1, a_1] + \lambda^{-1} \beta_2^2 [a_2, a_2] = \lambda^{-1} \beta_1^2 a_3 + \lambda^{-1} \lambda \beta_2^2 a_3 = (\lambda^{-1} \beta_1^2 + \beta_2^2) a_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= f([a_1, a_2]) = [f(a_1), f(a_2)] = [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3] \\ &= \alpha_1 \beta_1 [a_1, a_1] + \alpha_2 \beta_2 [a_2, a_2] = \alpha_1 \beta_1 a_3 + \lambda \alpha_2 \beta_2 a_3 = (\alpha_1 \beta_1 + \lambda \alpha_2 \beta_2) a_3. \end{aligned}$$

Отже, маємо такі співвідношення: $\alpha_1^2 + \lambda \alpha_2^2 = \lambda^{-1} \beta_1^2 + \beta_2^2$, $\alpha_1 \beta_1 + \lambda \alpha_2 \beta_2 = 0$.

Позначимо через Ξ канонічний мономорфізм $\mathrm{Aut}_{[,]}(L)$ в $\mathrm{GL}_3(F)$. Тоді матриця $\Xi(f)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 + \lambda \alpha_2^2 \end{pmatrix},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in F$, $\alpha_1^2 + \lambda \alpha_2^2 = \lambda^{-1} \beta_1^2 + \beta_2^2$, $\alpha_1 \beta_1 + \lambda \alpha_2 \beta_2 = 0$. Зокрема, якщо $\lambda = 1$, то $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$, $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0$.

Навпаки, нехай f — лінійне перетворення алгебри L, яке в базисі $\{a_1, a_2, a_3\}$ має наведену вище матрицю. Нехай x, y — довільні елементи з L, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$\begin{aligned} [x, y] &= [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] \\ &= \xi_1 \eta_1 [a_1, a_1] + \xi_2 \eta_2 [a_2, a_2] \\ &= \xi_1 \eta_1 a_3 + \lambda \xi_2 \eta_2 a_3 = (\xi_1 \eta_1 + \lambda \xi_2 \eta_2) a_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3) = \xi_1 f(a_1) + \xi_2 f(a_2) + \xi_3 f(a_3) \\ &= \xi_1 (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3) + \xi_2 (\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3) + \xi_3 (\alpha_1^2 + \lambda \alpha_2^2) a_3 \\ &= (\xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \beta_1) a_1 + (\xi_1 \alpha_2 + \xi_2 \beta_2) a_2 + (\xi_1 \alpha_3 + \xi_2 \beta_3 + \xi_3 \alpha_1^2 + \xi_3 \lambda \alpha_2^2) a_3, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(y) &= (\eta_1\alpha_1 + \eta_2\beta_1)a_1 + (\eta_1\alpha_2 + \eta_2\beta_2)a_2 + (\eta_1\alpha_3 + \eta_2\beta_3 + \eta_3\alpha_1^2 + \eta_3\lambda\alpha_2^2)a_3,\\
f([x,y]) &= f((\xi_1\eta_1 + \lambda\xi_2\eta_2)a_3) = (\xi_1\eta_1 + \lambda\xi_2\eta_2)f(a_3)\\
&= (\xi_1\eta_1 + \lambda\xi_2\eta_2)(\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2)a_3\\
&= (\xi_1\eta_1\alpha_1^2 + \lambda\xi_2\eta_2\alpha_1^2 + \xi_1\eta_1\lambda\alpha_2^2 + \lambda^2\xi_2\eta_2\alpha_2^2)a_3,\\
[f(x), f(y)] &= [(\xi_1\alpha_1 + \xi_2\beta_1)a_1 + (\xi_1\alpha_2 + \xi_2\beta_2)a_2 + (\xi_1\alpha_3 + \xi_2\beta_3 + \xi_3\alpha_1^2 + \xi_3\lambda\alpha_2^2)a_3,\\
&\qquad (\eta_1\alpha_1 + \eta_2\beta_1)a_1 + (\eta_1\alpha_2 + \eta_2\beta_2)a_2 + (\eta_1\alpha_3 + \eta_2\beta_3 + \eta_3\alpha_1^2 + \eta_3\lambda\alpha_2^2)a_3]\\
&= (\xi_1\alpha_1 + \xi_2\beta_1)(\eta_1\alpha_1 + \eta_2\beta_1)[a_1, a_1] + (\xi_1\alpha_2 + \xi_2\beta_2)(\eta_1\alpha_2 + \eta_2\beta_2)[a_2, a_2]\\
&= (\xi_1\alpha_1 + \xi_2\beta_1)(\eta_1\alpha_1 + \eta_2\beta_1)a_3 + \lambda(\xi_1\alpha_2 + \xi_2\beta_2)(\eta_1\alpha_2 + \eta_2\beta_2)a_3\\
&= (\xi_1\alpha_1\eta_1\alpha_1 + \xi_1\alpha_1\eta_2\beta_1 + \xi_2\beta_1\eta_1\alpha_1 + \xi_2\beta_1\eta_2\beta_1\\
&\qquad + \lambda\xi_1\alpha_2\eta_1\alpha_2 + \lambda\xi_1\alpha_2\eta_2\beta_2 + \lambda\xi_2\beta_2\eta_1\alpha_2 + \lambda\xi_2\beta_2\eta_2\beta_2)a_3\\
&= (\xi_1\eta_1\alpha_1^2 + \xi_1\eta_2\alpha_1\beta_1 + \xi_2\eta_1\alpha_1\beta_1 + \xi_2\eta_2\beta_1^2\\
&\qquad + \lambda\xi_1\eta_1\alpha_2^2 + \lambda\xi_1\eta_2\alpha_2\beta_2 + \lambda\xi_2\eta_1\alpha_2\beta_2 + \lambda\xi_2\eta_2\beta_2^2)a_3\\
&= (\xi_1\eta_1(\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2) + \xi_2\eta_2(\beta_1^2 + \lambda\beta_2^2) + \xi_1\eta_2(\alpha_1\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2) + \xi_2\eta_1(\alpha_1\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2))a_3.
\end{aligned}
$$

Використовуючи рівність $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$, отримуємо

$$
\begin{aligned}
&\xi_1\eta_1\alpha_1^2 + \lambda\xi_2\eta_2\alpha_1^2 + \xi_1\eta_1\lambda\alpha_2^2 + \lambda^2\xi_2\eta_2\alpha_2^2\\
&\qquad = \xi_1\eta_1(\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2) + \xi_2\eta_2(\beta_1^2 + \lambda\beta_2^2) + \xi_1\eta_2(\alpha_1\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2) + \xi_2\eta_1(\alpha_1\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2).
\end{aligned}
$$

Звідси випливає, що

$$\xi_2\eta_2(\lambda\alpha_1^2 + \lambda^2\alpha_2^2 - \beta_1^2 - \lambda\beta_2^2) - \xi_1\beta_2(\alpha_1\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2) - \xi_2\eta_1(\alpha_1\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2) = 0.$$

Беручи до уваги рівності $\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 = \lambda^{-1}\beta_1^2 + \beta_2^2$ та $\alpha_1\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2 = 0$, одержуємо $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$.

Припустимо спочатку, що $\mathrm{char}(F) = 2$. Якщо $\alpha_2 = 0$, то $\alpha_1\beta_1 = 0$. У цьому випадку $\alpha_1 = 0$ або $\beta_1 = 0$. Випадок $\alpha_1 = 0$ неможливий, оскільки за такої рівності матриця лінійного перетворення f вироджена. Отже, $\beta_1 = 0$. Звідси випливає, що $\alpha_1^2 = \beta_2^2$. З того факту, що $\mathrm{char}(F) = 2$, випливає, що $\beta_2 = \alpha_1$. У цьому випадку матриця $\Xi(f)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_1 & 0\\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Якщо $\alpha_1 = 0$, то $\lambda\alpha_2\beta_2 = 0$. Оскільки $\lambda \neq 0$, то $\alpha_2 = 0$ або $\beta_2 = 0$. Якщо припустити, що $\alpha_2 = 0$, то матриця лінійного перетворення f буде виродженою, що неможливо. Тому

$\beta_2 = 0$. Звідси випливає, що $\lambda\alpha_2^2 = \lambda^{-1}\beta_1^2$, тобто $\beta_1^2 = \lambda^2\alpha_2^2$. Знову, оскільки $\mathrm{char}(F) = 2$, то $\beta_1 = \lambda\alpha_2$. У цьому випадку матриця $\Xi(f)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2, \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Припустимо, що всі коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ненульові. З рівності $\alpha_1\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2 = 0$ випливає, що $\alpha_1\beta_1 = \lambda\alpha_2\beta_2$, тобто $\alpha_1\alpha_2^{-1} = \lambda\beta_2\beta_1^{-1} = \kappa$. Тоді $\alpha_1 = \alpha_2\kappa$, $\beta_2 = \lambda^{-1}\beta_1\kappa$. Маємо

$$\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 = \alpha_2^2\kappa^2 + \lambda\alpha_2^2 = \lambda^{-1}\beta_1^2 + \beta_2^2 = \lambda^{-1}\beta_1^2 + \lambda^{-2}\beta_1^2\kappa^2 = \lambda^{-2}\beta_1^2(\lambda + \kappa^2).$$

Звідси випливає, що $\alpha_2^2(\kappa^2 + \lambda) = \lambda^{-2}\beta_1^2(\lambda + \kappa^2)$. Тоді $\det(\Xi(f)) = (\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$. Якщо припустити, що $\lambda + \kappa^2 = 0$, то $\det(\Xi(f)) = 0$, що неможливо. Отже, $\lambda + \kappa^2 \neq 0$. Звідси випливає, що $\alpha_2^2 = \lambda^{-2}\beta_1^2$, тобто $\beta_1^2 = \lambda^2\alpha_2^2$. Беручи до уваги рівність $\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 = \lambda^{-1}\beta_1^2 + \beta_2^2$, отримуємо, що $\alpha_1^2 = \beta_2^2$. З того факту, що $\mathrm{char}(F) = 2$, випливає, що $\beta_1 = \lambda\alpha_2$ і $\beta_2 = \alpha_1$. Таким чином, матриця $\Xi(f)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Зауважимо, що для $\alpha_1 = 0$ або $\alpha_1 = 2$ ми отримуємо матриці, які були одержані вище. Отже, можна стверджувати, що $\Xi(G)$ складається з невироджених матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Згідно з лемою 3.6 нормальна підгрупа $\Xi(C_G(L/\zeta(L)))$ складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Отже, підгрупа $C_G(L/\zeta(L))$ ізоморфна прямому добутку двох копій адитивної групи поля F.

Розглянемо відображення $\upsilon : \Xi(G) \to \mathrm{GL}_2(F)$, визначене на правилом

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Маємо

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & \lambda\gamma_2 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ \gamma_3 & \sigma_3 & \gamma_1^2 + \lambda\gamma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1\gamma_1 + \lambda\alpha_2\gamma_2 & \lambda\alpha_1\gamma_2 + \lambda\alpha_2\gamma_1 & 0 \\ \alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2 & \lambda\alpha_2\gamma_2 + \alpha_1\gamma_1 & 0 \\ \alpha_3\gamma_1 + \beta_3\gamma_2 + (\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2)\gamma_3 & \lambda\alpha_3\gamma_2 + \beta_3\gamma_1 + (\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2)\sigma_3 & (\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2)(\gamma_1^2 + \lambda\gamma_2^2) \end{pmatrix}$$

і

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & \lambda\gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\gamma_1 + \lambda\alpha_2\gamma_2 & \lambda\alpha_1\gamma_2 + \lambda\alpha_2\gamma_1 \\ \alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2 & \lambda\alpha_2\gamma_2 + \alpha_1\gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Отже, υ є гомоморфізмом, $\mathrm{Ker}(\upsilon)$ складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Тому $\mathrm{Ker}(\upsilon) = C_G(L/\zeta(L))$, $\mathrm{Im}(\upsilon)$ складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in F.$$

Припустимо тепер, що $\mathrm{char}(F) \neq 2$. Якщо $\alpha_2 = 0$, то $\alpha_1\beta_1 = 0$. У цьому випадку $\alpha_1 = 0$ або $\beta_1 = 0$. Випадок $\alpha_1 = 0$ неможливий, оскільки за такої рівності матриця лінійного перетворення f вироджена. Отже, $\beta_1 = 0$. Звідси випливає, що $\alpha_1^2 = \beta_2^2$, а отже, $\beta_2 = \alpha_1$ або $\beta_2 = -\alpha_1$. Можна сказати, що $\beta_2 = \delta\alpha_1$, де $\delta \in \{1, -1\}$, тому матриця $\Xi(f)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Якщо $\alpha_1 = 0$, то $\lambda\alpha_2\beta_2 = 0$. Оскільки $\lambda \neq 0$, то $\alpha_2 = 0$ або $\beta_2 = 0$. Випадок $\alpha_2 = 0$ неможливий, оскільки тоді матриця $\Xi(f)$ буде виродженою. Тому $\beta_2 = 0$. Звідси випливає, що $\lambda\alpha_2^2 = \lambda^{-1}\beta_1^2$, тобто $\beta_1^2 = \lambda^2\alpha_2^2$. Це означає, що $\beta_1 = \lambda\alpha_2$ або $\beta_1 = -\lambda\alpha_2$. Можна сказати, що $\beta_1 = \delta\lambda\alpha_2$, де $\delta \in \{1, -1\}$. Таким чином, матриця $\Xi(f)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta\lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2, \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Припустимо, що всі коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ненульові. З рівності $\alpha_1\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2 = 0$ випливає, що $\alpha_1\beta_1 = -\lambda\alpha_2\beta_2$, тобто $\alpha_1\alpha_2^{-1} = -\lambda\beta_2\beta_1^{-1} = \kappa$. Тоді $\alpha_1 = \alpha_2\kappa$, $\beta_2 = -\lambda^{-1}\beta_1\kappa$. Маємо

$$\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 = \alpha_2^2\kappa^2 + \lambda\alpha_2^2 = \lambda^{-1}\beta_1^2 + \beta_2^2 = \lambda^{-1}\beta_1^2 + \lambda^{-2}\beta_1^2\kappa^2 = \lambda^{-2}\beta_1^2(\lambda + \kappa^2).$$

Таким чином, $\alpha_2^2(\kappa^2 + \lambda) = \lambda^{-2}\beta_1^2(\lambda + \kappa^2)$. Тоді

$$\det(\Xi(f)) = (\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

Якщо припустити, що $\lambda + \kappa^2 = 0$, то $\det(\Xi(f)) = 0$, що неможливо. Отже, $\lambda + \kappa^2 \neq 0$. Звідси випливає, що $\alpha_2^2 = \lambda^{-2}\beta_1^2$, тобто $\beta_1^2 = \lambda^2\alpha_2^2$. Беручи до уваги рівність $\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 = \lambda^{-1}\beta_1^2 + \beta_2^2$, отримуємо $\alpha_1^2 = \beta_2^2$. Оскільки $\mathrm{char}(F) \neq 2$, то $\alpha_1 = \beta_2$ або $\alpha_1 = -\beta_2$. Припустимо, що $\alpha_1 = \beta_2$. Тоді $\beta_2\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2 = 0$. Звідси випливає, що $\beta_1 + \lambda\alpha_2 = 0$, тобто $\beta_1 = -\lambda\alpha_2$. У цьому випадку матриця $\Xi(f)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Припустимо, що $\alpha_1 = -\beta_2$. Тоді $-\beta_2\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2 = 0$. Звідси випливає, що $-\beta_1 + \lambda\alpha_2 = 0$, тобто $\beta_1 = \lambda\alpha_2$. У цьому випадку матриця $\Xi(f)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3 \in F.$$

Рівності

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 & \lambda\sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \\ \sigma_3 & \tau_3 & \sigma_1^2+\lambda\sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1\sigma_1+\lambda\alpha_2\sigma_2 & \lambda\alpha_1\sigma_2 - \lambda\alpha_2\sigma_1 & 0 \\ \alpha_2\sigma_1 - \alpha_1\sigma_2 & \lambda\alpha_2\sigma_2+\alpha_1\sigma_1 & 0 \\ \alpha_3\sigma_1+\beta_3\sigma_2+(\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)\sigma_3 & \lambda\alpha_3\sigma_2 - \beta_3\sigma_1+(\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)\tau_3 & (\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)(\sigma_1^2+\lambda\sigma_2^2) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 & -\lambda\sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_3 & \tau_3 & \sigma_1^2+\lambda\sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1\sigma_1+\lambda\alpha_2\sigma_2 & -\lambda\alpha_1\sigma_2+\lambda\alpha_2\sigma_1 & 0 \\ \alpha_2\sigma_1 - \alpha_1\sigma_2 & -\lambda\alpha_2\sigma_2 - \alpha_1\sigma_1 & 0 \\ \alpha_3\sigma_1+\beta_3\sigma_2+(\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)\sigma_3 & -\lambda\alpha_3\sigma_2+\beta_3\sigma_1+(\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)\tau_3 & (\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)(\sigma_1^2+\lambda\sigma_2^2) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 & \lambda\sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \\ \sigma_3 & \tau_3 & \sigma_1^2+\lambda\sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1\sigma_1 - \lambda\alpha_2\sigma_2 & \lambda\alpha_1\sigma_2+\lambda\alpha_2\sigma_1 & 0 \\ \alpha_2\sigma_1+\alpha_1\sigma_2 & \lambda\alpha_2\sigma_2 - \alpha_1\sigma_1 & 0 \\ \alpha_3\sigma_1+\beta_3\sigma_2+(\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)\sigma_3 & \lambda\alpha_3\sigma_2 - \beta_3\sigma_1+(\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)\tau_3 & (\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)(\sigma_1^2+\lambda\sigma_2^2) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 & -\lambda\sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_3 & \tau_3 & \sigma_1^2+\lambda\sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1\sigma_1 - \lambda\alpha_2\sigma_2 & -\lambda\alpha_1\sigma_2 - \lambda\alpha_2\sigma_1 & 0 \\ \alpha_2\sigma_1+\alpha_1\sigma_2 & -\lambda\alpha_2\sigma_2+\alpha_1\sigma_1 & 0 \\ \alpha_3\sigma_1+\beta_3\sigma_2+(\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)\sigma_3 & -\lambda\alpha_3\sigma_2+\beta_3\sigma_1+(\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)\tau_3 & (\alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2)(\sigma_1^2+\lambda\sigma_2^2) \end{pmatrix}$$

показують, що група $\Xi(G)$ складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta\lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & -\delta\alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3 \in F, \quad \delta \in \{-1,1\}.$$

Розглянемо відображення $\upsilon\colon \Xi(G) \to \mathrm{GL}_2(F)$, визначене за правилом

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta\lambda\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & -\delta\alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2+\lambda\alpha_2^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta\lambda\alpha_2 \\ \alpha_2 & -\delta\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3 \in F, \quad \delta \in \{-1,1\}.$$

Аналогічно до попередніх міркувань, можна показати, що це відображення є гомоморфізмом, а $\mathrm{Ker}(\Xi)$ складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3,\beta_3 \in F.$$

Таким чином, $\mathrm{Ker}(\Xi) = C_G(L/\zeta(L))$, $\mathrm{Im}(\Xi)$ складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \delta\lambda\alpha_2 \\ \alpha_2 & -\delta\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1,\alpha_2 \in F, \quad \delta \in \{-1,1\}.$$

Теорему доведено.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Дослідження першого автора підтримано Інститутом математики Ісаака Ньютона та Единбурзьким університетом у рамках Програми додаткових грантів LMS Solidarity.

Авторські внески. Усі автори внесли рівний внесок у роботу.

Література

1. Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov, B. Omirov, K. Zhao, *Semisimple Leibniz algebras, their derivations and automorphisms*, Linear and Multilinear Algebra, **68**, № 10, 2005 – 2019 (2020); DOI:10.1080/03081087.2019.1567674.
2. Sh. Ayupov, B. Omirov, I. Rakhimov, *Leibniz algebras: structure and classification*, CRC Press, Taylor & Francis Group, (2020).
3. A. Blokh, *On a generalization of the concept of Lie algebra*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **165**, № 3, 471 – 473 (1965) (in Russian).
4. V. V. Kirichenko, L. A. Kurdachenko, A. A. Pypka, I. Ya. Subbotin, *Some aspects of Leibniz algebra theory*, Algebra and Discrete Math., **24**, № 1, 1 – 33 (2017).
5. L. A. Kurdachenko, J. Otal, A. A. Pypka, *Relationships between the factors of the canonical central series of Leibniz algebras*, Eur. J. Math., **2**, № 2, 565 – 577 (2016); DOI:10.1007/s40879-016-0093-5.
6. L. A. Kurdachenko, O. O. Pypka, M. M. Semko, *Description of the automorphism groups of some Leibniz algebras*, Res. Math., **31**, № 1, 52 – 61 (2023); DOI:10.15421/242305.
7. L. A. Kurdachenko, O. O. Pypka, I. Ya. Subbotin, *On the structure of low-dimensional Leibniz algebras: some revision*, Algebra and Discrete Math., **34**, № 1, 68 – 104 (2022); DOI:10.12958/adm2036.
8. L. A. Kurdachenko, A. A. Pypka, I. Ya. Subbotin, *On the automorphism groups of some Leibniz algebras*, Int. J. Group Theory, **12**, № 1, 1 – 20 (2023); DOI:10.22108/IJGT.2021.130057.1735.

9. L. A. Kurdachenko, O. O. Pypka, T. V. Velychko, *On the automorphism groups for some Leibniz algebras of low dimensions*, Ukr. Math. J., **74**, № 10, 1526 – 1546 (2023); DOI:10.1007/s11253-023-02153-2.
10. L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, V. S. Yashchuk, *On the endomorphisms and derivations of some Leibniz algebras*, J. Algebra and Appl., 2450002 (2022); DOI:10.1142/S0219498824500026.
11. M. Ladra, I. M. Rikhsiboev, R. M. Turdibaev, *Automorphisms and derivations of Leibniz algebras*, Ukr. Math. J., **68**, № 7, 1062 – 1076 (2016); DOI:10.1007/s11253-016-1277-3.
12. J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren Math. Wiss., **301**, Springer-Verlag (1992); DOI:10.1007/978-3-662-11389-9.
13. J.-L. Loday, *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbras de Leibniz*, Enseign. Math., **39**, 269 – 293 (1993).
14. J.-L. Loday, T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann., **296**, № 1, 139 – 158 (1993); DOI:10.1007/ BF01445099.
15. F. Szechtman, *Structure of the group preserving a bilinear form*, Electron. J. Linear Algebra, **13**, 197 – 239 (2005).
16. F. Szechtman, *Structure of the group preserving a bilinear form*; ArXiv: 1306.4285v1 (2013).

Одержано 17.10.23