

Вікторія Десятка (Житомирський державний університет імені Івана Франка),

Євген Севостьянов¹ (Житомирський державний університет імені Івана Франка; Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.)

УСУВНІ СИНГУЛЯРНІСТІ ВІДОБРАЖЕНЬ З ОБЕРНЕНОЮ НЕРІВНІСТЮ ПОЛЕЦЬКОГО НА РІМАНОВИХ МНОГОВИДАХ

We consider open discrete mappings of Riemannian manifolds satisfying a certain modulus inequality. We analyze the possibility of continuous extension of these mappings to an isolated point of the boundary. It is proved that these mappings admit extensions of this kind if they exclude two or more points of the connected Riemannian manifold and the majorant appearing in the modulus inequality is integrable over almost all spheres.

Розглядаються відкриті дискретні відображення ріманових многовидів, які задовольняють деяку модульну нерівність. Вивчається можливість неперервного продовження таких відображень в ізольовану точку межі. Доведено наявність такого продовження, якщо відображення не приймає дві та більше точок зв'язного ріманового многовиду, а мажоранта у модульній нерівності є інтегрованою по майже всіх сферах.

1. Вступ. Цю статтю присвячено вивченню відображень зі скінченням та обмеженням спотворенням, які активно досліджуються останнім часом (див., наприклад, [1–11]). Як відомо, квазірегулярні відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задовольняють умову

$$M(\Gamma) \leq KN(f, D)M(f(\Gamma)) \quad (1)$$

для будь-якої сім'ї Γ кривих γ в області D , де M — конформний модуль сімей кривих, $K = \text{ess sup } K_O(x, f)$,

$$K_O(x, f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$\|f'(x)\| = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}, \quad J(x, f) = \det f'(x),$$

$$N(y, f, D) = \text{card } \{x \in D : f(x) = y\}, \quad (2)$$

$$N(f, D) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, D)$$

(див., наприклад, [4], теорема 3.2). Зокрема, квазірегулярні відображення мають неперервне продовження в ізольовану точку межі області за деяких умов (див., наприклад, [10], теорема 2.9.3). Ми розглянемо питання про неперервне продовження в ізольовану точку межі більш загального класу відображень. Деякі твердження на цю тему були опубліковані в [12] (теорема 5.1) і [13] (теорема 1). Отримані в цій статті результати в якомусь сенсі є „найбільш

¹ Відповідальний за листування, e-mail: esevostyanov2009@gmail.com.

загальними”, бо у попередніх публікаціях ми вимагали додаткові топологічні умови на відображення.

Будемо вважати відомими основні об’єкти, пов’язані з рімановими многовидами: поняття довжини та об’єму, нормального околу точки і т. п. (див., наприклад, [14]). Скрізь далі $\mathbb{M}^n$ і $\mathbb{M}_*^n$ — ріманові многовиди розмірності n з геодезичними відстанями d і d_* відповідно,

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) < r\}, \quad S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) = r\},$$

$$A = A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{M}_*^n : r_1 < d_*(y, y_0) < r_2\}, \quad 0 < r_1 < r_2 < r_0,$$

$dv(x)$ і $dv_*(x)$ — міри об’єму на $\mathbb{M}^n$ і $\mathbb{M}_*^n$ відповідно, D — область в $\mathbb{M}^n$, $n \geq 2$. Борелева функція $\rho : \mathbb{M}^n \rightarrow [0, \infty]$ називається *допустимою* для сім’ї Γ кривих γ у $\mathbb{M}^n$, якщо

$$\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq 1$$

для всіх (локально спрямованих) кривих $\gamma \in \Gamma$. У цьому випадку ми пишемо $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Нехай $p \geq 1$, тоді p -модулем сім’ї кривих Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{M}^n} \rho^p(x) dv(x).$$

Скрізь далі $M(\Gamma) = M_n(\Gamma)$. Для множин $A, B \subset \mathbb{M}^n$ ми використовуємо позначення

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y), \quad d(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y). \quad (3)$$

Іноді замість $\text{dist}(A, B)$ ми пишемо $d(A, B)$.

Нехай $x_0 \in D$, $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ — вимірна щодо міри v функція і число $r_0 > 0$ є таким, що куля $B(x_0, r_0)$ лежить у деякому нормальному околі U точки x_0 разом зі своїм замиканням. Позначимо через $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$, геодезичні сфери з центром у точці x_0 і радіусами r_1 і r_2 . Для множин E, F і G в $\mathbb{M}^n$ позначимо через $\Gamma(E, F, G)$ сім’ю всіх кривих $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{M}^n$, які з’єднують E і F у G , іншими словами, $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $t \in (a, b)$. Якщо D — область ріманового многовиду $\mathbb{M}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{M}^n$ — деяке відображення, $y_0 \in f(D)$ і $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup_{y \in f(D)} d_*(y, y_0)$, то через $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ позначимо сім’ю всіх кривих γ в області D таких, що $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Будемо говорити, що f задовольняє *обернену нерівність Полецького* в точці $y_0 \in f(D)$, якщо нерівність

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leq \int_{A(y_0, r_1, r_2) \cap f(D)} Q(y) \eta^n(d_*(y, y_0)) dv_*(y) \quad (4)$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такої, що

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (5)$$

Неважко бачити, що нерівність (4) принаймні у просторі $\mathbb{M}^n = \mathbb{R}^n$ перетворюється у співвідношення вигляду $M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leq KM(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2))$, якщо функція Q обмежена числом

$K \geq 1$. Навіть більше, якщо f є відображенням з обмеженим спотворенням і має обмежену в області D функцію кратності $N(f, D)$, то ми також маємо співвідношення (1), а отже і нерівність (4). Зауважимо, що оцінки типу (4) добре відомі (див., наприклад, [4], теорема 3.2, [10], теорема 6.7.II і [6], теорема 8.5). Зокрема, для $p \neq n$ схожі оцінки можна знайти, наприклад, у [2].

Відображення $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ називається *дискретним*, якщо прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ кожної точки $y \in \mathbb{M}_*^n$ складається з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в $\mathbb{M}_*^n$.

У подальшому

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} Q(x) dA,$$

де dA позначає елемент площі поверхні на $S(x_0, r)$. Детальніше про інтеграли від функцій по поверхнях ріманових многовидів див., наприклад, у роботі [1].

Нехай $\overline{\mathbb{M}^n} := \mathbb{M}^n \cup \{\infty\}$ і $h: \overline{\mathbb{M}^n} \times \overline{\mathbb{M}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ — метрика на $\overline{\mathbb{M}^n}$. Припустимо, що многовид $\mathbb{M}^n$ є зв'язним, тоді d — метрика на $\mathbb{M}^n$. Згідно з [15] будемо говорити, що h задовольняє умову *слабкої сферикалізації*, якщо $(\overline{\mathbb{M}^n}, h)$ — компактний метричний простір, а h і d породжують однакову топологію на $\mathbb{M}^n$. Рімановий многовид $\mathbb{M}^n$ називається таким, що *допускає слабку сферикалізацію*, якщо існує метрика $h: \overline{\mathbb{M}^n} \times \overline{\mathbb{M}^n} \rightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє умову слабкої сферикалізації. Аналогічно можна визначити поняття слабкої сферикалізації для довільного метричного простору (див. [15]).

Зауваження 1. Наведене означення слабкої сферикалізації відрізняється від того, що запропоновано в [15]. А саме, замість умови, що h і d породжують однакову топологію на $\mathbb{M}^n$, у [15] ми вимагаємо, щоб виконувалося таке: $h(x, y) \leq d(x, y)$ при всіх $x, y \in \mathbb{M}^n$, де $d(x, y)$ — геодезична метрика на зв'язному рімановому многовиді $\mathbb{M}^n$. При вказаному означенні топологія на $\mathbb{M}^n$, породжена метрикою h , слабкіша за топологію на $\mathbb{M}^n$, породжену метрикою d . Про рівність цих топологій не йдеться.

Одним із найважливіших прикладів слабкої сферикалізації є *хордальна (сферична) метрика* в розширеному евклідовому просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (див. [11], розділ 12). А саме, для $x, y \in \overline{\mathbb{R}^n}$ покладемо $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, де $\pi: \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow S(e_{n+1}/2, 1/2)$, $S(e_{n+1}/2, 1/2) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - e_{n+1}/2| = 1/2\}$, $e_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ і $\pi(x) = e_{n+1} + \frac{x - e_{n+1}}{|x - e_{n+1}|^2}$. Можна показати, що

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y, \quad (6)$$

і функція $h: \overline{\mathbb{R}^n} \times \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умову слабкої сферикалізації. Справедливим є таке твердження.

Теорема 1. Нехай $n \geq 2$, D — область в $\mathbb{M}^n$, $x_0 \in D$, $a, b \in \mathbb{M}_*^n$, $a \neq b$, і $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{M}_*^n \setminus \{a, b\}$ — відкрите дискретне відображення, яке задовольняє умови (4), (5) в усіх точках $y_0 \in \overline{D'}$, де $D' := f(D \setminus \{x_0\})$. Припустимо, що многовид $\mathbb{M}_*^n$ є зв'язним і допускає умову слабкої сферикалізації. Припустимо, крім того, що для кожної точки $y_0 \in \overline{D'}$ знайдеться

таке $r_0 = r_0(y_0) > 0$, що $q_{y_0}(r) < \infty$ при майже всіх $r \in (0, r_0)$. Тоді f має неперервне продовження $\bar{f}: D \rightarrow \overline{\mathbb{M}^n}$, неперервність якого слід розуміти в сенсі метрики h . Продовжене відображення є відкритим і дискретним у D .

Зокрема, твердження теореми 1 є правильним, якщо $Q \in L^1(D')$. У цьому випадку, якщо $f(x_0) \neq \infty$, знайдуться окіл $U = U(x_0, f) \subset D$ точки x_0 , залежний лише від x_0 і відображення f , і стала $C = C(n, D, x_0) > 0$ такі, що

$$d_*(\bar{f}(x), \bar{f}(x_0)) \leq \frac{C_n \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n} \left(1 + \frac{\delta}{2d(x, x_0)} \right)}$$

для всіх $x, y \in U$, де $\|Q\|_1$ — норма функції Q в $L^1(D')$.

З теореми 1 безпосередньо отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1. Нехай $n \geq 2$, D — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$, і $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{a, b\}$ — відкрите дискретне відображення, яке задовольняє умови (4), (5) в усіх точках $y_0 \in \overline{D'}$, де $D' := f(D \setminus \{x_0\})$. Припустимо, що для кожної точки $y_0 \in \overline{D'}$ знайдеться таке $r_0 = r_0(y_0) > 0$, що $q_{y_0}(r) < \infty$ при майже всіх $r \in (0, r_0)$. Тоді f має неперервне продовження $\bar{f}: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, неперервність якого слід розуміти в сенсі хордальної метрики h . Продовжене відображення є відкритим і дискретним у D .

Зокрема, твердження теореми 1 є правильним, якщо $Q \in L^1(D')$. У цьому випадку, якщо $f(x_0) \neq \infty$, знайдуться окіл $U = U(x_0, f) \subset D$ точки x_0 , залежний лише від x_0 та відображення f , і стала $C = C(n, D, x_0) > 0$ такі, що

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(x_0)| \leq \frac{C_n \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n} \left(1 + \frac{\delta}{2|x - x_0|} \right)}$$

для всіх $x, y \in U$, де $\|Q\|_1$ — норма функції Q в $L^1(D')$.

Зауваження 2. Всі квазірегулярні відображення $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ задовольняють умову

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leq \int_{f(D) \cap A(y_0, r_1, r_2)} K_O N(y, f, D \setminus \{x_0\}) \eta^n(|y - y_0|) dm(y) \quad (7)$$

у кожній точці $y_0 \in \overline{f(D)} \setminus \{\infty\}$ з деякою сталою $K_O = K_O(f) \geq 1$ і довільною вимірною за Лебегом функцією $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$, яка задовольняє умову (5). Тут функція кратності $N(y, f, D \setminus \{x_0\})$ визначена у (2).

Справді, квазірегулярні відображення задовольняють умову

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leq \int_{f(D) \cap A(y_0, r_1, r_2)} K_O N(y, f, D \setminus \{x_0\}) (\rho')^n(y) dm(y) \quad (8)$$

для довільної функції $\rho' \in \text{adm } f(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2))$ (див. [10], зауваження 2.5.II). Покладемо тепер $\rho'(y) := \eta(|y - y_0|)$ для $y \in A(y_0, r_1, r_2) \cap f(D)$, і $\rho'(y) = 0$ у решті точок. З огляду на теорему Лузіна можна припустити, що функція ρ' є вимірною за Борелем (див., наприклад, [16], розділ 2.3.6). Тоді за теоремою 5.7 з [11]

$$\int_{\gamma_*} \rho'(y) |dy| \geq \int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$$

для кожної (спрямлюваної) кривої $\gamma_* \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Підставляючи вибрану функцію ρ' у (8), отримуємо співвідношення (7).

Враховуючи зауваження 2, з огляду на теорему 1 маємо такий наслідок.

Наслідок 2. Нехай $n \geq 2$, D — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{a, b\}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$, — квазірегулярне відображення. Якщо $N(y, f, D \setminus \{x_0\}) \in L^1(D')$, то f має неперервне продовження $\bar{f}: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, неперервність якого слід розуміти в сенсі хордальної метрики h у (6).

Наслідок 2 випливає з теореми Сохоцького–Вєрштрасса для квазірегулярних відображень, яка стверджує, що для істотно особливих точок x_0 відображення f виконується умова: $N(y, f, D \setminus \{x_0\}) = \infty$ для всіх $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$, де E — множина ємності нуль (див. [10], наслідок 2.11.ІІІ). Отже, для істотно особливих точок x_0 відображення f умова $N(y, f, D \setminus \{x_0\}) \in L^1(D')$ у наслідку 2 а ргіогі не може виконуватися.

2. Допоміжні твердження. Перед початком доведення основних результатів встановимо такі твердження.

Твердження 1. Нехай D — область в $\mathbb{M}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{M}_*^n$, $n \geq 2$, — довільне відображення. Припустимо, що многовид $\mathbb{M}_*^n$ є зв'язним і допускає умову слабкої сфериалізації. Тоді $C(x_0, f)$ — непорожній континуум у $\overline{\mathbb{M}_*^n}$.

Тут і далі

$$C(x, f) := \{y \in \overline{\mathbb{M}^n} : \exists x_k \in D : x_k \rightarrow x, f(x_k) \rightarrow y, k \rightarrow \infty\}.$$

Доведення. Покладемо $r_0 = d(z_0, \partial D)$. Нехай $r_m > 0$, $m \in \mathbb{N}$, — довільна послідовність така, що $r_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Нехай $m_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $r_m < r_0$ при всіх $m > m_0$. Зауважимо, що $C(x_0, f) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{f(B(x_0, r_m) \setminus \{x_0\})}$. Звідси випливає, що $C(x_0, f)$ — замкнена множина як численний перетин замкнених множин. Крім того, $C(x_0, f)$ — континуум як перетин спадної послідовності континуумів (див. [17], теорема 5.ІІ.47.5). Оскільки простір $\overline{\mathbb{M}_*^n}$ компактний, $C(x_0, f)$ не є порожнім з огляду на умову Кантора щодо непорожнього перетину довільної системи замкнених спадних множин (див. [17], гл. 4, § 41, пункт І).

Сформулюємо дуже важливе топологічне твердження, яке неодноразово будемо використовувати в подальшому (див. [17], теорема 1.І.5.46).

Твердження 2. Нехай A — множина в топологічному просторі X . Якщо множина C є зв'язною і $C \cap A \neq \emptyset \neq C \setminus A$, то $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

Нехай $D \subset \mathbb{M}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ — дискретне відкрите відображення, $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{M}^n$ — крива і $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Крива $\alpha: [a, c] \rightarrow D$ називається *максимальним підняттям кривої β при відображенні f з початком у точці x* , якщо: 1) $\alpha(a) = x$; 2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c]}$; 3) яким би не було $c < c' \leq b$, не існує кривої $\alpha': [a, c'] \rightarrow D$ такої, щоб $\alpha = \alpha'|_{[a, c]}$ і $f \circ \alpha' = \beta|_{[a, c']}$. Аналогічно можна визначити максимальне підняття $\alpha: (c, b] \rightarrow D$ кривої $\beta: (a, b] \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ при відображенні f з кінцем у точці $x \in f^{-1}(\beta(b))$. Максимальне підняття $\alpha: [a, c] \rightarrow D$ кривої $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ при відображенні f з початком у точці x називається *повним*, якщо в наведеному вище означенні $c = b$.

Якщо $\beta: [a, b) \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ — крива і $C \subset \mathbb{M}^n$, то будемо говорити, що $\beta \rightarrow C$ при $t \rightarrow b$, якщо $d(\beta(t), C) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow b$ (див. [5], розділ 3.11), де $d(\beta(t), C)$ визначено в (3). Справедливим є таке твердження (див. [5], лема 3.12) для випадку $\mathbb{M}^n = \mathbb{M}_*^n = \mathbb{R}^n$.

Твердження 3. Нехай многовид $\mathbb{M}^n$ є зв'язним, $D \neq \mathbb{M}^n$, $x_0 \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{M}^n$, $n \geq 2$, — відкрите дискретне відображення. Припустимо, що $\overline{D}$ — компакт у $\mathbb{M}^n$. Нехай $\beta: [a, b) \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ — така крива, що $\beta(a) = f(x_0)$ і, крім того, $\beta(t) \rightarrow \partial D'$ при $t \rightarrow b$. Тоді β має максимальне підняття $\alpha: [a, c) \rightarrow D$ при відображенні f з початком у точці x_0 , до того ж $d(\alpha(t), \partial D) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow c - 0$.

Доведення. Насамперед зауважимо, що формулювання твердження 3 є коректним, а саме, з умов твердження випливає, що ∂D не порожня. Справді, оскільки за умовою многовид $\mathbb{M}^n$ є зв'язним і $D \neq \mathbb{M}^n$, можна з'єднати точки $x_1 \in D$ і $x_2 \in D \setminus \mathbb{M}^n$ кривою $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}^n$, $\gamma(0) = x_1$ і $\gamma(1) = x_2$. Тоді $|\gamma| \cap D \neq \emptyset \neq \mathbb{M}^n \setminus D$, тому за твердженням 2 $\gamma \cap \partial D \neq \emptyset$. Отже, $\partial D \neq \emptyset$, що і потрібно було довести.

Існування максимальних підняття $\alpha: [a, c) \rightarrow D$ при відображенні f з початком у точці x_0 доведено в [15]. Доведемо другу частину твердження, для чого використаємо методологію доведення лема 3.12 з [5] (див. також лему 2.1 у [18]).

Оскільки $\partial D \neq \emptyset$, то можливі два випадки: або $d(\alpha(t), \partial D) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow c - 0$, або існують $\delta_0 > 0$ і послідовність $t_k \rightarrow c - 0$ при $k \rightarrow \infty$ така, що $d(\alpha(t_k), \partial D) \geq \delta_0 > 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Доведемо від супротивного, що друга можливість реалізуватися не може. Припустимо протилежне. Тоді розглянемо множину

$$D_0 = \left\{ x \in \mathbb{M}^n : x = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k), t_k \in [a, c), \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = c \right\}.$$

Доведемо спочатку, що $c \neq b$. Справді, послідовність точок $x_k := \alpha(t_k)$ можна вважати збіжною до деякої точки $z_0 \in D$ з огляду на те, що $\overline{D}$ — компакт в $\mathbb{M}^n$. Тоді, оскільки f є неперервним у D і, крім того, відкритим відображенням, $f(x_k) = \beta(t_k) \rightarrow y_0 = f(z_0) \in D'$ при $k \rightarrow \infty$, що суперечить означенню кривої β .

Отже, $c \neq b$. Нехай $x \in D_0 \cap D$, тоді з огляду на неперервність f отримуємо, що $f(\alpha(t_k)) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$, де $t_k \in [a, c)$, $t_k \rightarrow c$ при $k \rightarrow \infty$. Однак $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \rightarrow \beta(c)$ при $k \rightarrow \infty$. Тоді відображення f стає на $D_0 \cap D$. З іншого боку, множина $|\alpha|$ є компактною, оскільки $|\alpha|$ — замкнена підмножина компактного простору $\overline{D}$ (див. [17], теорема 2.П.4, § 41). За умовою Кантора на компактній $|\alpha|$ та з огляду на монотонність послідовності зв'язних множин $\alpha([t_k, c))$ маємо $D_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} \neq \emptyset$ (див. [17], пункт (2'), I.41.4). На підставі теореми 5.П.47.5 із [17] множина D_0 є зв'язною.

В такому випадку D_0 складається з однієї точки. Справді, якщо D_0 — невідроджений континуум, то, оскільки за побудовою $x \in D_0 \cap D$, маємо й невідроджений підконтинуум $E_0 \subset D \cap D_0$. Останнє суперечить дискретності відображення f у D , бо тоді з огляду на неперервність відображення f ми мали б $f(E_0) = \{\beta(c)\}$. Отже, $D_0 = \{x\}$.

У такому випадку криву $\alpha: [a, c) \rightarrow D$ можна продовжити до замкненої кривої $\alpha: [a, c] \rightarrow D$, причому $f(\alpha(c)) = \beta(c)$. Тоді за лемою 2.1 з [15] знайдеться ще одне максимальне підняття α' кривої $\beta|_{[c, b)}$ з початком у точці $\alpha(c)$. Об'єднуючи підняття α і α' , отримуємо нове підняття α'' кривої β з початком у точці x_0 , визначене на $[a, c')$, $c' \in (c, b)$, що суперечить „максимальності” вихідного підняття α . Отримана суперечність вказує на те, що припущення $d(\alpha(t_k), \partial D) \geq \delta_0 > 0$ при деякій послідовності $t_k \rightarrow c - 0$, $k \rightarrow \infty$, і $\delta_0 > 0$ було хибним.

Твердження 3 доведено.

Скрізь далі $\mu(y, f, G)$ — топологічний індекс відображення f у точці $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$ щодо області $G \subset D$, $\bar{G} \subset D$. Будемо говорити, що відображення f зберігає орієнтацію, якщо топологічний індекс $\mu(y, f, G)$ задовольняє умову $\mu(y, f, G) > 0$ для довільної області $G \subset D$, $\bar{G} \subset D$ і $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$ (див., наприклад, розд. I, п. 4 у [10, с. 17]). Справедливим є наступний результат. Нагадаємо, що для довільного відображення $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ існує область $G \subset \bar{D}$ така, що $\bar{G} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Тоді величина $\mu(f(x), f, G)$, яка називається локальним топологічним індексом, не залежить від вибору області G і позначається символом $i(x, f)$.

Твердження 4. Нехай $n \geq 2$, D — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — відкрите дискретне відображення. Якщо f має неперервне продовження $\bar{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ у точку x_0 , то $\bar{f}$ також є відкритим і дискретним відображенням.

Доведення. Без обмеження загальності, застосовуючи за потреби додаткове перетворення інверсії $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$, $\infty \mapsto 0$, можемо вважати, що $\bar{f}(x_0) \neq \infty$.

Відомо, що дискретні відкриті відображення в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, або зберігають орієнтацію, або не зберігають (див., наприклад, розд. I, п. 4 в [10]). Нехай f , наприклад, зберігає орієнтацію. Покажемо, що продовжене відображення $\bar{f}$ зберігає орієнтацію, відкрите і дискретне. Позначимо, як зазвичай, через $B_f(D \setminus \{x_0\})$ множину точок розгалуження відображення f в області $D \setminus \{x_0\}$, а через $B_{\bar{f}}(D)$ множину точок розгалуження, продовженого у точку x_0 відображення $\bar{f}$ в області D . Якщо x_0 — точка локальної гомеоморфності відображення $\bar{f}$, доводити нема чого. Нехай точка $x_0 \in B_{\bar{f}}(D)$. За теоремою Чернавського $\dim B_f(D \setminus \{x_0\}) = \dim \bar{f}(B_f(D \setminus \{x_0\})) \leq n - 2$ (див., наприклад, теорему 4.6 розд. I [10]), де $\dim$ позначає топологічну розмірність множини [19]. Тоді

$$\dim f(B_{\bar{f}}(D)) \leq n - 2, \quad (9)$$

оскільки $f(B_{\bar{f}}(D)) = f(B_{\bar{f}}(D \setminus \{x_0\})) \cup \{\bar{f}(x_0)\}$, множина $\{\bar{f}(x_0)\}$ є замкненою і топологічна розмірність кожної з множин $\bar{f}(B_f(D \setminus \{x_0\}))$ і $\{\bar{f}(x_0)\}$ не перевищує $n - 2$ (див. наслідок 1, розд. III, п. 3 у [19]). Нехай G — область в D така, що $\bar{G} \subset D$ і $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Тоді внаслідок (9) існує точка $y_0 \notin f(B_{\bar{f}}(D))$, що належить до тієї ж компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial G)$, що й y .

Внаслідок того, що топологічний індекс $\mu(y, f, G)$ є сталою величиною на кожній компоненті зв'язності множини $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial G)$ (див. властивість D_1 у [10], пропозиція 4.4.I), маємо

$$\mu(y, \bar{f}, G) = \mu(y_0, f, G) = \sum_{x \in G \cap \{f^{-1}(y_0)\}} i(x, f) > 0.$$

Отже, відображення f зберігає орієнтацію в D . Нарешті, для будь-якого $y \in f(D)$ внаслідок дискретності відображення f в області $D \setminus \{x_0\}$ множина $\{f^{-1}(y)\}$ є не більш ніж зчисленною і тому $\dim \{f^{-1}(y)\} = 0$. Отже, за результатами [20, с. 333] відображення f є відкритим і дискретним, що і потрібно було довести.

Наступне твердження містить елементарний зв'язок між інтегровністю функції по сферах та інтегровністю за мірою Лебега і є однією з версій теореми Фубіні (див. співвідношення (3.3), (3.4) у [21]).

Твердження 5. Нехай D — область в $\mathbb{M}^n$, $n \geq 2$, $Q: D \rightarrow [0, \infty]$, $Q \equiv 0$ на $\mathbb{M}^n \setminus D$. Тоді для будь-якого $x_0 \in \bar{D}$ знайдуться нормальний окіл U точки x_0 і сталі $C_1 = C_1(x_0)$, $C_2 = C_2(x_0) > 0$ такі, що для довільних $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \text{dist}(x_0, \partial U)$ виконуються нерівності

$$C_1 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \int_{S(x_0, r)} Q(x) dA dr \leq \int_{\varepsilon_1 < |x-x_0| < \varepsilon_2} Q(x) dv(x) \leq C_2 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \int_{S(x_0, r)} Q(x) dA dr. \quad (10)$$

Співвідношення (10) передбачає існування (скінченного або нескінченного) інтеграла від функції Q по сфері $S(x_0, r)$ при майже кожному $\varepsilon_1 \leq r \leq \varepsilon_2$ щодо міри $\mathcal{A}$ поверхні $S(x_0, r)$.

Для області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, і вимірної за Лебегом функції $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ визначимо через $\mathfrak{F}_Q(D)$ сім'ю всіх відкритих дискретних відображень $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, що співвідношення (4) виконується при $p = n$ для кожної точки $y_0 \in f(D)$. Справедливим є таке твердження (див., наприклад, [22], теорема 1.1).

Твердження 6. Нехай $Q \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тоді знайдеться стала $C_n > 0$, яка залежить лише від розмірності простору n , така що для будь-якого $x_0 \in D$ і будь-якого $r_0 > 0$ такого, що $0 < 2r_0 < \text{dist}(x_0, \partial D)$, виконується нерівність

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{C_n \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n} \left(1 + \frac{r_0}{|x - x_0|} \right)} \quad \forall x \in B(x_0, r_0), \quad \forall f \in \mathfrak{F}_Q(D),$$

де $\|Q\|_1$ — норма функції Q в $L^1(\mathbb{R}^n)$. Зокрема, сім'я $\mathfrak{F}_Q(D)$ є одностайно неперервною в D .

Справджується таке твердження (див. [23], лема 2.2, а також [11], теорема 10.12 і [24], лема 2.2).

Твердження 7. Нехай D — область в $\mathbb{M}^n$, $n \geq 2$, і $x_0 \in D$. Тоді для кожного $P > 0$ і будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ цієї ж точки, такий що нерівність $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ виконується для довільних континуумів $E, F \subset D$, що перетинають ∂U і ∂V .

Зауваження 3. Оскільки модуль сім'ї кривих, що проходять через фіксовану точку, дорівнює нулю (див. пункт 7.9 у [11]), твердження 7 залишається правильним для випадку, коли x_0 — ізольована точка межі області D .

Наступне твердження доведено в [23] (лема 2.1).

Твердження 8. Нехай a, b, c і d — чотири різні точки області D ріманового многовиду $\mathbb{M}^n$, $n \geq 2$. Тоді знайдуться неперетинні жорданові криві $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow D$ і $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow D$ такі, що $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = b$, $\gamma_2(0) = c$ і $\gamma_2(1) = d$.

3. Доведення теореми 1. Доведення розіб'ємо на наступні кроки.

3.1. Існування неперервного продовження в точку x_0 . Без обмеження загальності можемо вважати, що $D \neq \mathbb{M}^n$ і $\overline{D}$ — компакт у $\mathbb{M}^n$. Частково скористаємося й удосконалимо підхід, використаний при доведенні теореми 1 в [25] (див. також теорему 6 в [13]). Припустимо супротивне, а саме, що відображення f не має границі в точці x_0 в сенсі „хордальної” метрики h . З огляду на компактність простору $\overline{\mathbb{M}}_*^n$ знайдуться $z_1, z_2 \in C(x_0, f)$, $z_1 \neq z_2$. За твердженням 1 $C(x_0, f)$ є невідродженим континуумом, і оскільки простір $\overline{\mathbb{M}}_*^n$ метричний, цей континуум містить безліч точок (див., наприклад, [17], § 46, теорема 4.1.5). Отже, можна вважати, що $z_1 \neq \infty \neq z_2$. Тоді також знайдуться послідовності $x_m, x'_m \in D \setminus \{x_0\}$, $m = 1, 2, \dots$, такі, що $x_m, x'_m \rightarrow x_0$ при $m \rightarrow \infty$, до того ж $y_m := f(x_m) \rightarrow z_1$ і $y'_m := f(x'_m) \rightarrow z_2$ при $m \rightarrow \infty$. Оскільки за означенням слабкої сферикалізації метрики d і h формують одну і ту саму топологію на $\mathbb{M}_*^n$, вказану збіжність можна розуміти в сенсі метрики d_* .

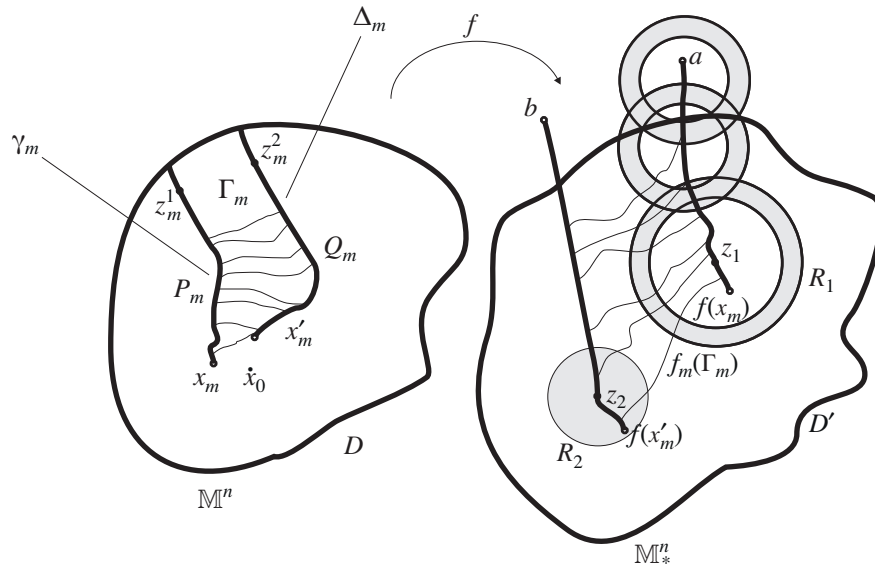


Рис. 1. До доведення теореми 1. Випадок 1.

За твердженням 8 точки a , z_1 і b , z_2 можна з'єднати неперетинними кривими $\gamma_1 : [1/2, 1] \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ і $\gamma_2 : [1/2, 1] \rightarrow \mathbb{M}_*^n$. Якщо $a = z_1$, або $b = z_2$, відповідні криві γ_1 та/або γ_2 вважаються виродженими (одноточковими). Виберемо $R_1 > 0$ та $R_2 > 0$ так, щоб

$$\left(\overline{B(z_1, R_1)} \cup |\gamma_1| \right) \cap \left(\overline{B(z_2, R_2)} \cup |\gamma_2| \right) = \emptyset.$$

Можна вважати, що $y_m := f(x_m) \in B(z_1, R_1)$ і $y'_m := f(x'_m) \in B(z_2, R_2)$ при всіх $m \in \mathbb{N}$. З'єднаємо точки $f(x_m)$ і z_1 кривою $\alpha_m^* : [0, 1/2] \rightarrow B(z_1, R_1)$, й $f(x'_m)$ і z_2 кривою $\beta_m^* : [0, 1/2] \rightarrow B(z_2, R_2)$ (див. рис. 1). Це є можливим, оскільки інфінітезимальні кулі на многовиді зв'язні. Покладемо

$$\alpha_m(t) = \begin{cases} \alpha_m^*(t), & t \in [0, 1/2], \\ \gamma_1(t), & t \in [1/2, 1], \end{cases} \quad \beta_m(t) = \begin{cases} \beta_m^*(t), & t \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(t), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

За побудовою множини $A_1 := |\gamma_1| \cup \overline{B(z_1, R_1)}$, $A_2 := |\gamma_2| \cup \overline{B(z_2, R_2)}$ не перетинаються. Зокрема, знайдеться $\varepsilon_1^* > 0$ таке, що

$$d(A_1, A_2) \geq \varepsilon_1^* > 0. \quad (11)$$

З огляду на визначення кривих α_m і β_m

$$|\alpha_m| \cap D' \neq \emptyset \neq |\alpha_m| \cap (\mathbb{M}_*^n \setminus D'),$$

$$|\beta_m| \cap D' \neq \emptyset \neq |\beta_m| \cap (\mathbb{M}_*^n \setminus D').$$

Тоді на підставі твердження 2 існують точки $t_1, t_2 \in (0, 1)$ такі, що $\alpha_m(t_1) \in \partial D'$, $\beta_m(t_2) \in \partial D'$. Без обмеження загальності можна вважати, що $\alpha_m(t) \in D'$ при всіх $t \in [0, t_1]$ і $\beta_m(t) \in D'$ при всіх $t \in [0, t_2]$. Покладемо

$$\tilde{\alpha}_m := \alpha_m|_{[0,t_1]}, \quad \tilde{\beta}_m := \beta_m|_{[0,t_2]}.$$

Розглянемо максимальні підняття $\gamma_m : [0, c_m) \rightarrow D \setminus \{x_0\}$ і $\Delta_m : [0, d_m) \rightarrow D \setminus \{x_0\}$ кривих $\tilde{\alpha}_m$ і $\tilde{\beta}_m$ в області $D \setminus \{x_0\}$ з початковими точками x_m і x'_m . Такі підняття існують з огляду на твердження 3. Завдяки цьому ж твердженню $\gamma_m(t) \rightarrow \partial(D \setminus \{x_0\})$ при $t \rightarrow c_m - 0$ і $\Delta_m(t) \rightarrow \partial(D \setminus \{x_0\})$ при $t \rightarrow d_m - 0$. Можливі 4 випадки:

- 1) при всіх $m \in \mathbb{N}$ $\gamma_m(t) \rightarrow \partial D$ при $t \rightarrow c_m - 0$ і $\Delta_m(t) \rightarrow \partial D$ при $t \rightarrow d_m - 0$;
- 2) при всіх $m \in \mathbb{N}$ $\gamma_m(t) \rightarrow \partial D$ при $t \rightarrow c_m - 0$, але існує таке $m_0 \in \mathbb{N}$, що $\Delta_{m_0}(t) \rightarrow x_0$ при $t \rightarrow d_{m_0} - 0$;
- 3) існує таке $k_0 \in \mathbb{N}$, що $\gamma_{k_0}(t) \rightarrow x_0$ при $t \rightarrow c_{k_0} - 0$, проте при всіх $m \in \mathbb{N}$ $\Delta_m(t) \rightarrow \partial D$ при $t \rightarrow d_m - 0$;
- 4) існують такі $k_0, m_0 \in \mathbb{N}$, що $\gamma_{k_0}(t) \rightarrow x_0$ при $t \rightarrow c_{k_0} - 0$ і $\Delta_{m_0}(t) \rightarrow x_0$ при $t \rightarrow d_{m_0} - 0$.

У подальшому слід розглянути кожен із випадків окремо, причому з випадків 2 і 3 достатньо розглянути лише один (бо вони, як легко бачити, відрізняються лише заміною позначень).

Випадок 1. Нехай $r_0 = r_0(y) > 0$ — число з умов теореми, яке визначено для кожного $y_0 \in \overline{D'}$. За твердженням 5 для кожного $y_0 \in \mathbb{M}_*^n$ знайдуться $\delta(y_0) > 0$ і стала $C = C(y_0) > 0$ такі, що

$$\int_{\varepsilon_1 < d_*(y, y_0) < \varepsilon_2} Q(y) dv_*(y) \leq C \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \int_{S(y_0, r)} Q(y) dA dr \quad (12)$$

для кожних $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq \delta(y_0)$. Покладемо $r_*(y) := \min \{\varepsilon_1^*, r_0(y), \delta(y)\}$. Покриємо множину A_1 кулями $B(y, r_*/4)$, $y \in A_1$. Зауважимо, що $|\gamma_1|$ є компактною множиною в $\mathbb{M}_*^n$ як неперервний образ компакта $[1/2, 1]$ при відображенні γ_1 . Тоді за теоремою Гейне – Бореля – Лебега існує скінченне підпокриття $\bigcup_{i=1}^p B(y_i, r_*/4)$ множини A_1 . Іншими словами,

$$A_1 \subset \bigcup_{i=1}^p B(y_i, r_i/4), \quad 1 \leq p < \infty, \quad (13)$$

де r_i позначає $r_*(y_i)$ при кожному $y_i \in \overline{D'}$.

Оскільки за припущенням випадку 1 $\gamma_m(t) \rightarrow \partial D$ при $t \rightarrow c_m - 0$ і $\Delta_m(t) \rightarrow \partial D$ при $t \rightarrow d_m - 0$ при всіх $m \in \mathbb{N}$, знайдуться послідовності точок $z_m^1 \in |\gamma_m|$ і $z_m^2 \in |\Delta_m|$ такі, що

$$d(z_m^1, \partial D) < 1/m, \quad d(z_m^2, \partial D) < 1/m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Нехай P_m — частина кривої γ_m в $\mathbb{M}^n$, розташована між точками x_m і z_m^1 , і Q_m — частина кривої Δ_m в $\mathbb{M}^n$, розташована між точками x'_m і z_m^2 . За побудовою $f(P_m) \subset A_1$ і $f(Q_m) \subset A_2$. Покладемо $\Gamma_m := \Gamma(P_m, Q_m, D \setminus \{x_0\})$. Далі запис $\Gamma_1 > \Gamma_2$ означає, що кожна крива $\gamma_1 \in \Gamma_1$ має підкриву $\gamma_2 \in \Gamma_2$. (Іншими словами, якщо $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{M}^n$, то $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{M}^n$, де $J \subset I$ і $\gamma_2(t) = \gamma_1(t)$ при $t \in J$, а I, J — деякі відрізки, інтервали, або півінтервали.) Тоді з огляду на (11), (13) та за твердженням 2

$$\Gamma_m > \bigcup_{i=1}^p \Gamma_{im}, \quad (15)$$

де $\Gamma_{im} := \Gamma_{f_m}(y_i, r_i/4, r_i/2)$. Покладемо $\tilde{Q}(y) = \max\{Q(y), 1\}$ і $\tilde{q}_{y_i}(r) = \int_{S(y_i, r)} \tilde{Q}(y) d\mathcal{A}$. Тоді також отримуємо, що $\tilde{q}_{y_i}(r) \neq \infty$ для майже всіх $r \in [r_i/4, r_i/2]$. Покладемо

$$I_i = I_i(y_i, r_i/4, r_i/2) = \int_{r_i/4}^{r_i/2} \frac{dr}{r \tilde{q}_{y_i}^{\frac{1}{n-1}}(r)}.$$

Зауважимо, що $I_i \neq 0$, оскільки $\tilde{q}_{y_i}(r) \neq \infty$ при майже всіх $r \in [r_i/4, r_i/2]$. Окрім того, зауважимо, що $I_i \neq \infty$, бо для деякої сталої $C^* > 0$

$$I_i \leq C^* \log \frac{r_2}{r_1} < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Покладемо

$$\eta_i(r) = \begin{cases} \frac{1}{I_i r \tilde{q}_{y_i}^{\frac{1}{n-1}}(r)}, & r \in [r_i/4, r_i/2], \\ 0, & r \notin [r_i/4, r_i/2]. \end{cases}$$

Зазначимо, що η_i задовольняє умову $\int_{r_i/4}^{r_i/2} \eta_i(r) dr = 1$, отже, її можна підставити у праву частину нерівності (4) з відповідними r_1 та r_2 . Тоді

$$M(\Gamma_{im}) \leq \int_{A(y_i, r_i/4, r_i/2)} \tilde{Q}(y) \eta_i^n(d_*(y, y_i)) dv_*(y). \quad (16)$$

Застосовуючи оцінку (12) у правій частині співвідношення (16), отримуємо

$$\begin{aligned} & \int_{A(y_i, r_i/4, r_i/2)} \tilde{Q}(y) \eta_i^n(d_*(y, y_i)) dv_*(y) \\ & \leq C_i \int_{r_i/4}^{r_i/2} \int_{S(y_i, r)} \tilde{Q}(y) \eta_i^n(d_*(y, y_i)) d\mathcal{A} dr \\ & = \frac{C_i}{I_i^n} \int_{r_i/4}^{r_i/2} r^{n-1} \tilde{q}_{y_i}(r) \frac{dr}{r^n \tilde{q}_{y_i}^{\frac{n}{n-1}}(r)} = \frac{C_i}{I_i^{n-1}}, \end{aligned} \quad (17)$$

де C_i — стала, що відповідає y_i у (12). Тоді з огляду на (16), (17) одержуємо, що $M(\Gamma_{im}) \leq \frac{C_i}{I_i^{n-1}}$, звідки з урахуванням (15)

$$M(\Gamma_m) \leq \sum_{i=1}^p M(\Gamma_{im}) \leq \sum_{i=1}^p \frac{C_i}{I_i^{n-1}} := C_0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Подальші міркування спираються на „слабку плоскість” ізольованої точки x_0 межі області $D \setminus \{x_0\}$. Передусім для будь-якої точки $z \in \partial D$, з огляду на співвідношення (14) та нерівність трикутника, при достатньо великих $m \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned} d(x_m, z_m^1) &\geq d(x_0, z) - d(z, z_m^1) - d(x_0, x_m) \\ &\geq d(x_0, z) - \frac{1}{m} - d(x_0, x_m) \geq \frac{1}{2}d(x_0, z) \geq \frac{1}{2}d(x_0, \partial D). \end{aligned}$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо, що $d(x'_m, z_m^2) \geq \frac{1}{2}d(x_0, \partial D)$. На підставі отриманих вище співвідношень

$$\max\{d(P_m), d(Q_m)\} \geq \max\{d(x_m, z_m^1), d(x'_m, z_m^2)\} \geq \frac{1}{2}d(x_0, \partial D)$$

для достатньо великих $m \in \mathbb{N}$.

Нехай $U := B(x_0, \delta_0/2)$ і V — окіл цієї ж точки x_0 , який відповідає твердженню 7 і зауваженню 3. Оскільки за припущенням $x_m, y_m \in D \setminus \{x_0\}$, $m = 1, 2, \dots$, то знайдеться номер $m_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $x_m, y_m \in V$ при всіх $m \geq m_0$. Зауважимо, що для $m \geq m_0$

$$P_m \cap \partial V \neq \emptyset, \quad Q_m \cap \partial V \neq \emptyset. \quad (19)$$

Справді, $x_m \in P_m$, $y_m \in Q_m$, тому $P_m \cap V \neq \emptyset \neq Q_m \cap V$ при $m \geq m_0$. Крім того, $\text{diam } V \leq \text{diam } U = \delta_0/2$ і, оскільки $d(P_m) \geq \delta_0 > 0$ і $d(Q_m) \geq \delta_0 > 0$ при всіх $m \in \mathbb{N}$, за твердженням 2 співвідношення (19) є справедливими. Аналогічно можна довести, що

$$P_m \cap \partial U \neq \emptyset, \quad Q_m \cap \partial U \neq \emptyset.$$

Тоді на підставі твердження 7 і зауваження 3

$$M(\Gamma_m) = M(\Gamma(P_m, Q_m, D \setminus \{x_0\})) > P, \quad m \geq m_0. \quad (20)$$

Останнє співвідношення суперечить (18), що завершує розгляд випадку 1.

Випадок 2. Нехай $\gamma_m(t) \rightarrow \partial D$ при $t \rightarrow c_m - 0$ і при всіх $m \in \mathbb{N}$, але при цьому існує $m_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\Delta_{m_0}(t) \rightarrow x_0$ при $t \rightarrow d_{m_0} - 0$ (див. рис. 2). Оскільки за припущенням $\gamma_m(t) \rightarrow \partial D$ при $t \rightarrow c_m - 0$ і всіх $m \in \mathbb{N}$ і $\Delta_{m_0}(t) \rightarrow \{x_0\}$ при $t \rightarrow d_{m_0} - 0$, то знайдуться послідовності точок $z_m^1 \in |\gamma_m|$ і $z_m^2 \in |\Delta_{m_0}|$ такі, що

$$d(z_m^1, \partial D) < 1/m, \quad d(z_m^2, \{x_0\}) < 1/m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Нехай P_m — частина кривої γ_m в $\mathbb{M}^n$, розташована між точками x_m і z_m^1 , а Q_m — частина кривої Δ_{m_0} в $\mathbb{M}^n$, розташована між точками x'_{m_0} і z_m^2 . Ми бачимо, що ситуація у відомому сенсі звелася до випадку 1, бо, міркуючи тепер аналогічно для P_m , Q_m і сім'ї кривих $\Gamma_m := \Gamma(P_m, Q_m, D \setminus \{x_0\})$, як це було у випадку 1, ми отримуємо, з одного боку, співвідношення (18), а з іншого — нерівність (20), які суперечать одна одній. Ми вже зауважили, що випадок 3 не вартий окремого розгляду, оскільки відрізняється від випадку 2 лише позначеннями.

Випадок 4. Існують $k_0, m_0 \in \mathbb{N}$ такі, що $\gamma_{k_0}(t) \rightarrow x_0$ при $t \rightarrow c_{k_0} - 0$ і $\Delta_{m_0}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow d_{m_0} - 0$ (див. рис. 3). З умови випливає, що знайдуться послідовності точок $z_m^1 \in |\gamma_{k_0}|$ і $z_m^2 \in |\Delta_{m_0}|$, $m = 1, 2, \dots$, такі, що

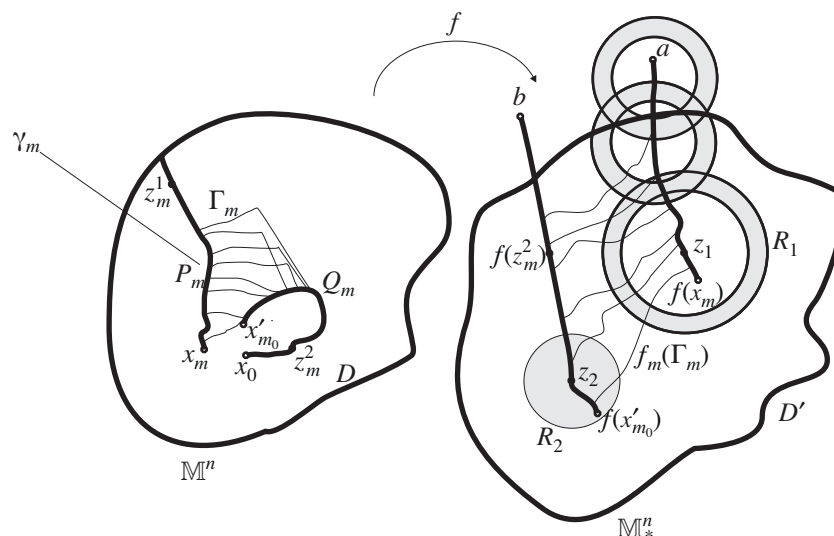


Рис. 2. До доведення теореми 1. Випадок 2.

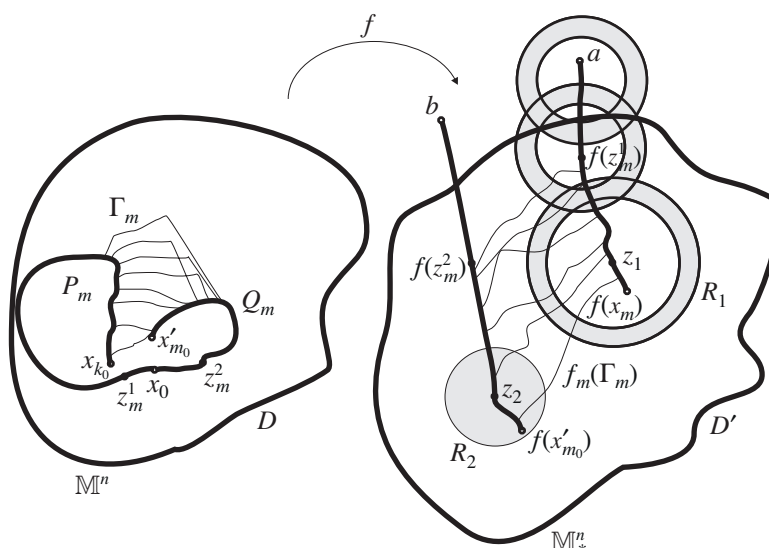


Рис. 3. До доведення теореми 1. Випадок 4.

$$d(z_m^1, x_0) < 1/m, \quad d(z_m^2, x_0) < 1/m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Нехай P_m — частина кривої γ_{k_0} в $\mathbb{M}^n$, розташована між точками x_{k_0} і z_m^1 , а Q_m — частина кривої Δ_{m_0} в $\mathbb{M}^n$, розташована між точками x'_{m_0} і z_m^2 . Як і вище, покладемо $\Gamma_m := \Gamma(P_m, Q_m, D \setminus \{x_0\})$. Міркуючи аналогічно випадку 1 для P_m і Q_m , ми знову отримуємо, з одного боку, співвідношення (18), а з іншого — нерівність (20), які суперечать одна одній. Отже, наявність неперервного продовження відображення f у точку x_0 доведено.

3.2. Відкритість та дискретність продовженого відображення. Логарифмічна неперервність за Гельдером. Нехай $U \subset \mathbb{M}^n$ і $V \subset \mathbb{M}_*^n$ — нормальні околи точок x_0 і $f(x_0)$ відповідно. Нехай, крім того, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ і $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ — відповідні гомеоморфізми цих околів у евклідовий простір. Можна вважати, що $\varphi(x_0) = \psi(f(x_0)) = 0$. Тоді $F(x) := (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x)$ —

відображення між околами $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ і $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ початку координат. За твердженням 4 F є відкритим і дискретним, тому таким є і відображення f .

Нехай $Q \in L^1(D')$. Тоді за твердженням 5 для кожної точки $y_0 \in \overline{D'}$ знайдеться $r_0 = r_0(y_0) > 0$ таке, що $q_{y_0}(r) < \infty$ при майже всіх $r \in (0, r_0)$. Зокрема, за підпунктом 3.1 відображення f має неперервне продовження у точку x_0 , а за доведеним вище є відкритим і дискретним у D . Крім того, за твердженням 6 відображення F задовольняє оцінку

$$\left| (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) - (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0) \right| = |F(z)| \leq \frac{C_n \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n} \left(1 + \frac{r_0}{|z|} \right)} \quad (21)$$

для всіх $z \in \varphi(U)$. Слід зауважити, що на підставі означення нормальних координат для довільних $x, y \in U$ і $f(x), f(y) \in V$ маємо

$$\begin{aligned} C_1 |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq d(x, y) \leq C_2 |\varphi(x) - \varphi(y)|, \\ C_3 |\psi(f(x)) - \psi(f(y))| &\leq d_*(f(x), f(y)) \leq C_4 |\psi(f(x)) - \psi(f(y))|, \end{aligned} \quad (22)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — деякі додатні сталі, близькі до 1 в достатньо малих околах U і V . Покладемо $\varphi^{-1}(z) = x$. Оскільки $\varphi^{-1}(0) = x_0$, з нерівності (21) отримуємо

$$\left| (\psi \circ f)(x) - (\psi \circ f)(x_0) \right| \leq \frac{C_n \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n} \left(1 + \frac{r_0}{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|} \right)}. \quad (23)$$

З (22) та (23) випливає, що

$$\frac{1}{C_4} \cdot d_*(f(x), f(x_0)) \leq \frac{C_n \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n} \left(1 + \frac{r_0}{\frac{1}{C_1} \cdot d(x, x_0)} \right)}. \quad (24)$$

З огляду на правило Лопіталя $\log^{1/n} \left(1 + \frac{1}{nt} \right) \sim \log^{1/n} \left(1 + \frac{1}{kt} \right)$ при $t \rightarrow +0$ для фіксованих $k, n > 0$. Тоді з (24) випливає, що

$$d_*(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\widetilde{C}_n \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n} \left(1 + \frac{r_0}{d(x, x_0)} \right)}, \quad x \in U.$$

Теорему доведено.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Дослідження авторів підтримано науковим проектом МОН України „Сучасні проблеми геометричної теорії функцій і відображень” (реєстраційний номер УкрІНТЕІ 0122U000821).

Авторські внески. Усі автори внесли рівний внесок у роботу.

Література

1. E. S. Afanasieva, V. I. Ryazanov, R. R. Salimov, *On mappings in the Orlicz–Sobolev classes on Riemannian manifolds*, J. Math. Sci., **181**, № 1, 1–17 (2012).
2. V. Gol'dshtein, E. Sevost'yanov, A. Ukhlov, *On the boundary behavior of weak $(p; q)$ -quasiconformal mappings*, J. Math. Sci., **270**, 420–427 (2023).
3. B. Klishchuk, R. Salimov, M. Stefanchuk, *On the asymptotic behavior at innity of one mapping class*, Proc. Intern. Geom. Center, **16**, № 1, 50–58 (2023).
4. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **448**, 1–40 (1969).
5. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Topological and metric properties of quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **488**, 1–31 (1971).
6. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Sci.-Business Media, LLC, New York (2009).
7. R. Salimov, *Estimation of the measure of the image of the ball*, Siberian Math. J., **53**, № 4, 739–747 (2012).
8. R. Salimov, *To a theory of ring Q -homeomorphisms with respect to a p -modulus*, J. Math. Sci., **196**, № 5, 679–692 (2014).
9. R. Salimov, B. Klishchuk, *On the behavior of one class of homeomorphisms at innity*, Ukr. Math. J., **74**, 1617–1628 (2022).
10. S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
11. J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
12. E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, *On mappings whose inverse satisfy the Poletsky inequality*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **45**, 259–277 (2020).
13. E. A. Sevost'yanov, *On mappings with the inverse Poletsky inequality on Riemannian manifolds*, Acta Math. Hungar., **167**, № 2, 576–611 (2022).
14. J. M. Lee, *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Springer, New York (1997).
15. E. A. Sevost'yanov, A. A. Markysh, *On Sokhotski–Casorati–Weierstrass theorem on metric spaces*, Complex Var. and Elliptic Equat., **64**, № 12, 1973–1993 (2019).
16. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer, Berlin etc. (1969).
17. K. Kuratowski, *Topology*, vol. 2, Academic Press, New York, London (1968).
18. С. О. Скворцов, *Локальна поведінка відображень метричних просторів з розгалуженням*, Укр. мат. вісн., **17**, № 4, 574–593 (2020); **English translation**: J. Math. Sci., **254**, № 3, 425–574 (2021).
19. W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Univ. Press, Princeton (1948).
20. C. J. Titus, G. S. Young, *The extension of interiorty with some applications*, Trans. Amer. Math. Soc., **103**, 329–340 (1962).
21. D. Ilyutko, E. Sevost'yanov, *On local properties of one class of mappings on Riemannian manifolds*, J. Math. Sci., **211**, № 5, 660–667 (2015).
22. E. A. Sevost'yanov, S. O. Skvortsov, O. P. Dovhopiatyi, *On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality*, J. Math. Sci., **252**, № 4, 541–557 (2021).
23. D. Ilyutko, E. Sevost'yanov, *On the equicontinuity of families of inverse mappings of Riemannian manifolds*, J. Math. Sci., **246**, № 5, 664–670 (2020).
24. Е. А. Севостьянов, С. А. Скворцов, *О локальном поведении одного класса обратных отображений*, Укр. мат. вестн., **15**, № 3, 399–417 (2018); **English translation**: J. Math. Sci., **241**, № 1, 77–89 (2019).
25. E. A. Sevost'yanov, *Isolated singularities of mappings with the inverse Poletsky inequality*, Mat. Stud., **55**, № 2, 132–136 (2021).

Одержано 13.01.24