

Микола Заболоцький¹, Тарас Заболоцький (Львівський національний університет імені Івана Франка)

ПОВОДЖЕННЯ СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ ЗОВНІ ВИНЯТКОВИХ МНОЖИН

Let v be a slowly growing function unbounded on $[0, +\infty)$, u be subharmonic (in plane) function of zero order, μ be its Riesz measure, $n(t, u) = \mu(\{x : |x| \leq t\})$, $N(t, u) = \int_1^t n(\tau, u)/\tau d\tau$, and $n(r, u) = O(v(r))$, $r \rightarrow +\infty$. A set $E \in \mathbb{C}$ is called a C_0^β -set, $0 < \beta \leq 1$, if E can be covered by a system of disks $K(a_n, r_n) = \{z : |z - a_n| < r_n\}$ such that $\sum_{|a_n| \leq r} r_n^\beta = o(r^\beta)$, $r \rightarrow +\infty$. Then, for every nondecreasing function ϕ unbounded on $[0, +\infty)$, there exists a C_0^β -set E such that

$$u(z) = N(r, u) + o(\phi(r)v(r)), \quad r = |z| \rightarrow +\infty, \quad z \notin E.$$

It is shown that, in this asymptotic formula, the remainder term $o(\phi(r)v(r))$ cannot be changed by $O(v(r))$.

Нехай v — повільно зростаюча, необмежена на $[0, +\infty)$ функція, u — субгармонічна в площині функція нульового порядку, μ — її міра Рісса, $n(t, u) = \mu(\{x : |x| \leq t\})$, $N(t, u) = \int_1^t n(\tau, u)/\tau d\tau$, $n(r, u) = O(v(r))$, $r \rightarrow +\infty$. Множину $E \in \mathbb{C}$ назвемо C_0^β -множиною, $0 < \beta \leq 1$, якщо її можна покрити системою кругів $K(a_n, r_n) = \{z : |z - a_n| < r_n\}$ таких, що $\sum_{|a_n| \leq r} r_n^\beta = o(r^\beta)$, $r \rightarrow +\infty$. Тоді для довільної неспадної необмеженої на $[0, +\infty)$ функції ϕ існує C_0^β -множина E така, що

$$u(z) = N(r, u) + o(\phi(r)v(r)), \quad r = |z| \rightarrow +\infty, \quad z \notin E.$$

Показано також, що у цій асимптотичній формулі залишковий член $o(\phi(r)v(r))$ не можна замінити на $O(v(r))$.

1. Вступ. Нехай u — субгармонічна в $\mathbb{R}^2$ функція, u -гармонічна в одиничному околі точки $z = 0$, $u(0) = 0$, μ — її міра Рісса, $n(t, u) = \mu(\{x : |x| \leq t\})$, $N(t, u) = \int_1^t n(\tau, u)/\tau d\tau$, $u^+(x) = \max\{u(x); 0\}$,

$$T(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^+(re^{i\phi}) d\phi$$

— характеристика Неванлінни функції u . Будемо говорити, що функція u нульового порядку, якщо $\ln T(r, u) = o(\ln r)$ при $r \rightarrow +\infty$.

Невід'ємну, неспадну, необмежену на $[0; +\infty)$ функцію називатимемо функцією порівняння. Через L позначимо множину неперервно диференційовних функцій порівняння v , для яких $tv'(t)/v(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Неважко показати, що $r^{\rho(r)} \in L$, де $\rho(r)$ — нульовий уточнений порядок (див., наприклад, [1, с. 49]), $r^{\rho(r)} \nearrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $v(t) = 0$ на $[0, \delta]$, $0 < \delta < 1$. Легко бачити (див., наприклад, [2, с. 7]), що з точністю до еквівалентних функцій L збігається з множиною повільно зростаючих функцій l , тобто додатних, неспадних на $[0, +\infty)$, таких, що $l(2t) \sim l(t)$, $t \rightarrow +\infty$.

Позначимо через $SH_0(v)$ клас субгармонічних в $\mathbb{R}^2$ функцій u нульового порядку таких, що $n(r, u) = O(v(r))$, $r \rightarrow +\infty$, $v \in L$.

¹ Відповідальний за листування, e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua.

Множину $E \in \mathbb{C}$ назовемо C_0^β -множиною, $0 < \beta \leq 1$, якщо її можна покрити системою кругів $K(z_n, r_n) = \{z : |z - z_n| \leq r_n\}$ такою, що $\sum_{|z_n| \leq r} r_n^\beta = o(r^\beta)$, $r \rightarrow +\infty$.

Покладемо

$$I(z, u) = \int_{|z-a| \leq |z|} \ln \left| \frac{z}{z-a} \right| d\mu(a) = \int_0^{|z|} \frac{n(t, z, u)}{t} dt,$$

де μ — міра Рісса функції u , $n(t, z, u) = \mu(K(z, t))$, $K(z, t) = \{w : |w - z| \leq t\}$.

Якщо u — субгармонічна функція нульового порядку така, що $N(r, u) = O(r^{\rho(r)})$, $r \rightarrow +\infty$, то в [3] доведено такі твердження:

(А) $u(z) = -I(z, u) + N(r, u) + o(r^{\rho(r)})$, $r \rightarrow +\infty$;

(Б) існує C_0^β -множина E така, що

$$I(z, u) = o(r^{\rho(r)}), \quad z \notin E, \quad z \rightarrow \infty.$$

Для $v \in L$ прийнемо $v_1(r) = \int_1^r \frac{v(t)}{t} dt$. Неважко показати, що $v_1 \in L$ і $v(r) = o(v_1(r))$ при $r \rightarrow +\infty$.

Легко бачити, що для функції $u \in SH_0(v)$ виконується $N(r, u) = O(v_1(r))$, $r \rightarrow +\infty$. Покладаючи $\rho(r) = \ln v_1(r) / \ln r$, отримуємо, що $\rho(r)$ — нульовий уточнений порядок, а отже, для $u \in SH_0(v)$ справджуються твердження (А) та (Б) з $r^{\rho(r)} = v_1(r)$.

У цій статті для функцій класу $SH_0(v)$ отримано уточнення тверджень (А) і (Б), в яких замість залишкового члена $o(r^{\rho(r)})$ відповідно маємо $O(v(r))$ та $o(\phi(r)v(r))$, де ϕ — довільна необмежено зростаюча на $[0, +\infty)$ функція. Також показано, що в твердженні (Б) залишковий член $o(\phi(r)v(r))$ не можна замінити на $O(v(r))$ при $r \rightarrow +\infty$.

2. Формулювання результатів і допоміжні твердження. Нехай далі $r = |z|$, $v \in L$. Правильними є такі твердження.

Теорема 1. Якщо $u \in SH_0(v)$, то

$$u(z) = -I(z, u) + N(r, u) + O(v(r)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (1)$$

Теорема 2. Нехай $u \in SH_0(v)$, ϕ — довільна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція. Тоді для кожного $\beta \in (0, 1]$ існує C_0^β -множина E така, що

$$I(z, u) = o(\phi(r)v(r)), \quad z \rightarrow \infty, \quad z \notin E. \quad (2)$$

Наслідок 1. Якщо $u \in SH_0(v)$, то для довільної зростаючої до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функції ϕ і кожного $\beta \in (0, 1]$ існує C_0^β -множина E така, що

$$u(z) = N(r, u) + o(\phi(r)v(r)), \quad z \rightarrow \infty, \quad z \notin E. \quad (3)$$

Теорема 3. Для довільних $v \in L$ і $A > 0$ існує $u \in SH_0(v)$ така, що множина $\{z : u(z) - N(r, u) < -Av(r)\}$ не є C_0^β -множиною для жодного $\beta \in (0, 1]$.

Зауваження 1. Теорема 3 показує, що залишковий член вигляду $o(\phi(r)v(r))$ не можна замінити на $O(v(r))$ у асимптотичних співвідношеннях (2) та (3).

При доведенні цих результатів будемо використовувати твердження, які сформулюємо у вигляді лем.

Нехай μ — довільна міра в $\mathbb{C}$, $\mu(\mathbb{C}) < +\infty$, $\mu(t, z) = \mu(K(z, t))$,

$$U_\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \ln \frac{1}{|z-a|} d\mu(a) = \int_0^{+\infty} \ln \frac{1}{t} d\mu(t, z).$$

Лема 1. Нехай $h(r)$, $0 \leq r \leq r_0$, — зростаюча функція, $h(0) = 0$, $h(r_0) = \mu(\mathbb{C})$. Тоді множини G точок, для яких виконується нерівність

$$U_\mu(z) > \int_0^{r_0} \ln \frac{1}{t} dh(t),$$

можна покрити сім'єю кругів $K(a_n, r_n)$, $r_n < r_0$, що задовольняють умову

$$\sum_n h(r_n) \leq C\mu(\mathbb{C}),$$

де C — абсолютна стала.

Доведення лема 1 аналогічне доведенню теореми 3.15 з [4].

Лема 2 [2, с. 64–66]. Нехай l — повільно змінна, а ψ — локально інтегровна на $[0, +\infty)$ функції, $a > 0$ і для деякого $\eta > 0$ інтеграл $\int_a^{+\infty} t^\eta \psi(t) dt$ є збіжним. Тоді

$$\int_a^{+\infty} \psi(t) l(xt) dt \sim l(x) \int_a^{+\infty} \psi(t) dt, \quad x \rightarrow +\infty.$$

3. Доведення теорем 1, 2. Нехай $u \in SH_0(v)$, $D(z, a) = \{a \in \mathbb{C} : |z-a| > r, |a| \leq 2r\}$, $r = |z|$. Маємо

$$u(z) = \int_{|a| \leq 2r} \ln \left| 1 - \frac{z}{a} \right| d\mu(a) + \int_{|a| > 2r} \ln \left| 1 - \frac{z}{a} \right| d\mu(a) = I_1 + I_2. \quad (4)$$

Оскільки $n(r, u) = O(v(r))$, $v(2r) = (1+o(1))v(r)$, $N(2r, u) = N(r, u) + O(v(r))$ при $r \rightarrow +\infty$, то

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|z-a| \leq r} \ln \left| \frac{z-a}{a} \right| d\mu(a) + \int_{D(z,a)} \ln \left| \frac{z-a}{a} \right| d\mu(a) \\ &= -I(z, u) + \int_{D(z,a)} \ln \frac{|z-a|}{r} d\mu(a) + \int_{|a| \leq 2r} \ln \frac{r}{|a|} d\mu(a) \\ &= -I(z, u) + N(2r, u) + \int_{D(z,a)} \ln \frac{|z-a|}{r} d\mu(a) - n(2r, u) \cdot \ln 2 \end{aligned}$$

$$= -I(z, u) + N(r, u) + \int_{D(z, a)} \ln \frac{|z - a|}{r} d\mu(a) + O(v(r)), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Враховуючи, що

$$0 \leq \int_{D(z, a)} \ln \frac{|z - a|}{r} d\mu(a) \leq n(2r, u) \ln 3 = O(v(r)), \quad r \rightarrow +\infty,$$

з останнього співвідношення отримуємо

$$I_1 = -I(z, u) + N(r, u) + O(v(r)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Далі, для $|a| > 2r$ маємо $\ln\left(1 - \frac{r}{|a|}\right) \leq \ln\left|1 - \frac{z}{a}\right| \leq \ln\left(1 + \frac{r}{|a|}\right) \leq -\ln\left(1 - \frac{r}{|a|}\right)$, а отже,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq - \int_{2r}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{r}{t}\right) dn(t, u) \\ &= - \ln\left(1 - \frac{r}{t}\right) n(t, u) \Big|_{2r}^{+\infty} + r \int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t, u)}{t(t-r)} dt \\ &\leq 2r \int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t, u)}{t^2} dt = O(r) \int_{2r}^{+\infty} \frac{v(t)}{t^2} dt, \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (6)$$

За лемою 2 з $\eta = \frac{1}{2}$, $\psi(\tau) = \frac{1}{\tau^2}$ одержуємо

$$r \int_{2r}^{+\infty} \frac{v(t)}{t^2} dt = \int_2^{+\infty} \frac{v(\tau r)}{\tau^2} d\tau = \frac{1 + o(1)}{2} v(r), \quad r \rightarrow +\infty,$$

і з (4)–(6) випливає твердження теореми 1.

Нехай μ — міра Рісса функції $u \in SH_0(v)$, $R_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \beta \leq 1$, а μ' — міра, що визначається рівністю $\mu'(e) = \mu(e \cap K(0, 2R_n))$. Покладемо

$$U(z) = \int_{K(0, 2R_n)} \ln \frac{4R_n}{|z - a|} d\mu'(a) \geq \int_{|z-a| \leq r} \ln \frac{4R_n}{|z - a|} d\mu'(a).$$

Для z , $|z| \leq R_n$, маємо $I(z, u) \leq U(z)$. Нехай $h(t) = \beta 4^{-\beta} n(2R_n, u) \left(\frac{t}{R_n}\right)^\beta \sqrt{\phi(R_n)}$, $t \geq 0$, де ϕ — довільна додатна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція. Прийmemo

$$h_n(t) = \begin{cases} h(t), & 0 \leq t < r_n^0, \\ n(2R_n, u), & t \geq r_n^0, \end{cases}$$

де $r_n^0 = \min \left\{ 4R_n, 4R_n \left(\sqrt{\phi(R_n)} \beta \right)^{-1/\beta} \right\}$. Легко бачити, що $h_n(0) = 0$, $h_n(r_n^0) = n(2R_n, u) = \mu'(\mathbb{C})$, $h_n(t)$ — зростаюча на $[0, +\infty)$ функція. За лемою 1 зовні множини G_n , яку можна покрити системою кругів $K(a_k^{(n)}, r_k^{(n)})$, що задовольняють умову

$$\sum_k (r_k^{(n)})^\beta \leq C \cdot 4^\beta \beta^{-1} \frac{1}{\sqrt{\phi(R_n)}} R_n^\beta = \frac{C_1}{\sqrt{\phi(R_n)}} R_n^\beta,$$

виконуються нерівності

$$\begin{aligned} U(z) &\leq \int_0^{r_n^0} \ln \frac{4R_n}{t} dh_n(t) \leq \int_0^{4R_n} \ln \frac{4R_n}{t} dh(t) = \int_0^{4R_n} \frac{h(t)}{t} dt \\ &= n(2R_n, u) \beta (4R_n)^{-\beta} \sqrt{\phi(R_n)} \int_0^{4R_n} t^{\beta-1} dt = n(2R_n, u) \sqrt{\phi(R_n)}. \end{aligned}$$

Таким чином, для $z \in K(0, R_n) \setminus G_n$

$$I(z, u) \leq n(2R_n, u) \sqrt{\phi(R_n)}. \quad (7)$$

Виділимо з сукупності кругів $K(a_k^{(n)}, r_k^{(n)})$, що покривають множину G_n , ті круги, для яких виконується

$$K(a_k^{(n)}, r_k^{(n)}) \cap \{z : R_{n-1} \leq |z| < R_n\} \neq \emptyset,$$

і позначимо їх через E_n . Для цих кругів при $n \geq n_0 > 2$ маємо $|a_k^{(n)}| > R_{n-2}$. Прийmemo $E = \left(\bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} E_n \right) \cup K(0, R_{n_0})$. Стандартним методом (див., наприклад, [3]) доводиться, що E є C_0^β -множиною. Тепер з (7) для z , $R_{n-1} \leq |z| < R_n$, $z \notin E$, отримуємо $I(z, u) = o(\phi(r)v(r))$, $r \rightarrow +\infty$, що доводить теорему 2.

4. Доведення теореми 3. Легко бачити, що для $\alpha > 0$ і довільної $v \in L$ виконується $v(r) = o(r^\alpha)$, $r \rightarrow +\infty$. Тому вважаємо, що $v(r) < \frac{1}{2}\sqrt{r}$ при $r \geq r_1 > 0$. Нехай зростаюча до $+\infty$ послідовність чисел (r_n) така, що $\frac{v(r_k)}{v(r_{k+1})} < \frac{1}{2}$, $\frac{r_k}{\sqrt{r_{k+1}}} < \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. Прийmemo

$$u(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} n_k \ln \left| 1 - \frac{z}{r_k} \right|,$$

де $n_1 = v(r_1)$, $n_k = v(r_k) - v(r_{k-1})$, $k \geq 2$. Для $r_m \leq r = |z| < r_{m+1}$ маємо $n(r, u) = \sum_{k=1}^m n_k = v(r_m) \leq v(r)$, тобто $u \in SH_0(v)$.

Для $z \in K(r_m, \varepsilon r_m)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, одержуємо

$$u(z) \leq \sum_{k=1}^{m-1} n_k \left(\ln \frac{r}{r_k} + \ln \left(1 + \frac{r_k}{r} \right) \right) + n_m \ln \varepsilon + \sum_{k=m+1}^{+\infty} n_k \ln \left(1 + \frac{r}{r_k} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &\leq N(r, u) + \sum_{k=1}^{m-1} n_k \frac{r_k}{r_m(1-\varepsilon)} + v(r_m) \left(1 - \frac{v(r_{m-1})}{v(r_m)} \right) \ln \varepsilon + \sum_{k=m+1}^{+\infty} n_k \frac{(1+\varepsilon)r_m}{r_k} \\
 &\leq N(r, u) + \frac{1}{\sqrt{r_m}} \sum_{k=1}^{m-1} n_k + \frac{1}{2} v(r_m) \ln \varepsilon + 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{n_k}{\sqrt{r_k}} \frac{r_m}{\sqrt{r_k}} \\
 &\leq N(r, u) + \frac{v(r_m)}{\sqrt{r_m}} + \frac{1}{4} v(r) \ln \varepsilon + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{r_m}{\sqrt{r_k}} \\
 &\leq N(r, u) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} v(r) \ln \varepsilon + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-m}} \\
 &< N(r, u) + 2 + \frac{1}{4} v(r) \ln \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Легко бачити, що $E_0 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} K(r_i, \varepsilon r_i)$ не є C_0^β -множиною. Покладаючи $\varepsilon = e^{-4(A+1)}$ при $z \in E_0$, отримуємо $u(z) - N(r, u) < -Av(r)$, що доводить теорему 3.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Автори заявляють, що під час підготовки цього рукопису не було отримано коштів, грантів чи іншої підтримки.

Авторські внески. Усі автори внесли рівний внесок у роботу.

Література

1. A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii, *Value distributions of meromorphic functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2008).
2. E. Seneta, *Regularly varying functions*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1976).
3. A. A. Goldberg, M. V. Zabolotsky, *Concentration index of a subharmonic function of zeroth order*, Math. Notes, **34**, № 1-2, 596–601 (1983).
4. N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1972).

Одержано 20.02.24