

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ З ОБМЕЖЕНОЮ ДОМІНУЮЧОЮ МІШАНОЮ ПОХІДНОЮ

We establish exact order estimates for approximations of the Sobolev classes $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ of periodic functions of many variables with bounded dominant mixed derivative. The approximation is performed by using trigonometric polynomials with spectra in step hyperbolic crosses, and the error is estimated in the metric of the space $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p, q < \infty$.

Встановлено точні за порядком оцінки наближення класів Соболева $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ періодичних функцій багатьох змінних з обмеженою домінуючою мішаною похідною. Наближення здійснюється за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у східчастих гіперболічних хрестах, а похибка оцінюється в метриці простору $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p, q < \infty$.

1. Вступ. У цій статті досліджуються питання апроксимації класів Соболева $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ періодичних функцій багатьох змінних з обмеженою домінуючою мішаною похідною у просторі $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p, q < \infty$, норма в якому є більш „сильною”, ніж $L_q(\mathbb{T}^d)$ -норма. В якості агрегатів наближення функцій із цих класів використовуються тригонометричні поліноми з гармоніками зі східчастих гіперболічних хрестів. У випадку $1 < q < \infty$ порядки найкращих наближень зазначеними поліномами реалізуються за наближення функцій їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є.

Мотивацією до дослідження апроксимаційних характеристик класів $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q < \infty$, є та обставина, що в результаті досліджень, проведених, зокрема, у роботах [1–9], де вивчалися питання апроксимації класів періодичних функцій багатьох змінних мішаної гладкості (Соболева $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$, Нікольського – Бесова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$) та деяких їхніх аналогів у просторі $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$, $q \in \{1, \infty\}$, відбулося суттєве просування в оцінках апроксимаційних характеристик згаданих класів функцій у порівнянні з відомими на той час відповідними оцінками в L_q -просторі. Крім цього також було виявлено, що у переважній більшості ситуацій у багатовимірному випадку, на відміну від одновимірного, відповідні апроксимаційні характеристики в просторах $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$ і $L_q(\mathbb{T}^d)$, $q \in \{1, \infty\}$, мають різні порядки. Таким чином, з огляду на викладене, природним є інтерес до дослідження апроксимаційних характеристик класів $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$ при $1 \leq q, p < \infty$.

У статті отримано доповнення й узагальнення деяких результатів, одержаних у роботах [1–9]. При цьому було виявлено специфіку багатовимірної апроксимації класів $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$, у порівнянні з $L_q(\mathbb{T}^d)$ -простором. Більш детально про це буде йти мова в коментарях до одержаних результатів.

2. Означення функціональних класів. Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — евклідов простір з елементами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ і $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$. Через $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо простір функцій f , які є 2π -періодичними за кожною змінною зі скінченною нормою:

¹ Відповідальний за листування, e-mail: yan.sergiy@gmail.com.

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|.$$

Також будемо розглядати множину функцій $L_p^0(\mathbb{T}^d)$, яка визначається таким чином:

$$L_p^0(\mathbb{T}^d) := \left\{ f : f \in L_p(\mathbb{T}^d), \int_0^{2\pi} f(\mathbf{x}) dx_j = 0, j = \overline{1, d}, \text{ майже скрізь} \right\}.$$

Далі, з метою спрощення записів, будемо використовувати позначення L_p замість $L_p(\mathbb{T}^d)$ і L_p^0 замість $L_p^0(\mathbb{T}^d)$.

Нехай $F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = 2^d \sum_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

і підсумовування проводиться за векторами $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$, для яких $k_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Тоді через $W_{p, \boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^d)$ позначимо клас функцій f , які можна подати у вигляді

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) * F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) F_{\mathbf{r}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{y}, \quad (1)$$

$$\varphi \in L_p(\mathbb{T}^d), \quad \|\varphi\|_p \leq 1,$$

де $*$ означає операцію згортки.

Функцію φ у зображенні (1) називають $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha})$ -похідною функції f і позначають $f_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{r})}$. Зауважимо, що у випадку $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ класи $W_{p, \mathbf{0}}^{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^d)$ будемо позначати $W_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^d)$ і відповідно $f_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{r})} := f^{(\mathbf{r})}$.

При доведенні оцінок зверху апроксимаційних характеристик класів $W_{p, \boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^d)$ буде зручно отримувати їх для більш широких класів Нікольського – Бесова $B_{p, \theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^d)$ при певних значеннях параметра θ . Нагадаємо означення цих класів у термінах так званого декомпозиційного нормування (див. [10], зауваження 2.1).

Нехай $V_l(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$, позначає ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^l \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l}\right) \cos kt,$$

де при $l = 1$ третій доданок вважаємо рівним нулеві. Кожному вектору $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j}-1}(x_j))$$

і для $f \in L_p^0$, $1 \leq p \leq \infty$, покладемо

$$A_s(f) := A_s(f, x) = (f * A_s)(x).$$

Тоді при $1 \leq p \leq \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, класи $B_{p, \theta}^r(\mathbb{T}^d)$ можна означити таким чином:

$$B_{p, \theta}^r(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L_p^0 : \|f\|_{B_{p, \theta}^r(\mathbb{T}^d)} \leq 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p, \theta}^r(\mathbb{T}^d)} \asymp \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{B_{p, \infty}^r(\mathbb{T}^d)} \equiv \|f\|_{H_p^r(\mathbb{T}^d)} \asymp \sup_{s \in \mathbb{N}^d} 2^{(s, r)} \|A_s(f)\|_p.$$

Тут і далі для додатних величин a і b використовуємо запис $a \asymp b$, який означає, що існують такі додатні сталі C_1 і C_2 (які не залежать від одного істотного параметра у величинах a і b), що $C_1 a \leq b$ (пишемо $a \ll b$) і $C_2 a \geq b$ (пишемо $a \gg b$). Всі сталі C_i , $i = 1, 2, \dots$, які зустрічаються у статті, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Зауважимо, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати означення норми з класів $B_{p, \theta}^r(\mathbb{T}^d)$ у дещо іншій формі, а саме з використанням „блоків” ряду Фур’є функції f . Для цього нам знадобляться деякі позначення.

Для векторів $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$, покладемо

$$\rho(s) := \{k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\}$$

і для $f \in L_p^0$ позначимо

$$\delta_s(f) := \delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

де $\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$ — коефіцієнти Фур’є функції f .

Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Тоді класи $B_{p, \theta}^r(\mathbb{T}^d)$ можна означити таким чином [10]:

$$B_{p, \theta}^r(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L_p^0 : \|f\|_{B_{p, \theta}^r(\mathbb{T}^d)} \leq 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p, \theta}^r(\mathbb{T}^d)} \asymp \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} 2^{(s, r)\theta} \|\delta_s(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (2)$$

при $1 \leq \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{B_{p, \infty}^r(\mathbb{T}^d)} \equiv \|f\|_{H_p^r(\mathbb{T}^d)} \asymp \sup_{s \in \mathbb{N}^d} 2^{(s, r)} \|\delta_s(f)\|_p.$$

Нагадаємо, що для введених класів справджуються такі вкладення:

$$\begin{aligned}
B_{p,p}^r(\mathbb{T}^d) &\subset W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d) \subset B_{p,2}^r(\mathbb{T}^d), \quad 1 < p \leq 2, \\
B_{p,2}^r(\mathbb{T}^d) &\subset W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d) \subset B_{p,p}^r(\mathbb{T}^d), \quad 2 \leq p < \infty, \\
W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d) &\subset B_{p,\infty}^r(\mathbb{T}^d) \equiv H_p^r(\mathbb{T}^d), \quad 1 \leq p \leq \infty.
\end{aligned} \tag{3}$$

Зокрема, при $\theta = p = 2$

$$W_{2,\alpha}^r(\mathbb{T}^d) \subset B_{2,2}^r(\mathbb{T}^d) \subset W_{2,\alpha}^r(\mathbb{T}^d).$$

Далі замість $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$, $H_p^r(\mathbb{T}^d)$ і $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ для спрощення записів також будемо писати $W_{p,\alpha}^r$, H_p^r і $B_{p,\theta}^r$; це не повинно створювати непорозуміннь, оскільки в роботі розглядаються лише такі класи функцій.

У подальших міркуваннях будемо вважати, що координати векторів $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$, які входять в означення класів, впорядковані таким чином: $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d$. Вектору $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ поставимо у відповідність вектор $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = \overline{1, d}$, а вектору $\boldsymbol{\gamma}$, в свою чергу, — вектор $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, де $\gamma'_j = \gamma_j$, якщо $j = \overline{1, \nu}$ і $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \overline{\nu+1, d}$.

Тепер наведемо означення норми у підпросторі $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$ (далі пишемо $B_{q,1}$) функцій $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$.

Для тригонометричних поліномів t за кратною тригонометричною системою $\{e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ норма $\|t\|_{B_{q,1}}$ визначається згідно з формулою

$$\|t\|_{B_{q,1}} := \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d} \|A_{\mathbf{s}}(t)\|_q.$$

Аналогічно означається норма $\|f\|_{B_{q,1}}$ для будь-якої функції $f \in L_q$ такої, що ряд $\sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d} \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_q$ збігається.

Зауважимо, що у випадку $1 < q < \infty$

$$\|f\|_{B_{q,1}} \asymp \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q. \tag{4}$$

Крім того, для $f \in B_{q,1}$, $1 \leq q \leq \infty$, виконуються співвідношення

$$\|f\|_q \ll \|f\|_{B_{q,1}} \quad \text{і} \quad \|f\|_{B_{1,1}} \ll \|f\|_{B_{q,1}} \ll \|f\|_{B_{\infty,1}}. \tag{5}$$

З історією дослідження різних апроксимаційних характеристик класів $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$, $H_p^r(\mathbb{T}^d)$ і $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq \theta < \infty$, у просторах $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, можна ознайомитися у монографіях [11–16] і, зокрема, у просторах $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$, $q \in \{1, \infty\}$ — у роботах [1–9, 17–19].

3. Апроксимаційні характеристики і допоміжні твердження. Для $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d$ і $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $\gamma_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, позначимо множину

$$Q_n^\gamma := \bigcup_{(\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}) < n} \rho(\mathbf{s}),$$

яку називають східчастим гіперболічним хрестом. У випадку, коли розглядається вектор $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, відповідну множину будемо позначати $Q_n^{\boldsymbol{\gamma}'}$ і, зокрема, при $\boldsymbol{\gamma} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$ — Q_n^1 .

Поставимо у відповідність множині Q_n^γ сукупність тригонометричних поліномів вигляду

$$T(Q_n^\gamma) := \left\{ t: t(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q_n^\gamma} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, \quad c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\}$$

і для $f \in L_1^0$ покладемо

$$S_{Q_n^\gamma}(f) := S_{Q_n^\gamma}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q_n^\gamma} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}.$$

Поліноми $S_{Q_n^\gamma}(f)$ називають східчасто-гіперболічними сумами Фур'є функцій f . Згідно з прийнятими позначеннями, їх також можна записати у вигляді

$$S_{Q_n^\gamma}(f) = \sum_{(\mathbf{s}, \gamma) < n} \delta_{\mathbf{s}}(f).$$

Для означених множин тригонометричних поліномів будемо розглядати наступні апроксимаційні характеристики.

Нехай $\mathcal{X}$ — деякий функціональний простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$. Тоді для $f \in \mathcal{X}$ позначимо через

$$E_{Q_n^\gamma}(f)_{\mathcal{X}} := \inf_{t \in T(Q_n^\gamma)} \|f - t\|_{\mathcal{X}}$$

величину найкращого наближення функції f за допомогою поліномів з множин $T(Q_n^\gamma)$.

Відповідно для функціонального класу $F \subset \mathcal{X}$ покладемо

$$E_{Q_n^\gamma}(F)_{\mathcal{X}} := \sup_{f \in F} E_{Q_n^\gamma}(f)_{\mathcal{X}}. \quad (6)$$

Паралельно з величинами (6) ми досліджуємо також наближення функцій із класів F їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є, тобто величини

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(F)_{\mathcal{X}} := \sup_{f \in F} \|f - S_{Q_n^\gamma}(f)\|_{\mathcal{X}}. \quad (7)$$

Більш конкретно, ми встановлюємо точні за порядком оцінки величин (6) і (7) (інколи при $\gamma = \gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$) для класів $F = W_{p, \alpha}^r$ і просторів $\mathcal{X} = B_{q, 1}$, $1 \leq p, q < \infty$.

У коментарях до одержаних результатів будемо звертатися до одновимірного випадку, тому наведемо відповідні модифікації означень величин (6) і (7).

Для $F \subset \mathcal{X}$ позначимо

$$E_{2^n}(F)_{\mathcal{X}} := \sup_{f \in F} \inf_{t \in T(2^n)} \|f - t\|_{\mathcal{X}},$$

де

$$T(2^n) := \left\{ t: t(x) = \sum_{k=-2^n}^{2^n} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Відповідно до означення величини (7) покладемо

$$\mathcal{E}_{2^n}(F)_{\mathcal{X}} := \sup_{f \in F} \|f - S_{2^n}(f)\|_{\mathcal{X}},$$

де

$$S_{2^n}(f) := S_{2^n}(f, x) := \sum_{k=-2^n}^{2^n} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Перед тим як безпосередньо перейти до викладу одержаних результатів, відмітимо важливе співвідношення між означеними величинами у випадку $f \in B_{q,1}$, $1 < q < \infty$.

Нехай $\mathbb{S}_{Q_n^\gamma}$ позначає оператор Фур'є, який ставить у відповідність функції $f \in B_{q,1}$, $1 < q < \infty$, її східчасто-гіперболічну суму Фур'є $S_{Q_n^\gamma}(f)$, тобто $\mathbb{S}_{Q_n^\gamma} f = S_{Q_n^\gamma}(f)$. Легко переконатися, що норма оператора $\mathbb{S}_{Q_n^\gamma}$ з $B_{q,1}$ в $B_{q,1}$, $1 < q < \infty$ (позначення $\|\mathbb{S}_{Q_n^\gamma}\|_{B_{q,1} \rightarrow B_{q,1}}$), є обмеженою.

Згідно з означенням маємо

$$\begin{aligned} \|\mathbb{S}_{Q_n^\gamma}\|_{B_{q,1} \rightarrow B_{q,1}} &= \sup_{\|f\|_{B_{q,1}} \leq 1} \|S_{Q_n^\gamma}(f)\|_{B_{q,1}} \asymp \sup_{\|f\|_{B_{q,1}} \leq 1} \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s(S_{Q_n^\gamma}(f))\|_q \\ &= \sup_{\|f\|_{B_{q,1}} \leq 1} \sum_{(s, \gamma) < n} \|\delta_s(f)\|_q \leq \sup_{\|f\|_{B_{q,1}} \leq 1} \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s(f)\|_q \leq C_3(q). \end{aligned} \quad (8)$$

Далі, нехай $t^* \in T(Q_n^\gamma)$ — поліном найкращого наближення функції $f \in B_{q,1}$. Тоді, з одного боку, беручи до уваги, що $S_{Q_n^\gamma}(t^*) = t^*$, і використовуючи (8), запишемо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(f)_{B_{q,1}} &= \|f - S_{Q_n^\gamma}(f)\|_{B_{q,1}} = \|f - t^* + t^* - S_{Q_n^\gamma}(f)\|_{B_{q,1}} \\ &\leq \|f - t^*\|_{B_{q,1}} + \|S_{Q_n^\gamma}(f) - t^*\|_{B_{q,1}} = \|f - t^*\|_{B_{q,1}} + \|S_{Q_n^\gamma}(f - t^*)\|_{B_{q,1}} \\ &\leq E_{Q_n^\gamma}(f)_{B_{q,1}} + \|\mathbb{S}_{Q_n^\gamma}\|_{B_{q,1} \rightarrow B_{q,1}} \|f - t^*\|_{B_{q,1}} \\ &\leq E_{Q_n^\gamma}(f)_{B_{q,1}} + C_3(q) E_{Q_n^\gamma}(f)_{B_{q,1}} = C_4(q) E_{Q_n^\gamma}(f)_{B_{q,1}}. \end{aligned} \quad (9)$$

З іншого боку, безпосередньо з означень величин (6) і (7) для $f \in B_{q,1}$ маємо

$$E_{Q_n^\gamma}(f)_{B_{q,1}} \leq \mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(f)_{B_{q,1}}. \quad (10)$$

Зіставляючи (9) і (10), отримуємо

$$E_{Q_n^\gamma}(f)_{B_{q,1}} \asymp \mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(f)_{B_{q,1}}, \quad 1 < q < \infty. \quad (11)$$

Зрозуміло, що співвідношення (11) справедливе і по відношенню до величин $E_{Q_n^{\gamma'}}(f)_{B_{q,1}}$, $\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(f)_{B_{q,1}}$ і, зокрема, до $E_{Q_n^1}(f)_{B_{q,1}}$, $\mathcal{E}_{Q_n^1}(f)_{B_{q,1}}$, а також $E_{2^n}(f)_{B_{q,1}}$, $\mathcal{E}_{2^n}(f)_{B_{q,1}}$.

Нагадаємо означення ще однієї апроксимаційної характеристики, яку не досліджуємо у цій статті, але її відомі оцінки будемо використовувати при встановленні оцінок знизу величин $E_{Q_n^\gamma}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}}$ і $\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}}$.

Нехай $\mathcal{Y}$ — нормований простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$, $\mathfrak{L}_M(\mathcal{Y})$ — сукупність підпросторів у просторі $\mathcal{Y}$ розмірності, що не перевищує M , і W — центрально-симетрична множина в $\mathcal{Y}$. Величина

$$d_M(W, \mathcal{Y}) := \inf_{L_M \in \mathfrak{L}_M(\mathcal{Y})} \sup_{w \in W} \inf_{u \in L_M} \|w - u\|_{\mathcal{Y}}$$

називається M -вимірним колмогоровським поперечником множини W у просторі $\mathcal{Y}$ (колмогоровським поперечником). Поперечник $d_M(W, \mathcal{X})$ увів у 1936 році А. М. Колмогоров [20], він характеризує апроксимаційні можливості M -вимірних підпросторів.

Наведемо деякі допоміжні твердження.

Лема А [11] (Вступ). *Справджується співвідношення*

$$\sum_{(s,\gamma') \geq l} 2^{-\beta(s,\gamma)} \asymp 2^{-\beta l} l^{\nu-1}, \quad \beta > 0.$$

Теорема А [21]. *Нехай $d \geq 1$, $1 < p < \infty$, $r_1 > 0$. Тоді при $\alpha \in \mathbb{R}^d$ справедливою є оцінка*

$$d_M(W_{p,\alpha}^r, B_{1,1}) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2}}.$$

Теорема Б [22]. *Нехай $n = (n_1, \dots, n_d)$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, i*

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq n_j} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тоді при $1 \leq q < p < \infty$ виконується нерівність

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|t\|_q. \quad (12)$$

Нерівність (12) встановлена С. М. Нікольським і відома як „нерівність різних метрик”.

Лема Б [11] (гл. 1, § 3). *Нехай $1 \leq p < q < \infty$ і $f \in L_p^0$. Тоді*

$$\|f\|_q^q \ll \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s(f)\|_p^q 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)q},$$

де $\|s\|_1 = s_1 + \dots + s_d$.

Наступне твердження відоме в математичній літературі як нерівність Бернштейна для тригонометричних поліномів з множини $T(Q_n^1)$.

Теорема В [11] (гл. 1, § 3). *Нехай $1 < p < \infty$. Тоді при $r_1 \geq 0$ справджується співвідношення*

$$\sup_{t \in T(Q_n^1)} \|t^{(r)}\|_p / \|t\|_p \asymp 2^{nr_1}.$$

4. Наближення класів $W_{p,\alpha}^r$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є і їхні найкращі наближення у просторі $B_{q,1}$. Справедливою є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $d \geq 2$, $1 < p < \infty$, $r_1 > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Тоді виконуються співвідношення*

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \asymp \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\xi}, \quad (13)$$

де $\xi = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{p'}\right\}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху величини $\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}}$, з якої, згідно з (10), буде випливати оцінка зверху і для найкращого наближення $E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}}$. Для цього розглянемо два випадки.

1. Нехай $p \in (1, 2]$. У цьому випадку буде зручно одержати шукану оцінку в більш загальній ситуації, а саме для класів $B_{p,2}^r$.

Отже, для довільної функції $f \in B_{p,2}^r$, згідно з означенням норми у просторі $B_{p,1}$ (4), можемо записати

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(f)_{B_{p,1}} &= \left\| f - \sum_{(s,\gamma') < n} \delta_s(f) \right\|_{B_{p,1}} = \left\| \sum_{(s,\gamma') \geq n} \delta_s(f) \right\|_{B_{p,1}} \\
&\asymp \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \left\| \delta_s \left(\sum_{\substack{s' \in \mathbb{N}^d \\ (s',\gamma') \geq n}} \delta_{s'}(f) \right) \right\|_p \leq \sum_{(s,\gamma') \geq n} \|\delta_s(f)\|_p = J_1.
\end{aligned} \quad (14)$$

Далі, використовуючи нерівність Коші – Буняковського (Гельдера з показником 2), лему А і означення норми (2), отримуємо

$$\begin{aligned}
J_1 &= \sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{(s,r)} \|\delta_s(f)\|_p 2^{-(s,r)} \leq \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{2(s,r)} \|\delta_s(f)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{-2r_1(s,\gamma)} \right)^{\frac{1}{2}} \ll \|f\|_{B_{p,2}^r} \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{-2r_1(s,\gamma)} \right)^{\frac{1}{2}} \ll 2^{-nr_1} n^{\frac{\nu-1}{2}}.
\end{aligned} \quad (15)$$

Тепер враховуючи перше зі співвідношень (2), з якого при $p \in (1, 2]$ маємо $W_{p,\alpha}^r \subset B_{p,2}^r$, із співвідношень (14), (15) знаходимо

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \leq \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \ll \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(B_{p,2}^r)_{B_{p,1}} \ll 2^{-nr_1} n^{\frac{\nu-1}{2}}. \quad (16)$$

2. Нехай $p \in (2; \infty)$. Як і у попередньому випадку, тут також буде зручно одержати шукану оцінку в більш загальній ситуації, а саме для класів $B_{p,p}^r$. Отже, для $f \in B_{p,p}^r$, згідно з означенням норми у просторі $B_{p,1}$, нерівністю Гельдера, означенням норми (2) і лемою А, одержуємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(f)_{B_{p,1}} &= \left\| f - \sum_{(s,\gamma') < n} \delta_s(f) \right\|_{B_{p,1}} = \left\| \sum_{(s,\gamma') \geq n} \delta_s(f) \right\|_{B_{p,1}} \\
&\asymp \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \left\| \delta_s \left(\sum_{\substack{s' \in \mathbb{N}^d \\ (s',\gamma') \geq n}} \delta_{s'}(f) \right) \right\|_p \leq \sum_{(s,\gamma') \geq n} \|\delta_s(f)\|_p \\
&\leq \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{(s,r)p} \|\delta_s(f)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{-(s,r)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\ll \|f\|_{B_{p,p}^r} \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{-pr_1(s,\gamma)} \right)^{\frac{1}{p'}} \ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\frac{1}{p'}}.
\end{aligned} \quad (17)$$

Отже, враховуючи, що $W_{p,\alpha}^r \subset B_{p,p}^r$, $p \in (2, \infty)$, із (17) маємо

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \leq \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \ll \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(B_{p,p}^r)_{B_{p,1}} \ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\frac{1}{p'}}. \quad (18)$$

Таким чином, поєднуючи (16) і (18), отримуємо шукану оцінку зверху.

При встановленні в (13) відповідних оцінок знизу також будемо розглядати два випадки.

1. Нехай $p \in (1, 2]$. Тоді оцінки знизу для обох апроксимаційних характеристик є наслідками відомої оцінки колмогоровського поперечника $d_M(W_{p,\alpha}^r, B_{1,1})$ (теорема А).

Так, вибираючи число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, одержуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} &\geq E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \geq E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{1,1}} \\ &\gg d_M(W_{p,\alpha}^r, B_{1,1}) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2}} \asymp 2^{-nr_1} n^{\frac{\nu-1}{2}}. \end{aligned}$$

2. Нехай $p \in (2, \infty)$. Зауважимо, що необхідні оцінки знизу достатньо встановити при $\alpha = \mathbf{0}$ і $\nu = d$. Розглянемо функцію $g_1 \in W_p^r$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, наближення якої у просторі $B_{p,1}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n^1}(g_1)$ буде реалізовувати одержані вище порядкові оцінки зверху.

Нехай

$$g_1(\mathbf{x}) = C_5 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} d_n(\mathbf{x}), \quad C_5 > 0,$$

де

$$d_n(\mathbf{x}) = \sum_{(\mathbf{s}, \mathbf{1})=n} \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}.$$

Покажемо, що при відповідному виборі сталої $C_5 > 0$ функція g_1 належить класу W_p^r .

Для цього скористаємося спочатку лемою Б, згідно з якою при $p \in (2, \infty)$ можемо записати

$$\begin{aligned} \|g_1\|_p &\ll \left(\sum_{(\mathbf{s}, \mathbf{1})=n} \|\delta_{\mathbf{s}}(g_1)\|_2^p 2^{\|\mathbf{s}\|_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\asymp 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} \left(\sum_{(\mathbf{s}, \mathbf{1})=n} \|\delta_{\mathbf{s}}(d_n)\|_2^p 2^{\|\mathbf{s}\|_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} \right)^{\frac{1}{p}} = J_2, \end{aligned}$$

де $\|\mathbf{s}\| = s_1 + \dots + s_d$. Далі використовуємо співвідношення (див., наприклад, [12], гл. 1, § 1)

$$\left\| \sum_{k=-m}^m e^{ikx} \right\|_q \asymp m^{1-\frac{1}{q}}, \quad q \in (1, \infty),$$

маємо

$$\left\| \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_q \asymp 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1-\frac{1}{q})}, \quad q \in (1, \infty). \quad (19)$$

Використавши (19) при $q = 2$, продовжимо оцінку величини J_2 :

$$J_2 \asymp 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} \left(\sum_{(\mathbf{s}, \mathbf{1})=n} 2^{\|\mathbf{s}\|_1(1-\frac{1}{p})p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{\frac{d-1}{p}} = 2^{-nr_1}. \quad (20)$$

На завершення на підставі теореми В із (20) отримуємо

$$\|g_1^{(r)}\|_p \ll 2^{nr_1} \|g_1\|_p \ll 2^{nr_1} 2^{-nr_1} = 1. \quad (21)$$

Останнє співвідношення показує, що $g_1 \in W_p^r$, $p \in (2, \infty)$.

Зазначимо, що співвідношення, аналогічне (21), справедливе і у випадку $p = 2$.

Для продовження міркувань зауважимо, що $S_{Q_n^1}(g_1) = 0$, і тому маємо

$$\begin{aligned} E_{Q_n^1}(g_1)_{B_{p,1}} &\asymp \mathcal{E}_{Q_n^1}(g_1)_{B_{p,1}} = \|g_1\|_{B_{p,1}} \asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} \sum_{(\mathbf{s}, \mathbf{1})=n} \|\delta_{\mathbf{s}}(d_n)\|_p \\ &\asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} \sum_{(\mathbf{s}, \mathbf{1})=n} 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{1})\left(1-\frac{1}{p}\right)} \\ &\asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{p}} 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{d-1} = 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)} = 2^{-nr_1} n^{(d-1)\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. За допомогою аналогічних міркувань легко переконатися, що при виконанні умов теореми 1 виконуються співвідношення

$$E_{Q_n^\gamma}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \asymp \mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)\xi}. \quad (22)$$

В доповнення до теореми 1 наведемо твердження щодо одновимірного випадку.

Теорема 1'. Нехай $d = 1$, $1 < p < \infty$, $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді справедливі оцінки

$$E_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \asymp \mathcal{E}_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \asymp 2^{-nr}. \quad (23)$$

Доведення. Оцінки зверху в (23) випливають з наслідку 1 [18] при $d = 1$ згідно з вкладенням $W_{p,\alpha}^r \subset H_p^r$ і співвідношеннями

$$E_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \leq \mathcal{E}_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \ll \mathcal{E}_{2^n}(H_p^r)_{B_{p,1}} \asymp 2^{-nr}.$$

Оцінки знизу в (23) є наслідком оцінок відповідних величин у просторі L_p (див., наприклад, [12], гл. 1, § 3) і порядкової нерівності (5) ($\|\cdot\|_{B_{p,1}} \gg \|\cdot\|_p$).

Теорему 1' доведено.

Як наслідок отриманого результату, можемо зробити висновок, що в одновимірному випадку відповідні апроксимаційні характеристики класів $W_{p,\alpha}^r$ у просторах $B_{p,1}$ і L_p збігаються за порядком.

У випадку $d \geq 2$ ситуація є іншою. Наведемо твердження, яке відповідає теоремі 1 у просторі L_p .

Теорема Г. Нехай $d \geq 2$, $1 < p < \infty$, $r_1 > 0$. Тоді при $\alpha \in \mathbb{R}^d$ справедливі оцінки

$$E_{Q_n^\gamma}(W_{p,\alpha}^r)_p \asymp \mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(W_{p,\alpha}^r)_p \asymp 2^{-nr_1}. \quad (24)$$

Нагадаємо, що у випадку, коли $\mathbf{r}$ — вектор з цілочисловими координатами, оцінки встановлено в [23], а для довільного вектора $\mathbf{r}$ — у [24].

У зв'язку з оцінкою (24) відмітимо також справедливість співвідношень

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^{\mathbf{r}})_p \asymp \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^{\mathbf{r}})_p \asymp 2^{-nr_1}. \quad (25)$$

Таким чином, зіставляючи (13) і (22) з (25) і (24), переконуємося, що при $d \geq 2$ порядки відповідних апроксимаційних характеристик класів $W_{p,\alpha}^{\mathbf{r}}$ є однаковими лише при $\nu = 1$. Крім того, у просторі $B_{p,1}$ існує залежність оцінок цих характеристик як від показників розмірності ν або d , так і від значення параметра p . Навіть більше, при $\nu \neq d$ порядки наближень поліномами з множин $T(Q_n^{\gamma'})$ і $T(Q_n^{\gamma})$ у просторі $B_{p,1}$ є різними на відміну від наближень в L_p -просторі.

У наступному твердженні доповнимо оцінки (13), розглянувши випадок $p = 1$, але лише для найкращих наближень $E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{1,\alpha}^{\mathbf{r}})_{B_{1,1}}$.

Теорема 2. Нехай $d \geq 2$, $r_1 > 0$ і $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Тоді справедливою є оцінка

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{1,\alpha}^{\mathbf{r}})_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{\nu-1}. \quad (26)$$

Доведення. Встановимо в (26) оцінку зверху для класів $H_1^{\mathbf{r}}$, з якої, згідно із вкладенням $W_{1,\alpha}^{\mathbf{r}} \subset H_1^{\mathbf{r}}$, буде випливати шукана оцінка і для класів $W_{1,\alpha}^{\mathbf{r}}$.

Нехай $f \in H_1^{\mathbf{r}}$. В якості агрегату наближення функції f розглянемо поліном вигляду

$$t_n := t_n(\mathbf{x}) = \sum_{(s,\gamma') < n-\gamma'(d)} A_s(f, \mathbf{x}),$$

де $\gamma'(d) = \gamma'_1 + \dots + \gamma'_d$, $n > 3\gamma'(d)$. Легко бачити, що $t_n \in T(Q_n^{\gamma'})$.

Тоді на підставі означення норми у просторі $B_{1,1}$ можемо записати

$$\begin{aligned} E_{Q_n^{\gamma'}}(f)_{B_{1,1}} &\leq \|f - t_n\|_{B_{1,1}} = \left\| \sum_{(s,\gamma') \geq n-\gamma'(d)} A_s(f) \right\|_{B_{1,1}} \\ &= \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \left\| A_s * \sum_{\substack{s' \in \mathbb{N}^d \\ (s',\gamma') \geq n-\gamma'(d)}} A_{s'}(f) \right\|_1 \leq \sum_{(s,\gamma') \geq n-2\gamma'(d)} \left\| A_s * \sum_{\|s-s'\|_{\infty} \leq 1} A_{s'}(f) \right\|_1 \\ &\leq \sum_{(s,\gamma') \geq n-2\gamma'(d)} \|A_s\|_1 \left\| \sum_{\|s-s'\|_{\infty} \leq 1} A_{s'}(f) \right\|_1 = J_3. \end{aligned} \quad (27)$$

Для продовження оцінки величини J_3 скористаємося тим, що згідно зі співвідношенням $\|V_{2^s}\|_1 \leq C_6$, $C_6 > 0$ (див., наприклад, [12], гл. 1, § 1),

$$\|A_s\|_1 = \|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\|_1 \leq \|V_{2^s}\|_1 + \|V_{2^{s-1}}\|_1 \leq C_7, \quad C_7 > 0. \quad (28)$$

Крім того, зауважимо, що для $f \in H_1^{\mathbf{r}}$ виконується оцінка

$$\|A_s(f)\|_1 \ll 2^{-(s,\mathbf{r})}, \quad s \in \mathbb{N}^d. \quad (29)$$

Таким чином, із врахуванням (28), (29) і леми А, для оцінки величини J_3 запишемо

$$\begin{aligned} J_3 &\ll \sum_{(s, \gamma') \geq n-2\gamma'(d)} \sum_{\|s-s'\|_\infty \leq 1} \|A_{s'}(f)\|_1 \\ &\ll \sum_{(s, \gamma') \geq n-3\gamma'(d)} \|A_s(f)\|_1 \ll \sum_{(s, \gamma') \geq n-3\gamma'(d)} 2^{-(s, r)} \\ &= \sum_{(s, \gamma') \geq n-3\gamma'(d)} 2^{-(s, \gamma)r_1} \asymp 2^{-nr_1} n^{\nu-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Отже, поєднуючи (27), (30) і враховуючи, що $W_{1, \alpha}^r \subset H_1^r$, отримуємо

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{1, \alpha}^r)_{B_{1,1}} \ll E_{Q_n^{\gamma'}}(H_1^r)_{B_{1,1}} \ll 2^{-nr_1} n^{\nu-1}.$$

Оцінку зверху встановлено.

Відповідна оцінка знизу в (26) є наслідком співвідношення

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{1, \alpha}^r)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{\nu-1}$$

(див. [11], теорема 4.3) і нерівності $\|\cdot\|_{B_{1,1}} \gg \|\cdot\|_1$.

Теорему 2 доведено.

Зауваження 2. За допомогою аналогічних міркувань можна переконатися, що при виконанні умов теореми 2 справедливою є оцінка

$$E_{Q_n^{\gamma}}(W_{1, \alpha}^r)_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{d-1}.$$

Наведемо відповідне теоремі 2 твердження в одновимірному випадку.

Теорема 2'. Нехай $d = 1$, $r > 0$ і $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді

$$E_{2^n}(W_{1, \alpha}^r)_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr}. \quad (31)$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 2 роботи [18] згідно з вкладенням $W_{1, \alpha}^r \subset H_1^r$ і співвідношеннями

$$E_{2^n}(W_{1, \alpha}^r)_{B_{1,1}} \ll E_{2^n}(H_1^r)_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr}.$$

Оцінка знизу в (31) є наслідком оцінки величини $E_{2^n}(W_{1, \alpha}^r)_1$ (див., наприклад, [12], гл. 1, § 3) і нерівності $\|\cdot\|_{B_{1,1}} \gg \|\cdot\|_1$.

Теорему 2' доведено.

Проаналізувавши теореми 2, 2' та їхні доведення, можна зробити висновок, що для всіх розмірностей $d \geq 1$ оцінки найкращих наближень класів $W_{1, \alpha}^r$ у просторах $B_{1,1}$ і L_1 є однаковими за порядком.

Далі встановимо оцінки величин (6) і (7) у випадках, коли відповідні параметри p і q є різними у досліджуваних класах та просторах, в метриці яких оцінюється похибка наближення.

Теорема 3. Нехай $d \geq 2$, $2 \leq p < q < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тоді при $\alpha \in \mathbb{R}^d$ виконуються співвідношення

$$E_{Q_n^{\gamma}}(W_{p, \alpha}^r)_{B_{q,1}} \asymp \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}(W_{p, \alpha}^r)_{B_{q,1}} \asymp 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{p})}. \quad (32)$$

Доведення. Оцінку зверху величини $\mathcal{E}_{Q_n}^\gamma(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}}$, як і при доведенні теореми 1, встановимо в більш загальній ситуації, а саме для класів $B_{p,p}^r$, оскільки, як зазначено вище, $W_{p,\alpha}^r \subset B_{p,p}^r$, $2 \leq p < \infty$.

Отже, нехай f — довільна функція із класу $B_{p,p}^r$. Згідно з означенням норми у просторі $B_{q,1}$ і нерівністю (12), можемо записати

$$\begin{aligned} E_{Q_n}^\gamma(f)_{B_{q,1}} &= \left\| f - \sum_{(s,\gamma) < n} \delta_s(f) \right\|_{B_{q,1}} = \left\| \sum_{(s,\gamma) \geq n} \delta_s(f) \right\|_{B_{q,1}} \\ &\asymp \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \left\| \delta_s \left(\sum_{\substack{s' \in \mathbb{N}^d \\ (s',\gamma) \geq n}} \delta_{s'}(f) \right) \right\|_q \leq \sum_{(s,\gamma) \geq n} \|\delta_s(f)\|_q \\ &\ll \sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)} \|\delta_s(f)\|_p = J_4. \end{aligned} \quad (33)$$

Далі, використовуючи нерівність Гельдера з показником p та означення норми (2), продовжуємо оцінку (33):

$$\begin{aligned} J_4 &= \sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-((s,r) - \|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right))} 2^{(s,r)} \|\delta_s(f)\|_p \\ &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{(s,r)p} \|\delta_s(f)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-((s,r) - \|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right))p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,p}^r} \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-((s,r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})p')} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-(s,\tilde{\gamma})(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})p'} \right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned} \quad (34)$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ — вектор з координатами $r_j - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $j = \overline{1, d}$, і відповідно

$$\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_d), \quad \tilde{\gamma}_j = \frac{r_j - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, \quad j = \overline{1, d}. \text{ Легко бачити, що } \tilde{\gamma}_j = \gamma_j, \quad j = \overline{1, \nu} \text{ і } 1 < \gamma_j < \tilde{\gamma}_j,$$

$j = \overline{\nu + 1, d}$. Враховуючи це і використовуючи лему А по відношенню до останньої суми в (34), отримуємо

$$J_4 \ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(1 - \frac{1}{p})}. \quad (35)$$

Насамкінець зіставляючи (33)–(35), одержуємо співвідношення

$$E_{Q_n}^\gamma(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} \leq \mathcal{E}_{Q_n}^\gamma(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} \ll \mathcal{E}_{Q_n}^\gamma(B_{p,p}^r)_{B_{q,1}} \ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(1 - \frac{1}{p})}.$$

Переходячи в (32) до встановлення оцінок знизу, зауважимо, що їх, як і в теоремі 1, достатньо отримати у випадку $\alpha = 0$ і $\nu = d$. Для цього також будемо розглядати функцію g_1 , яка, як показано при доведенні теореми 1, належить класу W_p^r , $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d$.

Враховуючи, що $S_{Q_n^1}(g_1) = 0$, маємо

$$\begin{aligned} E_{Q_n^1}(g_1)_{B_{q,1}} &\asymp \mathcal{E}_{Q_n^1}(g_1)_{B_{q,1}} = \|g_1\|_{B_{q,1}} \asymp 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} \sum_{(s,1)=n} \|\delta_s(d_n)\|_q \\ &\asymp 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} \sum_{(s,1)=n} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q})} \\ &\asymp 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{d-1} = 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}. \end{aligned}$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 3 доведено.

Наведемо відповідне до теореми 3 твердження у просторі L_q .

Теорема Д [25]. Нехай $d \geq 2$, $1 < p < q < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тоді при $\alpha \in \mathbb{R}^d$ виконуються співвідношення

$$E_{Q_n^\gamma}(W_{p,\alpha}^r)_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n^\gamma}(W_{p,\alpha}^r)_q \asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \quad (36)$$

Отже, зіставляючи оцінки (32) і (36) при $2 \leq p < q < \infty$, бачимо, що відповідні апроксимаційні характеристики класів $W_{p,\alpha}^r$ у просторі L_p , за винятком випадку $\nu = 1$, відрізняються за порядком. Крім того, у просторі $B_{q,1}$ прослідковується залежність одержаних оцінок від показника розмірності ν . Інша ситуація спостерігається в одновимірному випадку.

Справедливим є таке твердження.

Теорема 3'. Нехай $d = 1$, $1 < p < q < \infty$, $r > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді виконуються співвідношення

$$E_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} \asymp \mathcal{E}_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} \asymp 2^{-n(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \quad (37)$$

Доведення. Оцінки зверху в (37) впливають із оцінок відповідних характеристик класів H_p^r (див. наслідок 1 у [18]) і вкладення $W_{p,\alpha}^r \subset H_p^r$.

Оцінка знизу для найкращого наближення $E_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}}$ є наслідком оцінки цієї величини у просторі L_q (див. [12], гл. 1, § 3) і співвідношення $\|\cdot\|_{B_{q,1}} \gg \|\cdot\|_q$.

Теорему 3' доведено.

Зауважимо, що з наведених міркувань легко бачити, що розглянуті характеристики класів $W_{p,\alpha}^r$ у просторах $B_{q,1}$ і L_q однакові за порядком.

На завершення розглянемо ще одне співвідношення між параметрами p і q .

Теорема 4. Нехай $d \geq 2$, $1 \leq q \leq 2$, $q < p < \infty$, $r_1 > 0$. Тоді при $\alpha \in \mathbb{R}^d$ виконуються співвідношення

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} \asymp \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{\frac{\nu-1}{2}}. \quad (38)$$

Доведення. При встановленні оцінок зверху в (38) розглянемо два випадки.

1. Нехай $1 \leq q < p \leq 2$. Тоді оцінки зверху величини $\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}}$ є наслідком теореми 1, оскільки

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} \leq \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{p,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{\frac{\nu-1}{2}}.$$

2. Нехай $1 \leq q \leq 2 < p < \infty$. Тоді враховуючи, що $W_{p,\alpha}^r \subset W_{2,\alpha}^r$, на підставі теореми 1 маємо

$$\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} \leq \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{2,\alpha}^r)_{B_{2,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{\frac{\nu-1}{2}}.$$

Оцінки зверху встановлено.

Оцінки знизу в (38) отримуються як наслідок оцінки колмогоровського поперечника $d_M(W_{p,\alpha}^r, B_{1,1})$ (теорема А), тобто при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} &\geq E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} \gg d_M(W_{p,\alpha}^r, B_{q,1}) \geq d_M(W_{p,\alpha}^r, B_{1,1}) \\ &\asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2}} \asymp 2^{-nr_1} n^{\frac{\nu-1}{2}}. \end{aligned}$$

Теорему 4 доведено.

Наведемо твердження, відповідне до теореми 4 у просторі L_q .

Теорема Е [12] (гл. 3, § 3). Нехай $d \geq 2$, $1 < q < p < \infty$, $r_1 > 0$. Тоді при $\alpha \in \mathbb{R}^d$ виконуються співвідношення

$$E_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma'}}(W_{p,\alpha}^r)_q \asymp 2^{-nr_1}. \quad (39)$$

Таким чином, порівнюючи співвідношення (38) і (39), бачимо, що порядкові оцінки відповідних величин при $\nu \neq 1$ є різними.

У доповнення до теореми 4 наведемо результат щодо одновимірного випадку.

Теорема 4'. Нехай $d = 1$, $1 < q < p < \infty$, $r_1 > 0$. Тоді при $\alpha \in \mathbb{R}$

$$E_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} \asymp \mathcal{E}_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}} \asymp 2^{-nr_1}.$$

Доведення. Оцінка зверху величини $\mathcal{E}_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}}$ випливає із співвідношення

$$\mathcal{E}_{2^n}(H_p^{r_1})_{B_{q,1}} \asymp 2^{-nr_1}$$

(див. наслідок 1 [18]) згідно із вкладенням $W_{p,\alpha}^r \subset H_p^r$.

Оцінка знизу величини $E_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_{B_{q,1}}$ є наслідком співвідношення

$$E_{2^n}(W_{p,\alpha}^r)_q \asymp 2^{-nr}$$

(див. [12], гл. 1, § 3) і нерівності $\|\cdot\|_{B_{q,1}} \gg \|\cdot\|_q$.

Теорему 4' доведено.

Отже, в одновимірному випадку при $1 < q < p < \infty$ відповідні апроксимаційні характеристики класів $W_{p,\alpha}^r$ у просторах $B_{q,1}$ і L_q є однаковими за порядком.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Дослідження Анатолія Романюка і Сергія Янченка підтримано грантом Simons Foundation (1290607, А. Романюк, С. Янченко).

Авторські внески. Усі автори внесли рівний внесок у роботу.

Література

1. V. N. Temlyakov, *Estimates of the asymptotic characteristics of classes of functions with bounded mixed derivative or difference*, Proc. Steklov Inst. Math., **189**, 161 – 197 (1990).
2. B. S. Kashin, V. N. Temlyakov, *On best m -term approximations and the entropy of sets in the space L_1* , Math. Notes, **56**, № 5, 1137 – 1157 (1994); <https://doi.org/10.1007/BF02274662>.
3. E. S. Belinsky, *Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative*, J. Approx. Theory, **93**, № 1, 114 – 127 (1998); <https://doi.org/10.1006/jath.1997.3157>.
4. A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk, *Approximating characteristics of the classes of periodic multivariate functions in the space $B_{\infty,1}$* , Ukr. Math. J., **71**, № 2, 308 – 321 (2019); <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01646-3>.
5. A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk, *Estimation of some approximating characteristics of the classes of periodic functions of one and many variables*, Ukr. Math. J., **71**, № 8, 1257 – 1272 (2020); <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01711-x>.
6. A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk, *Approximative characteristics and properties of operators of the best approximation of classes of functions from the Sobolev and Nikol'skii – Besov spaces*, J. Math. Sci., **252**, № 4, 508 – 525 (2021); <https://doi.org/10.1007/s10958-020-05177-2>.
7. S. B. Hembars'ka, P. V. Zaderei, *Best orthogonal trigonometric approximations of the Nikol'skii – Besov type classes of periodic functions in the space $B_{\infty,1}$* , Ukr. Math. J., **74**, № 6, 883 – 895 (2022); <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02115-0>.
8. A. S. Romanyuk, S. Ya. Yanchenko, *Estimates of approximating characteristics and the properties of the operators of best approximation for the classes of periodic functions in the space $B_{1,1}$* , Ukr. Math. J., **73**, № 8, 1278 – 1298 (2022); <https://doi.org/10.1007/s11253-022-01990-x>.
9. A. S. Romanyuk, S. Ya. Yanchenko, *Approximation of the classes of periodic functions of one and many variables from the Nikol'skii – Besov and Sobolev spaces*, Ukr. Math. J., **74**, № 6, 967 – 980 (2022); <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02110-5>.
10. P. I. Lizorkin, S. M. Nikol'skii, *Function spaces of mixed smoothness from the decomposition point of view*, Proc. Steklov Inst. Math., **187**, 163 – 184 (1990).
11. V. N. Temlyakov, *Approximation of functions with bounded mixed derivative*, Proc. Steklov Inst. Math., **178**, 1 – 121 (1989).
12. V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic functions*, Nova Sci. Publ. Inc., New York (1993).
13. R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier analysis and approximation of functions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2004); <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-2876-2>.
14. A. S. Romanyuk, *Approximating characteristics of the classes of periodic functions of many variables*, Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, Kyiv (2012).
15. V. N. Temlyakov, *Multivariate approximation*, Cambridge University Press, Cambridge (2018); <https://doi.org/10.1017/9781108689687>.
16. D. Dũng, V. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic cross approximation*, Adv. Courses Math., CRM Barcelona, Birkhäuser/Springer, Cham (2018); <https://doi.org/10.1007/978-3-319-92240-9>.
17. O. V. Fedunyk-Yaremchuk, M. V. Hembars'kyi, S. B. Hembars'ka, *Approximative characteristics of the Nikol'skii – Besov-type classes of periodic functions in the space $B_{\infty,1}$* , Carpathian Math. Publ., **12**, № 2, 376 – 391 (2020); <https://doi.org/10.15330/cmp.12.2.376-391>.
18. A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk, K. V. Pozharska, S. B. Hembars'ka, *Characteristics of linear and nonlinear approximation of isotropic classes of periodic multivariate functions*, Carpathian Math. Publ., **15**, № 1, 78 – 94 (2023); <https://doi.org/10.15330/cmp.15.1.78-94>.

19. S. B. Hembars'ka, I. A. Romanyuk, O. V. Fedunyk-Yaremchuk, *Characteristics of the linear and nonlinear approximations of the Nikol'skii–Besov-type classes of periodic functions of several variables*, J. Math. Sci., **274**, № 3, 307–326 (2023); <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06602-y>.
20. A. Kolmogoroff, *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*, Ann. Math., **37**, № 1, 107–110 (1936); <https://doi.org/10.2307/1968691>.
21. A. S. Romanyuk, *Entropy numbers and widths for the classes $B_{p,\theta}^r$ of periodic functions of many variables*, Ukr. Math. J., **68**, № 10, 1620–1636 (2017); <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1315-9>.
22. S. M. Nikol'skii, *Inequalities for entire functions of finite power and their application to the theory of differentiable functions of many variables*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **38**, 244–278 (1951).
23. B. S. Mityagin, *The approximation of functions in the space L^p and C on the torus*, Mat. Sb., **58**, № 4, 397–414 (1962).
24. N. S. Nikol'skaya, *The approximation in the L_p metric of differentiable functions of several variables by Fourier sums*, Sib. Math. J., **15**, № 2, 282–295 (1974); <https://doi.org/10.1007/BF00968291>.
25. E. M. Galeev, *Approximation by Fourier sums of classes of functions with several bounded derivatives*, Math. Notes, **23**, № 2, 109–117 (1978); <https://doi.org/10.1007/BF01153149>.

Одержано 19.04.24