Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 1, 1 – 14

Строгие и бистрогие плюс-операторы

Томас Я. Азизов, Валерий А. Сендеров,
Виктор А. Хацкевич

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Статья посвящена теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Изучаются строгие плюс-операторы, действующие из одного пространства Крейна в другое. Приведена конструкция, показывающая, что при определенных условиях строгий плюс-оператор можно, не ограничивая, общности считать бистрогим.

2010 MSC. 47B50, 47A52.

Ключевые слова и фразы. Индефинитная метрика, строгий плюс-оператор, G-пространства, J-пространства.

1. Введение

Наша работа посвящена теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой. В основном мы придерживаемся определений и обозначений из [2, 3] и рассчитываем, что читатель знаком с основами общей теории операторов, в том числе, и в пространствах с индефинитной метрикой. Напомним некоторые понятия, с которыми мы будем работать.

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, а G — самосопряженный, определенный всюду в $\mathfrak{H}$ (и потому ограниченный), оператор. Наряду со скалярным произведением $(x,\, y)$ будем рассматривать в $\mathfrak{H}$ эрмитову полутора-линейную форму

$$[x,\, y] = (Gx,\, y),$$

называемую в дальнейшем *G-метрикой*. Спектром $\sigma(G)$ оператора G может быть любое компактное подмножество вещественной оси. Поэтому по отношению к G-метрике каждый вектор $x \in \mathfrak{H}$ может

Статья поступила в редакцию 16.10.2012
Работа Т. Я. Азизова поддержана грантом РФФИ 12-01-00102-а

ISSN 1810 – 3200.

оказаться либо *положительным* ($[x, x] > 0$), либо *отрицательным* ($[x, x] < 0$), либо *нейтральным* ($[x, x] = 0$). *Линеал* ($\equiv$ линейное множество) $\mathfrak{L}$ называется *положительным* (*неотрицательным*), *отрицательным* (*неположительным*) или *нейтральным*, если для всех $x \in \mathfrak{L} \setminus \{0\}$ имеют место соотношения $[x, x] > 0$, ($[x, x] \geq 0$), $[x, x] < 0$ ($[x, x] \leq 0$), $[x, x] = 0$, соответственно. Линеал $\mathfrak{L}$ называется равномерно положительным/отрицательным, если он положителен/отрицателен и норма $|[x, x]|^{1/2}$ эквивалентна исходной гильбертовой норме.

Естественным образом определяются максимальные линеалы всех перечисленных классов.

Линеал $\mathfrak{L}$ называется *невырожденным*, если из равенства $[x_0, y] = 0$, справедливого для некоторого $x_0 \in \mathfrak{L}$ и всех $y \in \mathfrak{L}$, следует, что $x_0 = 0$. В противном случае, $\mathfrak{L}$ называется *вырожденным* линеалом.

Всюду ниже *подпространством* будем называть замкнутый линеал.

Пусть $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — непрерывная слева ($E_{\lambda - 0} = E_\lambda$) спектральная функция оператора G, $\mathbb{R}$ — вещественная ось. Введем в рассмотрение ортопроекторы $P_- := E_0$, $P_+ := I - E_0$ $(P_+ + P_- = I)$ и соответствующее разложение пространства $\mathfrak{H}$ в ортогональную и G-ортогональную прямую сумму:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_- \ (\mathfrak{H}_\pm = P_\pm \mathfrak{H}). \tag{1.1}$$

Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — G_1- и G_2-пространство, соответственно. Рассмотрим соответствующие разложения типа (1.1). Относительно таких разложений пространств всякий ограниченный оператор, действующий из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ ($A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$), естественным образом представляется матрицей

$$A = (A_{ij})_{i,j=1}^2.$$

Особое место в теории операторов с индефинитной метрикой занимает случай, когда $\lambda = 0$ — регулярная точка оператора G ($0 \in \rho(G)$). Такие G-пространства называют *регулярными* или, что в последнее время чаще, *пространствами Крейна*. Простейшим (универсальным) примером регулярной G-метрики является так называемая J-*метрика*, определяемая оператором $G \equiv J = P_+ - P_-$, где ортопроекторы $P_\pm^2 = P_\pm = P_\pm^*$ задают ортогональное разложение $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$ ($\mathfrak{H}_\pm = P_\pm \mathfrak{H}$). В этом случае, если $P_\pm \neq 0$, спектр оператора J состоит из двух собственных значений ± 1, причем J является самосопряженным и унитарным оператором одновременно: $J^* = J = J^{-1}$. Пространства $\mathfrak{H}$ с J-метрикой коротко называют J-*пространствами*. Заметим, что любое пространство Крейна может быть введением эквивалентной нормы превращено в J-пространство.

Наиболее важными и наиболее изученными являются различные классы операторов, действующих именно в J-пространствах.

Пусть $\mathfrak{H}_i$ — J_i-пространство с J_i-метрикой $[\cdot,\cdot]_i$, $i = 1,2$. Линейный оператор $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ называется плюс-оператором, если $[x,x]_1 \geq 0$ влечет $[Ax,Ax]_2 \geq 0$.

Плюс-оператор A называется строгим, если

$$\mu(A) = \inf_{[x,\, x]_1=1} [Ax,\, Ax]_2 > 0.$$

В эквивалентных формулировках, плюс-оператор A строг, если существует такое $\mu > 0$, что

$$[Ax,\, Ax]_2 \geq \mu[x,\, x]_1, \quad \forall\, x \in \mathfrak{H}_1, \tag{1.2}$$

или

$$A^* J_2 A \geq \mu J_1. \tag{1.3}$$

Строгий плюс-оператор A называется бистрогим, если его (J_1,J_2)-сопряженный $A^c : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_1 :\ [Ax,\, y]_2 = [x,\, A^c y]_1,\ x \in \mathfrak{H}_1,\ y \in \mathfrak{H}_2$, также строг. Так как $A^c = J_1 A^* J_2$, то $A^* = J_1 A^c J_2$ — также строгий плюс-оператор и $\mu(A) = \mu(A^c) = \mu(A^*)$.

Строгий плюс-оператор A бистрог в точности, если A_{11}: $\mathfrak{H}_1^+ \to \mathfrak{H}_2^+$ — биекция.

Теория бистрогих плюс-операторов — важная составная часть общей теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Ей и ее приложениям посвящены, начиная с пионерских исследований М. Г. Крейна и Ю. Л. Шмульяна [9–12], многие работы (см., например, обзор [3] исследований до 1979 г. и более поздние статьи [1, 5–8, 13–19]).

Нашей целью является описание множества строгих плюс-операторов, близких по структуре блок-матриц и, соответственно, по свойствам к бистрогим плюс-операторам. Такая постановка задачи и ее решение, по-видимому, являются новыми.

Приведен алгоритм “превращения” таких операторов в бистрогие. Для этого они рассматриваются как операторы, действующие уже в новое, “не сильно отличающееся” от образа прежнего оператора, пространство $\widetilde{\mathfrak{H}}$ (см. с. 4).

Изучаются общие условия таких “превращений” и связанные с ними вопросы. При этом для простоты изложения в разделе 2, не ограничивая общности, будем предполагать, что исходный оператор A действует в одном и том же J-пространстве. Общий случай, когда оператор действует из одного J_1-пространства в другое J_2-пространство, отличается лишь громоздкостью обозначений.

Найдены необходимые и достаточные, а также удобные достаточные условия на A, при которых индуцированный оператор $\widetilde{A}$: $\mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ оказывается бистрогим плюс-оператором.

Определение 1.1. *Пусть $\mathfrak{H}_1$ — J-пространство, $\mathfrak{H}_2$ — G-пространство. Оператор A: $\mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ назовем бистрогим плюс-оператором, если A и $A^c = JA^*G$ — строгие плюс-операторы, и *-бистрогим плюс-оператором, если A и A^* — строгие плюс-операторы.*

В разделе 3 исследуются точные условия (на структуру и спектр оператора G) того, что в данной паре $(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ (индефинитных либо дефинитных) пространств существуют a) строгие; b) бистрогие; c) *-бистрогие плюс-операторы.

Также установлены включения между классами бистрогих и *-бистрогих плюс-операторов (при фиксированных $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$). Показано, в частности, что всякий *-бистрогий плюс-оператор бистрог, однако обратное включение не всегда имеет место. В терминах структуры и спектра оператора G исследуются точные условия совпадения исследуемых классов операторов.

2. Индуцированные бистрогие плюс-операторы

Пусть $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ — строгий плюс-оператор, действующий в J-пространстве $\mathfrak{H}$. Подпространство $\mathfrak{H}' := \overline{\operatorname{ran} A}$ является G'-пространством относительно $G' = P'J|_{\mathfrak{H}'}$, где P' — ортопроектор на $\mathfrak{H}'$.

Отметим, что даже в случае невырожденности пространства $\mathfrak{H}'$, оно не является, вообще говоря, пространством Крейна. Его оператором Грама G может оказаться любой ограниченный самосопряженный оператор с единственным требованием, что $\lambda = 0$ — не собственное значение оператора $G:\ 0 \notin \sigma_p(G)$.

По G'-пространству $\mathfrak{H}'$ построим пространство Крейна $\widetilde{\mathfrak{H}}$ следующим образом:

- Если $\mathfrak{H}'$ невырождено, то $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — пополнение $\mathfrak{H}'$ по норме $\|\, |G'|^{1/2}x \,\|$ до пространства Крейна (см., напр., [4, Предложение 1.6.14]. В частности, $\widetilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}'$ (с точностью до эквивалентной нормы), если само $\mathfrak{H}'$ является пространством Крейна.

- Если же $\mathfrak{H}'$ вырождено, то в качестве $\widetilde{\mathfrak{H}}$ возьмем любое его вложение в пространство Крейна (см., напр., [4, с. 59]).

Через $\widetilde{A} : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ обозначим оператор, индуцированный оператором A: $\widetilde{A} = jAx$, где $j : \mathfrak{H}' \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — оператор вложения.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$ *— J-пространство, пусть* $A = \|A_{ij}\|_{i,j=1}^2$ *— матричное представление строгого плюс-оператора* $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$. *Следующие условия* **(A)–(D)** *эквивалентны.*

(A) $\widetilde{A}$ *— бистрогий плюс-оператор.*

(B) $A\mathfrak{H}_+$ *— максимальное неотрицательное подпространство в* $\mathfrak{H}'$.

(C) $\mathfrak{H}'$ *невырождено и из включения* $A^cAf \in \mathfrak{H}_-$, $f \in \mathfrak{H}$, *следует неположительность вектора* Af.

(D) $\mathfrak{H}'$ *невырождено и*

$$A_{22}^*A_{22} - A_{12}^*A_{12} + (A_{12}^*A_{11} - A_{22}^*A_{21}) \times (A_{11}^*A_{11} - A_{21}^*A_{21})^{-1}(A_{11}^*A_{12} - A_{21}^*A_{22}) \geq 0. \quad (2.1)$$

Доказательство. (**A**) $\Longleftrightarrow$ (**B**). Из определения строгого плюс-оператора следует, что он отображает неотрицательные подпространства на неотрицательные и при этом равномерно положительные на равномерно положительные. Так как строгий плюс-оператор является бистрогим тогда и только тогда, когда он отображает максимальное равномерно положительное подпространство на максимальное равномерно положительное подпространство [4, теорема 2.4.17], то $\widetilde{A}$ — бистрогий оператор тогда и только тогда, когда $\widetilde{A}\mathfrak{H}_+$ — максимальное неотрицательное подпространство в $\widetilde{\mathfrak{H}}$. Равносильность утверждений (**A**) и (**B**) следует из равенства $\widetilde{A}\mathfrak{H}_+ = jA\mathfrak{H}_+$ и того, что $A\mathfrak{H}_+$ — равномерно положительное подпространство.

(**B**) $\Longleftrightarrow$ (**C**). Условие (**B**) равносильно выполнению двух условий: невырожденности $\mathfrak{H}'$ и отрицательности (или, что в этом случае эквивалентно, неположительности) J-ортогонального дополнения в $\mathfrak{H}'$ к равномерно положительному подпространству $A\mathfrak{H}_+$. Последнее, при условии невырожденности $\mathfrak{H}'$, эквивалентно отрицательности (или, что в этом случае то же, неположительности) линеала $\mathcal{L} := (A\mathfrak{H}_+)^{[\perp]} \cap \operatorname{ran} A$. Осталось заметить, что вектор $z = Af$ принадлежит $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда $[Af, Ax_+] = 0$ при всех $x_+ \in \mathfrak{H}_+$, что эквивалентно включению $A^cAf \in \mathfrak{H}_-$.

(**C**) $\Longleftrightarrow$ (**D**). Непосредственно проверяется, что включение $A^cAf \in \mathfrak{H}_-$ имеет место для векторов вида:

$$f = \begin{pmatrix} -(A_{11}^*A_{11} - A_{21}^*A_{21})^{-1}(A_{11}^*A_{12} - A_{21}^*A_{22})f_- \\ f_- \end{pmatrix}, \quad f_- \in \mathfrak{H}^-,$$

и только для них. Поэтому неположительность векторов Af для таких f эквивалентна условию (2.1) $\square$

Прежде чем сформулировать признаки того, что $\widetilde{A}$ — бистрогий плюс-оператор, приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Рассмотрим условия:

$$\text{подпространство} \quad \mathfrak{H}'_{-} \quad \text{неположительно,} \tag{2.2}$$

$$\text{подпространство } \mathfrak{H}'_{-} \text{ невырождено.} \tag{2.3}$$

Ясно, что одновременное выполнение (2.2) и (2.3) эквивалентно требованию:

$$\text{подпространство} \quad \mathfrak{H}'_{-} \quad \text{отрицательно.} \tag{2.4}$$

Сформулированная ниже лемма доказана по существу в [20], и потому мы опускаем ее доказательство.

Лемма 2.1. *Пусть $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — строгий плюс-оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(*i*) $A = BU$, *где B — строгий плюс-оператор с $B_{12} = 0$, а U — J-унитарный оператор.*

(*ii*)

$$D_{+}(A^{*}) := A_{11}A_{11}^{*} - A_{12}A_{12}^{*} \geq 0. \tag{2.5}$$

(*iii*) $\overline{\operatorname{ran} A^{*}|\mathfrak{H}_{+}}$ — *максимальное неотрицательное подпространство.*

(*iv*) $\overline{\operatorname{ran} A^{*}|\mathfrak{H}_{+}}$ — *максимальное равномерно положительное подпространство.*

(*v*) $A_{12}^{*} = \Gamma A_{11}^{*}$, *где $\Gamma : \mathfrak{H}_{+} \to \mathfrak{H}_{-}$, $\|\Gamma\| \leq 1$.*

(*vi*) $A_{12}^{*} = \Gamma A_{11}^{*}$, *где $\Gamma : \mathfrak{H}_{+} \to \mathfrak{H}_{-}$, $\|\Gamma\| < 1$.* □

Ниже будем пользоваться обозначением: $\mathfrak{H}'_{-} = \overline{A\mathfrak{H}_{-}}$.

Следствие 2.1. *Следующие условия достаточны для бистрогости оператора $\widetilde{A}$.*

(1) $\mathfrak{H}'_{-}$ — *отрицательное подпространство*

(2) $\mathfrak{H}'$ — *невырожденное подпространство и*

$$D_{-}(A) := A_{22}^{*}A_{22} - A_{12}^{*}A_{12} \geq 0. \tag{2.6}$$

(3) $A = BU$, *где, построенный по той же схеме, что и $\widetilde{A}$, оператор $\widetilde{B} : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ является бистрогим и $U : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — J-унитарный оператор.*

(4) $A_{12} = 0$.

(5) *Условия леммы* 2.1.

Доказательство. (1) Так как $A\mathfrak{H}_+/\mathfrak{H}'_-$ — положительное/отрицательное подпространство, то в силу [4, предложение 1.1.24] пространство $\mathfrak{H}' = A\mathfrak{H}_+ \dot{+} \mathfrak{H}'_-$ является невырожденным. Из [4, предложение 1.1.25] следует, что $A\mathfrak{H}_+$ — максимальное неотрицательное подпространство в $\mathfrak{H}'$. Остается воспользоваться теоремой 2.1 **(B)**.

(2) Доказательство немедленно следует из условия **(D)** теоремы 2.1.

(3) Для доказательства достаточно воспользоваться тривиальным равенством $\widetilde{A} = \widetilde{B}U$.

(4) Из этого условия следует, что $\mathfrak{H}'_- \subset \mathfrak{H}_-$ — равномерно отрицательное подпространство. Остается воспользоваться условием (1) доказываемой теоремы.

(5) Одним из условий леммы 2.1 является то, что существует факторизация оператора $A = BU$, где B — строгий плюс-оператор с $B_{12} = 0$ и U — J-унитарный оператор. Из условия (4) теоремы следует, что $\widetilde{B}$ — бистрогий плюс-оператор. Для завершения доказательства сошлемся на уже доказанное условие (3). □

В заключение этого раздела приведем два примера.

Пример 2.1. Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_j\}_{j=-1}^{\infty}$. Положим $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$, где $\mathfrak{H}_+ =$ з.л.о. $\{e_j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\mathfrak{H}_- =$ л.о. $\{e_{-1}\}$.

Зададим оператор A_α как замыкание по непрерывности оператора действующего, на базисе следующим образом:

$$A_\alpha e_{-1} = \alpha e_{-1} + e_0, \quad A_\alpha e_j = e_{j+1} \ \text{ при } \ j = 0, 1, \dots$$

Такой оператор является строгим плюс-оператором тогда и только тогда, когда $|\alpha| \le \sqrt{2}$; при этом $\widetilde{A_\alpha}$ бистрог тогда только и тогда, когда $1 < |\alpha| \le \sqrt{2}$.

Пример 2.2. Укажем пример строгого плюс-оператора A, действующего в J-пространстве $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$, и такого, что $A\mathfrak{H}_-$ — отрицательный линеал, $\mathfrak{H}'$ — невырожденное подпространство, но $\mathfrak{H}'_-$ вырождено. Более того, мы укажем бистрогий плюс-оператор с таким свойством. Зададим его в матричном виде $A = \|A_{ij}\|_{i,j=1}^2$ относительно канонического разложения. Положим $A_{11} = 2$, $\|A_{22}\| < 1$ — оператор с плотной областью значений, но $\operatorname{ran} A_{22} \ne \mathfrak{H}_-$, $A_{12} = \Gamma A_{22}$, где $\Gamma : \mathfrak{H}_- \to \mathfrak{H}_+$ — сжатие, ядро $\ker(I - \Gamma^*\Gamma) =$ л.о. $\{e\}$ одномерно и $e \notin \operatorname{ran} A_{22}$, $A_{21} = 0$. Непосредственно проверяется, что такой оператор является бистрогим, $A\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{H}_+$, и потому $\operatorname{ran} A = \mathfrak{H}_+ + A\mathfrak{H}_-$. Так как Γ — сжатие, то $A\mathfrak{H}_-$ — неположительный линеал. Из свойства $e \notin \operatorname{ran} A_{22}$ следует, что он отрицателен. Из плотности $\operatorname{ran} A_{22}$

получаем, что $\mathfrak{H}'_-$ — график оператора Γ, в котором вектор $e + \Gamma e$ является изотропным, т.е. $\mathfrak{H}'_-$ — вырожденное подпространство. С другой стороны, $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_+ \oplus \overline{\operatorname{ran} A_{22}}$ — пространство Крейна, и оно невырождено.

3. Теоремы существования

Всюду ниже, если не оговорено другое, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1^+ \oplus \mathfrak{H}_1^-$ — J-пространство, $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_2^+ \oplus \mathfrak{H}_2^-$ — G-пространство и $0 \notin \sigma_p(G)$. Подпространства $\mathfrak{H}_2^\pm$ являются спектральными для оператора G и через $G_\pm$ обозначим $\pm G|\mathfrak{H}_2^\pm$.

В настоящем разделе исследуются точные условия (на структуру и спектр оператора G) того, что во множестве непрерывных операторов $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$) существуют: a) строгие; b) бистрогие; c) *-бистрогие плюс-операторы (см. определение 3.1).

Во второй части раздела исследуются включения между классами бистрогих и *-бистрогих плюс-операторов (при фиксированных $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$). В терминах структуры и спектра G исследуются точные условия совпадения исследуемых классов. Ниже, для простоты изложения, будем предполагать встречающиеся бесконечномерные пространства сепарабельными.

Теорема 3.1. *Следующие утверждения справедливы:*

(a) *Если* $\dim \mathfrak{H}_1^+ < \infty$, *то множество строгих плюс-операторов* $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ *не пусто тогда и только тогда, когда* $\dim \mathfrak{H}_1^+ \leq \dim \mathfrak{H}_2^+$.

(b) *Если* $\mathfrak{H}_1^+$ *— бесконечномерное подпространство, то строгие плюс-операторы* $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ *существуют в точности при условии, что* $G_+ \notin \mathfrak{S}_\infty$, *где через* $\mathfrak{S}_\infty$ *обозначено множество компактных операторов в соответствующем пространстве.*

Доказательство. Сперва докажем, что

1°. строгий плюс-оператор $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ существует тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{H}_2$ существует равномерно положительное подпространство той же размерности, что и $\mathfrak{H}_1^+$.

В самом деле, если бистрогий плюс-оператор A существует, то в качестве искомого равномерно положительного подпространства в $\mathfrak{H}_2$ достаточно взять $A\mathfrak{H}_1^+$. Равномерная дефинитность этого подпространства следует из следующей цепочки соотношений при $x_+ \in \mathfrak{H}_1^+$:

$$[Ax_+, Ax_+]_2 \geq \mu(A)[x_+, x_+]_1 = \mu(A)(x_+, x_+)_1 \geq \frac{\mu(A)}{\|A\|}(Ax_+, Ax_+)_2.$$

Обратно, пусть в $\mathfrak{H}_2$ существует равномерно положительное подпространство $\mathfrak{L}_2^+ : \dim \mathfrak{L}_2^+ = \dim \mathfrak{H}_1^+$.

2°. В качестве строго плюс-оператора A можно взять любую (J,G)-изометрию из $\mathfrak{H}_1^+$ на $\mathfrak{L}_2^+$: $[Ax_+, Ax_+]_2 = [x_+, x_+]_1$, продолженную нулем на $\mathfrak{H}_1^-$. Тогда

$$[Ax, Ax]_2 = [A(x_+ + x_-), A(x_+ + x_-)]_2 \\ = [Ax_+, Ax_+]_2 = [x_+, x_+]_1 \geq [x, x]_1,$$

т.е. A — строгий плюс-оператор с $\mu(A) = 1$.

Далее заметим, что

3°. равномерная дефинитность подпространства $\mathfrak{L}_2^+ : [y,y]_2 \geq c\,(y,y)_2$, $y \in \mathfrak{L}_2^+$, влечет равномерную дефинитность его проекции $P_2^+ \mathfrak{L}_2^+$.

В самом деле, пусть $y \in \mathfrak{L}_2^+$, $y = y_+ + y_-$, $y_\pm \in \mathfrak{H}_2^\pm$. Тогда

$$[y_+, y_+]_2 \geq [y,y]_2 \geq c\,(y,y)_2 \geq c\,(y_+, y_+)_2.$$

Таким образом, мы доказали, что строгий плюс-оператор $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ существует тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{H}_2^+$ существует подпространство той же размерности, что и $\mathfrak{H}_1^+$. Отсюда прямо следует справедливость утверждения (a).

Пусть теперь $\mathfrak{H}_1^+$ бесконечномерно. Если строгий плюс-оператор существует, то в $\mathfrak{H}_2^+$ существует бесконечномерное равномерно положительное подпространства $\mathfrak{L}_2^+$. Пусть Q — ортопроектор из $\mathfrak{H}_2^+$ на $\mathfrak{L}_2^+$. Тогда из условия равномерной положительности $\mathfrak{L}_2^+$ следует существование числа $c > 0$ такого, что для $y_+ \in \mathfrak{L}_2^+$ имеем:

$$(QG_+Qy_+, y_+)_2 = [y_+, y_+]_2 \geq c(y_+, y_+)_2,$$

т.е. оператор $QG_+Q|\mathfrak{L}_2^+$ является равномерно положительным на бесконечномерном подпространстве $\mathfrak{L}_2^+$. Отсюда следует, что он не компактен, а потому $G_+ \notin \mathfrak{S}_\infty$.

Обратно, если $G_+ \notin \mathfrak{S}_\infty$, то у оператора G_+ существует бесконечномерное спектральное подпространство $\mathfrak{L}_2^+$, на котором этот оператор равномерно положителен, что эквивалентно равномерной положительности $\mathfrak{L}_2^+$. □

Теорема 3.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(a) *Множество бистрогих операторов* $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ *непусто.*

(b) $\dim \mathfrak{H}_1^+ = \dim \mathfrak{H}_2^+$ *и* $0 \in \rho(G_+)$.

(c) *Множество *-бистрогих операторов $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ непусто.*

Доказательство. $(a) \Longrightarrow (b)$. Так как по условию существует такой строгий плюс-оператор $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$, что вместе с ним строгим плюс-оператором будет и его индефинитный сопряженный: $A^c : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_1$, то из теоремы 3.1 следует равенство $\dim \mathfrak{H}_1^+ = \dim \mathfrak{H}_2^+$. Подпространство $P_2^+ A\mathfrak{H}_1^+$ является равномерным (см. 3° в доказательстве теоремы 3.1). Докажем, что оно совпадает с $\mathfrak{H}_2^+$, что и будет означать $0 \in \rho(G_+)$. Допустим противное: $P_2^+ A\mathfrak{H}_1^+ \neq \mathfrak{H}_2^+$. Так как $P_2^+ A\mathfrak{H}_1^+$ равномерно положительно, то в $\mathfrak{H}_2^+$ существует G-ортогональный к нему вектор $y_+ \neq 0$. Следовательно, при всех $x_+ \in \mathfrak{H}_1^+$ имеем $[A^c y_+, x_+] = [y_+, Ax_+] = [y_+, P_2^+ Ax_+] = 0$, т.е. $A^c y_+ \in \mathfrak{H}_2^-$ — противоречие с тем, что A^c — плюс-оператор.

Мы опускаем доказательство импликации $(c) \Longrightarrow (b)$, поскольку оно ничем принципиально не отличается от приведенного выше доказательства $(a) \Longrightarrow (b)$, надо лишь индефинитную метрику заменить на скалярное произведение.

$(b) \Longrightarrow (a)$, (c). Рассмотрим в качестве строгого плюс-оператора тот же, что и п. 2° при доказательстве теоремы 3.1, положив там $\mathfrak{L}_2^+ = \mathfrak{H}_2^+$. Проверим, что этот оператор является одновременно и бистрогим, и *-бистрогим, т.е. A^c и A^* — строгие плюс-операторы. Последнее прямо следует из того, что

$$A^c y = \begin{cases} A^{-1}y, & \text{если } y \in \mathfrak{H}_2^+ \\ 0, & \text{если } y \in \mathfrak{H}_2^-, \end{cases} \qquad A^* y = \begin{cases} A^{-1}G_+ y, & \text{если } y \in \mathfrak{H}_2^+ \\ 0, & \text{если } y \in \mathfrak{H}_2^-. \end{cases}$$

□

Если для операторов, действующих из J-пространства в $\widetilde{J}$-пространство, понятия бистрогости и *-бистрогости эквивалентны (см., напр., [4, предложение 2.4.10]), то для исследуемого здесь случая не всякий бистрогий плюс-оператор является *-бистрогим (см. ниже теорему 3.4. Однако справедливо следующее включение.

Теорема 3.3. *Всякий *-бистрогий плюс-оператор бистрог.*

Доказательство. Поскольку A — *-бистрогий плюс-оператор, то $P_2^+ A P_1^+ \mathfrak{H}_1^+ = \mathfrak{H}_2^+$ (см. доказательство теоремы 3.1, пояснение к импликации $(c) \Longrightarrow (b)$).

Пополним теперь пространство $\mathfrak{H}_2$ по норме $(|G|\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$ до $\widetilde{J}$-пространства: $\widetilde{\mathfrak{H}_2} = \widetilde{\mathfrak{H}_2^+} \oplus \widetilde{\mathfrak{H}_2^-}$ (ср. с разделом 2 настоящей статьи). Индуцированный этим пополнением оператор $\widetilde{A}$ — ограниченный строгий плюс-оператор. Кроме того, $\widetilde{\mathfrak{H}_2^+} = j\mathfrak{H}_2^+$, где $j : \mathfrak{H}_2 \to \widetilde{\mathfrak{H}_2}$ — оператор вложения. Следовательно, $\widetilde{P_2^+}\widetilde{A}P_1^+\mathfrak{H}_1^+ = \widetilde{\mathfrak{H}_2^+}$. Отсюда оператор $(\widetilde{A})^c$ — строгий плюс-оператор [1, теорема 2.4.17]. Остается заметить, что $A^c y = (\widetilde{A})^c jy$. □

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, G — ограниченный самосопряженный оператор, $0 \in \rho(G)$, $\sigma(G) \cap (0, \pm\infty) \neq \emptyset$. Рассмотрим два пространства Крейна $\mathfrak{G}_1 := \{\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_1 = (G\cdot,\cdot)\}$ и $\mathfrak{G}_2 := \{\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot]_2 = (G^{-1}\cdot,\cdot)\}$. Тождественный оператор $j : \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ является бистрогим тогда и только тогда, когда $G = \alpha J$, $\alpha > 0$.*

Доказательство. В самом деле, если $G = \alpha J$, то из равенства $\frac{1}{\alpha}[x,x]_1 = \alpha[jx,jx]_2$ следует, что j — бистрогий плюс-оператор.

Обратно, пусть j — бистрогий плюс-оператор. Тогда (см. (1.2)) существуют такие числа $\lambda > 0$, $\mu > 0$, что $\lambda[x,x]_1 \geq [jx,jx]_2 \geq \mu[x,x]_1$. Отсюда, в силу индефинитности G-метрики $\lambda = \mu =: \gamma$ и $[jx,jx]_2 = \gamma[x,x]_1$, т.е. $G^{-1} = \gamma G$. Поэтому $G = \alpha J$ с $\alpha = 1/\sqrt{\gamma}$. □

Обозначим через $m_\pm$ и $M_\pm$ нижнюю и верхнюю грани спектра оператора $G_\pm :\ m_\pm \leq G_\pm \leq M_\pm$.

Лемма 3.2. *В обозначениях леммы* 3.1 *оператор j является* (*строгим*) *плюс-оператором тогда и только тогда, когда*

$$m_- \geq M_+. \tag{3.1}$$

Доказательство. Так как пространства $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ индефинитны, то оператор j является плюс-оператором тогда и только тогда, когда он — строгий плюс-оператор, а потому из (1.2) следует существование такого $\mu > 0$, что $[jx,jx]_2 \geq \mu[x,x]_1$ для всех $x = x_+ + x_- \in \mathfrak{G}_1$. Прямым вычислением получаем, что это неравенство можно записать в виде:

$$((G_+^{-1} - \mu G_+)x_+, x_+) \geq ((G_-^{-1} - \mu G_-)x_-, x_-). \tag{3.2}$$

Поскольку $x_\pm \in \mathfrak{H}_\pm$ — произвольные векторы, то (3.2) выполнено тогда и только тогда, когда имеет место (3.1). □

Теорема 3.4. *Пусть $\dim\mathfrak{H}_1^+ = \dim\mathfrak{H}_2^+$, $0 \in \rho(G_+)$.*

Множества бистрогих и *-бистрогих операторов совпадают тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

(*a*) $G \geq 0$.

(*b*) $m_- \geq M_+$.

Доказательство. Проверим, что при каждом из условий (a) или (b) множества бистрогих и *-бистрогих операторов совпадает. С учетом Теоремы 3.3 достаточно установить, что каждый бистрогий оператор является *-бистрогим. Пусть A — бистрогий плюс-оператор, т.е., вместе с A строгим плюс-оператором является и оператор $A^c = JA^*G$. В обоих условиях (a) или (b) теоремы с учетом $0 \in \rho(G_+)$ существует и ограничен оператор G^{-1}. Поэтому $\mathfrak{H}_2$ — пространство Крейна. При выполнении условия (a) тривиально заключение о том, что оператор G^{-1} строг; при выполнении условия (b) для такого заключения надо применить лемму 3.2. Остается заметить, что $A^* = JA^cG^{-1}$, и учесть строгость операторов J и A^c.

Обратно, пусть множества бистрогих и *-бистрогих операторов совпадают, и пусть не выполнено условие (a). Докажем, что выполнено условие (b). Допустим противное, $M_+ > m_-$. Рассмотрим полуинтервал $\Delta := (-\infty, -m_-]$. Пусть $E(\Delta)$ — спектральный проектор оператора G_-, соответствующий Δ. Тогда подпространство $\mathfrak{H}_3 := \mathfrak{H}_2^+ \oplus E(\Delta) \subset \mathfrak{H}_2$ является пространством Крейна. Обозначим $G_3 := G|\mathfrak{H}_3$.

Так как для оператора G_3^{-1} выполнено условие (b) настоящей теоремы, то в силу леммы 3.2 оператор j^{-1} является строгим плюс-оператором, но не бистрогим; в противном случае, в силу леммы 3.1 было бы невозможным неравенство $M_+ > m_-$. Поэтому в $\mathfrak{H}_3$ существует G_3-положительный вектор $f = f^+ + f^-$, $f^\pm \in \mathfrak{H}_3^\pm \subset \mathfrak{H}_2^\pm$, не являющийся G_3^{-1}-положительным. Отметим, что этот вектор принадлежит образу оператора $G \supset G_3$. Теперь завершим доказательство построением бистрогого плюс-оператора $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$, не являющегося *-бистрогим.

Пусть $e^\pm \in \mathfrak{H}_1^\pm$ и $\|e^\pm\| = \|f^\pm\|$. Так как вектор f является G-положительным, то $\alpha := (Gf_+, f_+) > -(Gf_-, f_-) =: \beta$. Введем в рассмотрение оператор A_0:

$$A_0 : \text{л.о.}\{e_+,\, e_-\} \to \text{л.о.}\{f_+,\, f_-\},$$
$$A_0 e^+ = \alpha^{-1/2} f^+, \quad A_0 e^- = \beta^{-1/2} f^-.$$

Непосредственно проверяется, что такой оператор является индефинитно изометрическим: $[A_0x, A_0x]_2 = [x, x]_1$, $x \in$ л.о.$\{e_+,\, e_-\}$. Так как подпространства $\mathfrak{H}_1^\sim :=$ л.о.$\{\mathfrak{H}_1^+,\, e^-\}$ и $\mathfrak{H}_2^\sim :=$ л.о.$\{\mathfrak{H}_2^+,\, f^-\}$ являются пространствами Крейна одинаковой размерности и одинаковой сигнатуры, то оператор A_0 допускает расширение до индефинитно изометрического оператора $A^\sim$, отображающего $\mathfrak{H}_1^\sim$ на $\mathfrak{H}_2^\sim$. В качестве оператора $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ возьмем следующий:

$$Ax = A^\sim x_1, \qquad x = x_1 + x_2,\ x_1 \in \mathfrak{H}_1^\sim,\ x_2 \in (\mathfrak{H}_1^\sim)^\perp.$$

Этот оператор по построению является бистрогим, но не *-бистрогим, поскольку $A^* = \overline{JA^cG^{-1}}$ отображает положительный вектор $f = f^+ + f^- \in \mathfrak{H}_2$ в неположительный вектор $A^*f \in \mathfrak{H}_1$. $\square$

Замечание 3.1. Как отмечалось в начале этого раздела, для простоты изложения мы ограничили себя сепарабельными пространствами. Обобщение некоторых изложенных выше положений на общий случай не представляет труда, и мы оставляем это читателю.

Литература

[1] Т. Я. Азизов, *О расширениях инвариантных дуальных пар*// Укр. матем. ж., **41** (1989), 7, 958–961.

[2] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Линейные операторы в гильбертовых пространствах с G-метрикой* // Успехи матем. наук, **26** (1971), No. 4 (160), 43–92.

[3] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения* // Матем. анализ (Итоги науки и техники, ВИНИТИ), **17** (1979), 113–205.

[4] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, М.: Наука, 1986, 352 с.

[5] Т. Я. Азизов, В. А. Хацкевич, *Бистрогие плюс-операторы и дробно-линейные преобразования* // Укр. Мат. Вестник, **4** (2007), No. 3, 307–328.

[6] Т. Я. Азизов, В. А. Хацкевич, *О параметрическом описании дробно-линейных преобразований единичного операторного шара* // Ученые записки Таврического национального университета им. Вернадского, **20** (2007), No. 2, 13–20.

[7] T. Ya. Azizov and V. A. Khatskevich, *A theorem of existence of invariant subspaces for J-binoncontractive operators* // Operator Theory: Adv. and Appl., **198** (2009), 41–48.

[8] Т. Я. Азизов, В. А. Хацкевич, В. А. Сендеров, *О структуре автоморфизмов единичного операторного шара* // Укр. Мат. Вестник, **6**, (2009), No. 2, 139–149.

[9] М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, *Об одном классе операторов в пространстве с индефинитной метрикой* // Докл. АН СССР, **170** (1967), No. 1, 34–37.

[10] М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, *О плюс-операторах в пространстве с индефинитной метрикой* // Математ. исследования (Кишинев, АН Молд.ССР), **1** (1966), No. 1, 131–161.

[11] М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, *J-полярное представление плюс-операторов* // Математ. исследования (Кишинев, АН Молд.ССР), **1** (1966), No. 2, 172–210.

[12] М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, *О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами* // Математ. исследования (Кишинев, АН Молд.ССР), **2** (1967), No. 3, 64–96.

[13] D. Alpay, V. A. Khatskevich, *Linear fractional transformations: basic properties, applications to spaces of analytic functions and Schroeder's equation* // International Journal of Applied Math., **2** (2000), 459–476.

[14] V. A. Khatskevich, L. Zelenko, *Bistrict plus-operators in Krein spaces and dichotomous behavior of irreversible dynamical systems* // Operator Theory: Advances and Applications, **118** (2000), 191–203.

[15] V. Khatskevich, S. Reich and D. Shoikhet, *Abel–Schroder equations for linear fractional mappings and the Koenigs embedding problem* // Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), 67–98.

[16] В. Сендеров, В. Хацкевич, *Дробно-линейные отношения и проблема вложения Кенигса* // Докл. Росс. Акад. Наук, **403** (2005), No. 5, 607–609.

[17] M. Elin and V. Khatskevich, *The Koenigs Embedding Problem for Operator Affine Mappings* // Contemporary Math., **382**, (2005), 113–120.

[18] M. Elin and V. Khatskevich, *Triangular plus-operators in Banach spaces ; applications to the Koenigs embedding problem* // Journal of Nonlinear and Convex Analysis, **6** (2005), No. 1, 173–185.

[19] V. A. Khatskevich and V. A. Senderov, *On the structure of semigroups of operators acting in spaces with indefinite metric* // Operator Theory: Advances and Applications, **188** (2008), 205–213.

[20] В. Хацкевич, В. Сендеров, *О порождаемых плюс-операторами операторных множествах* // Вестник Воронежского гос. университета, **2** (2010), 170–174.

Сведения об авторах

Томас Яковлевич Азизов
Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1
Воронеж, 394006
Россия
E-Mail: azizov@math.vsu.ru

Валерий Анатольевич Сендеров
Пятницкое шоссе, 23-2-156
Москва, 125430
Россия
E-Mail: senderov.valery@gmail.com

Виктор Анатольевич Хацкевич
Department of Mathematics
ORT Braude Academic College
College Campus, P.O. Box 78
Karmiel 21982
Israel
E-Mail: victor_kh@hotmail.com