Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 1, 87 – 108

# Асимптотичні багатофазові Σ-розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами

В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко

(*Представлена А. Є. Шишковим*)

**Анотація.** Розглянуто задачу про побудову асимптотичних розв'язків сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза. Запропоновано поняття асимптотичного багатофазового Σ-розв'язку та алгоритм його побудови в околі точки $t = 0$, доведено теореми про точність, з якою такий локальний асимптотичний розв'язок задовольняє розглядуване рівняння.

**2010 MSC.** 35Q53, 34E20.

**Ключові слова та фрази.** Сингулярно збурене рівняння Кортевега-де Фріза, асимптотичні багатофазові Σ-розв'язки.

## 1. Вступ

В останні 50 років увага багатьох дослідників прикута до рівняння Кортевега-де Фріза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.1}$$

яке, як відомо, має різноманітні застосування в гідромеханіці та фізиці.

Це рівняння, що пов'язано з системою Нав'є–Стокса, стало широко відомим завдяки своїм так званим солітонним розв'язкам, які описують низку цікавих фізичних явищ і ефектів [1, 2], серед яких, наприклад, принцип нелінійної суперпозиції [3].

Дослідженню рівняння Кортевега-де Фріза і його узагальнень присвячено значну кількість праць. Зокрема, у [4] розглянуто питання про існування і єдиність його розв'язку. У низці праць (див. посилання в [5–8]) отримано розв'язок задачі Коші у випадку швидко

*Стаття надійшла в редакцію* 29.03.2012

ISSN 1810 – 3200. 

спадних початкових умов та періодичної задачі. У [10, 11] розглянуто питання про існування розв'язку задачі Коші для узагальненого рівняння Кортевега-де Фріза. Зокрема, у [10] для рівняння вигляду

$$u_t + u_{xxx} + a(u, u_x) = F(x, t), \quad x \in \mathbb{R},$$

доведено існування його розв'язку в просторі швидко спадних функцій, а для рівняння вигляду

$$u_t + u_{xxx} + a(u)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $a(u)$ — деяка нескінченно диференційовна функція, у випадку, коли початкова функція належить простору Соболєва $H^s$, $s > 3/2$, показано, що задача Коші має єдиний розв'язок у просторі $C([0,T]; H^s) \cap C^1([0,T]; H^{s-3})$, де значення $T$ залежить від норми початкової функції.

Всі ці розв'язки як правило є регулярними, тобто гладкими і такими, що мають певну (скінченну) асимптотику при $|x| \to +\infty$, або ж належать деякому спеціальному класу функцій.

З іншого боку, рівняння Кортевега-де Фріза володіє розв'язками і іншої природи, зокрема, такими, що мають особливості на одній або декількох просторових кривих. Такі розв'язки називаються сингулярними і вивчалися, наприклад, у [12–14]. Зокрема, у [13,14] розглянуто сингулярні розв'язки рівняння Кортевега-де Фріза як у випадку задачі Коші, так і у випадку так званих біжучих хвиль. При цьому для задачі Коші

$$u_t = uu_x - u_{xxx}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$
$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

вказано умови, за яких її розв'язок може існувати лише на скінченному (часовому) інтервалі (див. також [12]) і "руйнується" (за скінченний час, при відповідному виборі початкової функції в умові Коші), причому таке руйнування може мати або "грубий" характер, тобто коли $|u(t,x)| \to +\infty$ при $(t,x) \to (t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$, або ж більш "м'який" характер типу градієнтної катастрофи, тобто коли $|u_x(t,x)| \to +\infty$ при $(t,x) \to (t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$, де $(t_*, x_*)$ — деяка скінченна точка.

Питання про існування розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вивчалося в [15–17], де отримано умови існування узагальнених розв'язків даної задачі Коші і умови, при яких ця задача має розв'язок у просторі швидко спадних функцій.

Значна увага приділена також питанню про дослідження рівняння Кортевега-де Фріза з малим параметром [18–27]. Якщо в [18–20] досліджено регулярно (в певному сенсі) збурене рівняння Кортевега-де

Фріза зі сталими коефіцієнтами, в [21] розглянуто задачу про модуляцію нелінійних хвиль, коли наявність малого параметра у формулах для розв'язків спеціального типу проявляється через малі деформації асоційованих з ними ріманових поверхонь, а в [22–25] вивчено сингулярно збурене рівняння Кортевега-де Фріза зі сталими коефіцієнтами, то в [26,27] розглянуто сингулярно збурене рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами спеціального вигляду, яке є одним з модельних рівнянь, що описують поширення хвиль на мілкій воді зі змінною глибиною, і яке має вигляд

$$u_t + (\rho_1 + 3\rho_2 u)u_x + \varepsilon^2 \rho_3 u_{xxx} + \rho_4 u = 0, \tag{1.2}$$

де $\rho_1 = \sqrt{gH(x)}$, $\rho_2 = \sqrt{gH^{-1}(x)}/2$, $\rho_3 = \sqrt{gH^5(x)}/6$, $\rho_4 = \rho_{1x}/2$, $H(x)$ — глибина незбуреної рідини, $g$ — прискорення вільного падіння.

При цьому запропонований в [26, 27] алгоритм побудови асимптотичних солітоноподібних розв'язків рівняння (1.2) базується на розвитку методу ВКБ [28–31].

У подальшому ідеї методу ВКБ використано в [32, 33] для побудови асимптотичних однофазових солітоноподібних розв'язків сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^n u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k a_k(x,t), \quad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k b_k(x,t), \tag{1.4}$$

де $a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R} \times [0;T])$, $k \geq 0$; $0 < \varepsilon \ll 1$.

Крім того, за допомогою розвитку згаданого вище методу в [34] знайдено асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для рівняння (1.3), а в [35–38] побудовано дво- та багатофазові солітоноподібні розв'язки рівняння (1.3).

Природно виникає питання, чи можна побудувати асимптотичний розв'язок рівняння (1.3), який за своєю структурою в певному сенсі є близьким до багатофазового солітоноподібного розв'язку незбуреного ($\varepsilon = 0$) рівняння Кортевега-де Фріза (1.3). Саме дослідженню цього питання і присвячено цю статтю.

У даній статті, використовуючи спостереження про те, що багатосолітонний розв'язок класичного рівняння Кортевега-де Фріза при великих значеннях незалежних змінних можна (наближено) зобразити у вигляді лінійної комбінації його односолітонних розв'язків, асимптотичний багатофазовий розв'язок сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами будується на основі нелінійного методу ВКБ [39, с. 5] у вигляді суми, що містить функції, кожна з яких є однофазовою солітоноподібною функцією [26, с. 13, 27, с. 77, 32]. Такі розв'язки в подальшому називаються асимптотичними багатофазовими Σ-розв'язками.

У статті побудовано головний і перший член асимптотичного багатофазового Σ-розв'язку та доведено теореми про точність, з якою отриманий асимптотичний розв'язок задовольняє досліджуване рівняння. Отримані результати мають локальний характер.

## 2. Основні припущення і позначення

Позначимо [26,27] через $G = G(\mathbb{R}\times[0;T]\times\mathbb{R})$ лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in\mathbb{R}\times[0;T]\times\mathbb{R}$, для яких рівномірно за змінними $(x,t)$ на кожному компакті $K\subset\mathbb{R}\times[0;T]$ для довільних невід'ємних цілих чисел $n$, $m$, $p$, $q$, виконуються умови:

$1^0$. має місце співвідношення

$$\lim_{\tau\to+\infty}\tau^n\frac{\partial^{m+p+q}}{\partial x^m\partial t^p\partial\tau^q}f(x,t,\tau)=0;$$

$2^0$. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^n\frac{\partial^{m+p+q}}{\partial x^m\partial t^p\partial\tau^q}(f(x,t,\tau)-f^-(x,t))=0,\quad (x,t)\in K.$$

За допомогою $G_0=G_0(\mathbb{R}\times[0;T]\times\mathbb{R})\subset G$ позначимо простір таких функцій $f(x,t,\tau)$, для яких (додатково до умов $1^0$, $2^0$) рівномірно щодо $(x,t)$ на кожному компакті $K\subset\mathbb{R}\times[0;T]$ справджується рівність

$$\lim_{\tau\to-\infty}f(x,t,\tau)=0,\quad (x,t)\in K.$$

У подальшому використовується стандартне для асимптотичного аналізу позначення: запис $\Psi(x,t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^N\right)$ означає, що існують такі величина $\varepsilon_0>0$ і стала $C>0$, яка залежить від числа $N$ і від множини $K\subset\mathbb{R}\times[0;T]$, що $|\Psi(x,t,\varepsilon)|\le C\,\varepsilon^N$ для всіх $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ і $(x,t)\in K$.

**Означення 2.1.** *Функція $u(x,t,\varepsilon)$ називається асимптотичною $m$-фазовою $\sum$-функцією, якщо для довільного цілого числа $N\ge 0$ і деякого $m\in\mathbf{N}$, $m\ge 2$, для функції $u(x,t,\varepsilon)$ має місце зображення* *вигляду*

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N\left(x,t,\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon},\dots,\frac{S_m(x,t)}{\varepsilon},\varepsilon\right) + O(\varepsilon^{N+1}). \tag{2.1}$$

*Тут*

$$Y_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t) + \sum_{k=1}^{m} V_{jk}(t,\tau_k)\right), \tag{2.2}$$

$$\tau_1 = \frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\ \tau_2 = \frac{S_2(x,t)}{\varepsilon},\dots,\ \tau_m = \frac{S_m(x,t)}{\varepsilon},$$

$S_k = S_k(x,t)$, $k=\overline{1,m}$, *— деякі нескінченно диференційовні функції змінних* $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0;T]$, *причому* $\frac{\partial S_k}{\partial x}|_{\Gamma_k}\neq 0$, *де криві* $\Gamma_k = \{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0;T], S_k(x,t)=0\}$, $k=\overline{1,m}$; $u_j(x,t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0;T]$, $j=\overline{1,N}$, *— нескінченно диференційовні функції; функції* $V_{jk}(t,\tau_k)\in G_0$, $k=\overline{1,m}$, $j=\overline{0,N}$.

Криві $\Gamma_k$, $k=\overline{1,m}$, називаються кривими розриву. Цей термін виник у зв'язку з тим, що при побудові асимптотичного однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега-де Фріза, тобто у випадку $m=1$, крива $\Gamma = \{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0;T] : S(x,t) = x-\varphi(t) = 0\}$, де $\varphi(t)$, $t\in[0;T]$, — деяка функція, яка використовується в означенні однофазового солітоноподібного розв'язку для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза [29], є лінією розриву для граничного (при $\varepsilon\to 0$) розв'язку рівняння (1.3).

## 3. Побудова асимптотичного розв'язку

Розглянемо задачу про побудову асимптотичного $m$-фазового $\sum$-розв'язку рівняння (1.3) у випадку $n=2$. Враховуючи (2.1), (2.2), асимптотичний розв'язок рівняння (1.3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N(x,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{3.1}$$

де

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t) + \sum_{k=1}^{m} V_{jk}(t,\tau_k)\right), \tag{3.2}$$

$$\tau_k = \frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon},\quad k=\overline{1,m}.$$

Тут $N$ — довільне (фіксоване) натуральне число, $\varphi_k(t)$, $t\in[0;T]$, $k=\overline{1,m}$, — деякі функції, для яких виконується умова $\varphi_k(0)=0$, $k=\overline{1,m}$, і які визначаються із так званих умов ортогональності [26,33,35].

Функція

$$U_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t)$$

називається регулярною частиною асимптотики (3.1), (3.2), а функція

$$V_N(x,t,\varepsilon)=V_N(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\sum_{k=1}^{m}V_{jk}(t,\tau_k) \qquad —$$

сингулярною частиною асимптотики (3.1), (3.2).

При цьому $Y_N(x,t,\varepsilon)=U_N(x,t,\varepsilon)+V_N(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$.

Для визначення коефіцієнтів асимптотичного розкладу (3.1), аналогічно [32–37], обчислимо похідні $u_t(x,t,\varepsilon)$, $u_x(x,t,\varepsilon)$, $u_{xxx}(x,t,\varepsilon)$, підставимо їх значення в (1.3), візьмемо до уваги (3.1) і домножимо отриманий вираз на $\varepsilon$. У результаті отримаємо:

$$\begin{aligned}\varepsilon^3\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\biggl(\frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3}+\sum_{k=1}^{m}\biggl[\frac{\partial^3 V_{jk}}{\partial x^3}+\frac{3}{\varepsilon}\frac{\partial^3 V_{jk}}{\partial x^2\partial\tau_k}+\frac{3}{\varepsilon^2}\frac{\partial^3 V_{jk}}{\partial x\partial\tau_k^2}+\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{\partial^3 V_{jk}}{\partial\tau_k^3}\biggr]\biggr)\\ =\varepsilon a(x,t,\varepsilon)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\biggl(\frac{\partial u_j}{\partial t}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_{jk}}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}(-\varphi_k'(t))\frac{\partial V_{jk}}{\partial\tau_k}\biggr)\\ +\varepsilon b(x,t,\varepsilon)\biggl[\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\biggl(u_j+\sum_{k=1}^{m}V_{jk}\biggr)\biggr]\\ \times\biggl[\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\biggl(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\sum_{k=1}^{m}\biggl\{\frac{\partial V_{jk}}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_{jk}}{\partial\tau_k}\biggr\}\biggr)\biggr].\end{aligned} \tag{3.3}$$

Враховуючи довільність $\varepsilon$ і умову $V_{jk}(t,\tau_k)\in G_0$, $k=\overline{1,m}$, $j=\overline{0,N}$, з (3.3) для визначення коефіцієнтів регулярної частини асимптотики (3.1), (3.2) стандартним чином [32–37] знаходимо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t}+b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}=0, \tag{3.4}$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t}+b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}u_j=F_j(x,t), \quad j=\overline{1,N}, \tag{3.5}$$

де функції $F_j(x,t)$, $j=\overline{1,N}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $u_0(x,t)$, $u_1(x,t),\ldots,u_{j-1}(x,t)$, $j=\overline{1,N}$.

Процедура визначення членів регулярної частини асимптотики з системи рівнянь (3.4), (3.5) описана в [38].

Після знаходження регулярної частини асимптотики, враховуючи (3.4), (3.5), із співвідношення (3.3) шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях малого параметра $\varepsilon$ отримуємо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними для членів сингулярної частини асимптотики, розв'язки яких мають належати простору $G_0$.

## 4. Визначення сингулярної частини асимптотики

Для визначення сингулярної частини асимптотики (3.1), (3.2) скористаємося тим, що її члени належать простору швидко спадних щодо змінних $\tau_k$, $k=\overline{1,m}$, функцій.

### 4.1. Головний член сингулярної частини асимптотики

Головний член сингулярної частини асимптотики задовольняє співвідношення вигляду

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^3 V_{0k}}{\partial\tau_k^3}=-a_0(x,t)\sum_{k=1}^{m}\varphi_k'(t)\frac{\partial V_{0k}}{\partial\tau_k} + b_0(x,t)\left(u_0(x,t)+\sum_{k=1}^{m}V_{0k}\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_{0k}}{\partial\tau_k}. \tag{4.1}$$

Одночасно з (4.1) розглянемо допоміжне рівняння

$$\frac{\partial^3\bar V_{0k}}{\partial\tau_k^3}=-a_0(\varphi_k(t),t)\varphi_k'(t)\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k} + b_0(\varphi_k(t),t)\left(u_0(\varphi_k(t),t)+m\bar V_{0k}(t,\tau_k)\right)\frac{\partial\bar V_{0k}}{\partial\tau_k},\quad k=\overline{1,m}, \tag{4.2}$$

де функції $\bar V_{0k}=\bar V_{0k}(t,\tau_k)$, $k=\overline{1,m}$.

Враховуючи, що згідно визначення сингулярної частини асимптотики (3.1), (3.2) функція $V_0(t,\tau_k)$, $k=\overline{1,m}$, має належати простору $G_0$, безпосереднім інтегруванням рівняння (4.2) знаходимо його розв'язок у просторі $G_0$ [32,33]:

$$\bar V_{0k}(t,\tau_k)=-\frac{3}{m}\frac{A(\varphi_k(t),t)}{b_0(\varphi_k(t),t)}\,ch^{-2}\left(\sqrt{A(\varphi_k(t),t)}\,\frac{\tau_k+C_k}{2}\right),\quad k=\overline{1,m}. \tag{4.3}$$

Тут позначено

$$A(\varphi(t),t)=-a_0(\varphi(t),t)\varphi'(t)+b_0(\varphi(t),t)u_0(\varphi(t),t), \tag{4.4}$$

$C_k = C_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, — деякі (довільні) сталі, $t$ — параметр.

У подальшому покладемо $C_k(t) = 0$, $k = \overline{1,m}$, $t \in [0;T]$, і припустимо, що для всіх $t \in [0;T]$ виконується умова

$$A(\varphi_k(t), t) > 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{4.5}$$

Має місце твердження.

**Теорема 4.1.** *Нехай виконуються умови:*

1$^0$. *Функції $a_0(x,t)$, $b_0(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0;T])$;*

2$^0$. *Рівняння (3.4) має розв'язок $u_0(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0;T])$;*

3$^0$. *Існують такі нескінченно диференційовні функції $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $t \in [0;T]$, $k = \overline{1,m}$, що $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k'(0) \neq 0$, $k = \overline{1,m}$;*

4$^0$. *Має місце умова (4.5) і для всіх $t \in [0;T]$ справджуються рівності $A(\varphi_k(t),t) = A(\varphi_l(t),t)$, $k,l = \overline{1,m}$.*

*Тоді функція*

$$Y_0(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{0k}\left(t, \frac{x - \varphi_k(t)}{\varepsilon}\right) \tag{4.6}$$

*на множині $\mathbb{R} \times [0;\varepsilon^2 T]$ задовольняє співвідношення (3.3) з точністю $O(\varepsilon)$. Якщо ж $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;\varepsilon^2 T]$ такі, що $|x - \varphi_k(t)|/\varepsilon \to +\infty$ при всіх $k = \overline{1,m}$, то функція $Y_0(x,t,\varepsilon)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;\varepsilon^2 T]$, задовольняє співвідношення (3.3) з точністю $O(\varepsilon^2)$.*

*Доведення.* Для того, щоб показати, що функція (4.6) на множині $\mathbb{R} \times [0;\varepsilon^2 T]$ задовольняє співвідношення (3.3) з точністю $O(\varepsilon)$, підставимо вираз для $Y_0(x,t,\varepsilon)$ у співвідношення (3.3). Маємо:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^3 \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k^3} &= \varepsilon a(x,t,\varepsilon) \frac{\partial u_0}{\partial t} \\
&+ \varepsilon a(x,t,\varepsilon) \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial t} - a(x,t,\varepsilon) \sum_{k=1}^{m} \varphi_k'(t) \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \\
&+ \varepsilon b(x,t,\varepsilon)\left(u_0 + \sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{0k}\right)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}\right),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

звідки, враховуючи рівняння (3.4) і (4.2) для визначення головних членів регулярної і сингулярної частин асимптотики (3.1), (3.2), отримуємо, що для знаходження оцінки, з якою асимптотичний розв'язок (4.6) задовольняє співвідношення (3.3), досить оцінити вираз

$$R_0(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon) = -\sum_{k=1}^{m}\left(a_0(x,t)-a_0(\varphi_k(t),t)\right)\varphi_k'(t)\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\left(b_0(x,t)u_0(x,t)-b_0(\varphi_k(t),t)u_0(\varphi_k(t),t)\right)\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}$$
$$+\, b_0(x,t)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar V_{0k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\right)-\sum_{k=1}^{m} m b_0(\varphi_k(t),t)\bar V_{0k}(t,\tau_k)\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}. \tag{4.8}$$

З властивостей неперервної диференційовності функцій $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $u_0(x,t)$, $\varphi_k(t)$, $k=\overline{1,m}$, того, що $\bar V_{0k}(t,\tau_k)\in G_0$, $k=\overline{1,m}$, та властивостей множини $K\subset\mathbb{R}\times[0;T]$ випливає існування таких сталих $c_k>0$, $k=\overline{1,m}$, що має місце нерівність

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\left(a_0(x,t)-a_0(\varphi_k,t)\right)\varphi_k'(t)\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\right|$$
$$\le \sum_{k=1}^{m}c_k\left|(x-\varphi_k(t))\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\right| = \varepsilon\sum_{k=1}^{m}c_k\,|\tau_k|\,\left|\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\right|\le \varepsilon C_1,$$

де стала $C_1$ залежить від множини $K\subset\mathbb{R}\times[0;T]$.

Аналогічно знаходимо

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\left(b_0(x,t)u_0(x,t)-b_0(\varphi_k(t),t)u_0(\varphi_k(t),t)\right)\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\right|\le \varepsilon C_2,$$

де $C_2$ — деяка стала, що залежить від множини $K\subset\mathbb{R}\times[0;T]$.

Розглянемо тепер останні два доданки в правій частині (4.8). Маємо:

$$|R_{01}(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon)|$$
$$=\left|b_0(x,t)\left(\sum_{k=1}^{m}\bar V_{0k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\right)-\sum_{k=1}^{m} m b_0(\varphi_k(t),t)\bar V_{0k}(t,\tau_k)\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\right|$$
$$=\left|\sum_{k=1}^{m}\left(b_0(x,t)\sum_{l=1}^{m}\bar V_{0l}-m b_0(\varphi_k(t),t)\bar V_{0k}(t,\tau_k)\right)\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\right|$$
$$\le\left|\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m}\Big(b_0(x,t)-b_0(\varphi_l(t),t)\Big)\bar V_{0l}(t,\tau_l)\right)\frac{\partial V_{0k}}{\partial \tau_k}\right|$$
$$+\left|\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m}\Big(b_0(\varphi_l(t),t)\bar V_{0l}(t,\tau_l)-b_0(\varphi_k(t),t)\bar V_{0k}(t,\tau_k)\Big)\right)\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\right|$$

$$\leq \varepsilon C_3 + \left| \sum_{k=1}^{m} \left( \sum_{l=1}^{m} \Big( b_0(\varphi_l(t),t)\bar{V}_{0l}(t,\tau_l) - b_0(\varphi_k(t),t)\bar{V}_{0k}(t,\tau_k) \Big) \right) \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \right|,$$

де $C_3$ — деяка стала, що залежить від множини $K \subset \mathbb{R} \times [0;T]$.

З формули для $A(\varphi(t),t)$, формули (4.3), що дає явний вираз для функції $\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)$, $k = \overline{1,m}$, і умови $4^0$ теореми 4.1 про те, що $A(\varphi_k(t),t) = A(\varphi_l(t),t)$ для всіх $t \in [0;T]$, $k,l = \overline{1,m}$, слідує існування такого значення $\varepsilon_0 > 0$, що у відповідності з теоремою про середнє для всіх $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ виконується рівність

$$\begin{aligned}
&\left| b_0(\varphi_k(t),t)\bar{V}_{0k}(t,\tau_k) - b_0(\varphi_l(t),t)\bar{V}_{0l}(t,\tau_l) \right| \\
&\quad = \frac{3}{m} \left| A(\varphi_k(t),t)\,\mathrm{ch}^{-2}\left( \sqrt{A(\varphi_k(t),t)}\,\frac{x-\varphi_k(t)}{2\varepsilon} \right) \right. \\
&\qquad \left. - A(\varphi_l(t),t)\,\mathrm{ch}^{-2}\left( \sqrt{A(\varphi_l(t),t)}\,\frac{x-\varphi_l(t)}{2\varepsilon} \right) \right| \\
&\quad = \frac{3}{m} A(\varphi_k(t),t) \left| \mathrm{ch}^{-2}\left( \sqrt{A(\varphi_k(t),t)}\,\frac{x-\varphi_k(t)}{2\varepsilon} \right) \right. \\
&\quad \left. - \,\mathrm{ch}^{-2}\left( \sqrt{A(\varphi_l(t),t)}\,\frac{x-\varphi_l(t)}{2\varepsilon} \right) \right| = \frac{3}{m}\,\frac{|\varphi_k(t)-\varphi_l(t)|}{2\varepsilon} \\
&\times (A(\varphi_k(t),t))^{\frac{3}{2}} \left| th\left( \sqrt{A(\varphi_k(t),t)}\,\frac{x-\varphi_k(t)+(\varphi_k(t)-\varphi_l(t))\,\theta}{2\varepsilon} \right) \right| \\
&\qquad \times \mathrm{ch}^{-2}\left( \sqrt{A(\varphi_k(t),t)}\,\frac{x-\varphi_k(t)+(\varphi_k(t)-\varphi_l(t))\,\theta}{2\varepsilon} \right),
\end{aligned}$$

де $\theta \in (0;1)$ — деяке дійсне число.

Звідси слідує, що існує така стала $C_4 > 0$, яка залежить від множини $K \subset \mathbb{R} \times [0;T]$, що, якщо для деякого $C > 0$ має місце нерівність $|\varphi_k(t) - \varphi_l(t)| \leq C\varepsilon^2$ при всіх $t \in [0;T]$, то виконується нерівність

$$|R_{01}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)| \leq \varepsilon C_4.$$

Тоді, оскільки, $\varphi_k(0) = 0$, $k = \overline{1,m}$, то функція $Y_0(x,t,\varepsilon)$ вигляду (4.6) на множині $\mathbb{R} \times [0;\varepsilon^2 T]$ задовольняє співвідношення (3.3) з точністю $O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$.

Враховуючи, що $\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)$ при кожному $k = \overline{1,m}$ є швидко спадною за змінною $\tau_k$ функцією, то у випадку, коли $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;\varepsilon^2 T]$ такі, що $|x - \varphi_k(t)|/\varepsilon = |\tau_k| \to +\infty$ при всіх $k = \overline{1,m}$, отримуємо властивість: функція $Y_0(x,t,\varepsilon)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;\varepsilon^2 T]$, вигляду (4.6) задовольняє співвідношення (3.3) з точністю $O(\varepsilon^2)$.

Теорему 4.1 доведено. □

## 4.2. Визначення першого члена сингулярної частини асимптотики

Перший член сингулярної частини асимптотики (3.1), (3.2) в околі кожної кривої $x = \varphi_k(t)$, $t \in [0; T]$, $k = \overline{1, m}$, визначається з рівнянь:

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^3 V_{1l}}{\partial \tau_l^3} + a_0(\varphi_k(t), t) \sum_{l=1}^{m} \varphi_l'(t) \frac{\partial V_{1l}}{\partial \tau_l} - b_0(\varphi_k(t), t) \times \left[ \left( u_0(\varphi_k(t), t) + \sum_{l=1}^{m} V_{0l} \right) \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial V_{1l}}{\partial \tau_l} + \sum_{l=1}^{m} V_{1l} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial V_{0l}}{\partial \tau_l} \right] = \mathcal{F}_{1k}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m), \quad k = \overline{1, m}, \quad (4.9)$$

де функція $\mathcal{F}_{1k}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $k = \overline{1, m}$, задається рекурентним чином за значеннями $V_{0l} = V_{0l}(t, \tau_l)$, $l = \overline{1, m}$, і має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1k}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) &= a_0(\varphi_k(t), t) \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial V_{0l}}{\partial t} \\ &- \tau_k a_{0x}(\varphi_k(t), t) \sum_{l=1}^{m} \varphi_l'(t) \frac{\partial V_{0l}}{\partial \tau_l} - a_1(\varphi_k(t), t) \sum_{l=1}^{m} \varphi_l'(t) \frac{\partial V_{0l}}{\partial \tau_l} \\ &+ b_0(\varphi_k(t), t) \left( \tau_k u_{0x}(\varphi_k(t), t) + u_1(\varphi_k(t), t) \right) \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial V_{0l}}{\partial \tau_l} \\ &+ b_0(\varphi_k(t), t) u_{0x}(\varphi_k(t), t) \sum_{l=1}^{m} V_{0l} \\ &+ \tau_k b_{0x}(\varphi_k(t), t) \left( u_0(\varphi_k(t), t) + \sum_{l=1}^{m} V_{0l} \right) \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial V_{0l}}{\partial \tau_l} \\ &+ b_1(\varphi_k(t), t) \left( u_0(\varphi_k(t), t) + \sum_{l=1}^{m} V_{0l} \right) \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial V_{0l}}{\partial \tau_l}. \end{aligned}$$

Як і вище при визначенні головного члена асимптотики (3.1), (3.2), одночасно з (4.9) розглянемо допоміжну функцію $\bar{V}_{1k} = \bar{V}_{1k}(t, \tau_k)$, $k = \overline{1, m}$, і, відповідно, допоміжне рівняння, яке у даному випадку має вигляд

$$\frac{\partial^3 \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k^3} + a_0(\varphi_k(t), t) \varphi_k'(t) \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} - b_0(\varphi_k(t), t) \times \left( u_0(\varphi_k(t), t) \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} + m \bar{V}_{0k} \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k} + m \bar{V}_{1k} \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \right) = \bar{\mathcal{F}}_{1k}(t, \tau_k), \quad (4.10)$$

де

$$\bar{\mathcal{F}}_{1k}(t,\tau_k) = a_0(\varphi_k(t),t)\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial t} - \tau_k a_{0x}(\varphi_k(t),t)\varphi_k'(t)\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}$$
$$- a_1(\varphi_k(t),t)\varphi_k'(t)\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} + b_0(\varphi_k(t),t)u_{0x}(\varphi_k(t),t)\left(\bar{V}_{0k} + \tau_k\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}\right)$$
$$+b_0(\varphi_k(t),t)u_1(\varphi_k(t),t)\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} + \tau_k b_{0x}(\varphi_k(t),t)\left(u_0(\varphi_k(t),t) + m\bar{V}_{0k}\right)\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}$$
$$+ b_1(\varphi_k(t),t)\left(u_0(\varphi_k(t),t) + m\bar{V}_{0k}\right)\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}, \quad k = \overline{1,m},$$

функції $\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)$, $k = \overline{1,m}$, визначено згідно формули (4.3).

Очевидно, що за побудовою функція $\bar{\mathcal{F}}_{1k}(t,\tau_k) \in G_0$, $k = \overline{1,m}$.

У [40] показано, що необхідною і достатньою умовою існування розв'язку рівняння (4.10) у просторі $G$ є умова ортогональності вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathcal{F}}_{1k}(t,\tau_k)\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)\,d\tau_k = 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{4.11}$$

При цьому в просторі $G$ розв'язок рівняння (4.10) за умови (4.5) записується за допомогою формули [40]

$$\bar{V}_{1k}(t,\tau_k) = \nu_{1k}(t)\eta_{1k}(t,\tau_k) + \psi_{1k}(t,\tau_k), \quad k = \overline{1,m}, \tag{4.12}$$

де позначено

$$\nu_{1k}(t) = -\left(A(\varphi_k(t),t)\right)^{-1}\lim_{\tau_k\to-\infty}\Phi_{1k}(t,\tau_k), \quad k = \overline{1,m},$$

функції $\eta_{1k}(t,\tau_k) \in G$, $k = \overline{1,m}$, а функції $\psi_{1k}(t,\tau_k)$, $k = \overline{1,m}$, є швидко спадними за $\tau_k$,

$$\Phi_{1k}(t,\tau_k) = \int\limits_{-\infty}^{\tau_k} \bar{\mathcal{F}}_{1k}(t,\xi)\,d\xi + E_{1k}(t), \quad k = \overline{1,m}, \tag{4.13}$$

причому сталі інтегрування $E_{1k}(t)$, $k = \overline{1,m}$, вибираються з умови

$$\lim_{\tau_k\to+\infty}\Phi_{1k}(t,\tau_k) = 0, \quad k = \overline{1,m}.$$

При цьому, очевидно, що функція $\bar{V}_{1k}(t,\tau_k) \in G_0$, $k = \overline{1,m}$, тоді і лише тоді, коли має місце співвідношення

$$\lim_{\tau_k\to-\infty}\Phi_{1k}(t,\tau_k) = 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{4.14}$$

Зауважимо, що при кожному $k = \overline{1,m}$ розв'язок рівняння (4.10) у просторі $G_0$ визначається з точністю до функцій ядра оператора $L_{1k} : G_0 \to G_0$, $k = \overline{1,m}$, де

$$L_{1k} = \frac{d^2}{d\tau_k^2} + a_0(\varphi_k(t),t)\varphi_k'(t) - b_0(\varphi_k(t),t)u_0(\varphi_k(t),t) \\ - mb_0(\varphi_k(t),t)\bar{V}_0(t,\tau_k),$$

властивості якого розглядалися в [41].

Єдиною нетривіальною функцією ядра оператора $L_{1k}$, $k = \overline{1,m}$, є функція $\partial\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)/\partial\tau_k$, а, отже, загальний розв'язок рівняння (4.10) у просторі $G$ можна записати таким чином:

$$\bar{V}_{1k}(t,\tau_k) = \psi_{1k} + c_{1k}(t)\frac{\partial}{\partial\tau_k}\bar{V}_{0k}(t,\tau_k),$$

де функцію $\psi_{1k}(t,\tau_k)$ визначено вище; $c_{1k}(t)$, $k = \overline{1,m}$, — довільні сталі, $t \in [0;T]$ — параметр.

Як і у випадку однофазових солітоноподібних розв'язків [32, 33] рівняння (1.3), умова ортогональності (4.11) еквівалентна звичайному диференціальному рівнянню для функції $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, яке в даному випадку має вигляд

$$\begin{aligned} &15\,a_0(\varphi_k,t)\,b_0(\varphi_k,t)\,\frac{d}{dt}\,A(\varphi_k,t) + 16\,b_{0x}(\varphi_k,t)\,A^2(\varphi_k,t) \\ &\quad + 10\,(\,a_{0x}(\varphi_k,t)\,b_0(\varphi_k,t) - 2\,a_0(\varphi_k,t)\,b_{0x}(\varphi_k,t)\,)\,A(\varphi_k,t)\,\varphi_k' \\ &\qquad + 10\,b_0(\varphi_k,t)\,(\,b_0(\varphi_k,t)\,u_{0x}(\varphi_k,t) - b_{0x}(\varphi_k,t)\,u_0(\varphi_k,t) \\ &\qquad\qquad - 20b_{0t}(\varphi_k,t)a_0(\varphi_k,t)\,)\,A(\varphi_k,t) = 0, \quad k = \overline{1,m}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

де функція $A(\varphi_k,t)$, $k = \overline{1,m}$, задана згідно (4.4).

Очевидно, що рівняння (4.15) при досить загальних умовах щодо функцій $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$ за початкових умов $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k'(0) \neq 0$, $k = \overline{1,m}$, має розв'язок на деякому проміжку $[0;T]$, $T > 0$.

З'ясуємо тепер питання про те, за яких умов щодо коефіцієнтів $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$ функція $\bar{V}_{1k}(t,\tau_k)$, $k = \overline{1,m}$, належить простору $G_0$.

Беручи до уваги (4.11) та умову (4.14), з (4.13) безпосередньо за допомогою інтегрування знаходимо функцію $\Phi_{1k}(t,\tau_k)$, $k = \overline{1,m}$. Маємо:

$$\Phi_{1k}(t,\tau_k) = \frac{6}{m}\Bigg[a_0(\varphi_k,t)\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi_k,t)}}{b_0(\varphi_k,t)}\right) \\ + \big(a_{0x}(\varphi_k,t)\varphi_k'(t) - b_{0x}(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t) + b_0(\varphi_k,t)u_{0x}(\varphi_k,t)\big)$$

$$\times \frac{\sqrt{A(\varphi_k,t)}}{b_0(\varphi_k,t)} + \frac{(A(\varphi_k,t))^{\frac{3}{2}}\, b_{0x}(\varphi_k,t)}{b_0^2(\varphi_k,t)} + \sqrt{A(\varphi_k,t)}u_{0x}(\varphi_k,t)\Bigg]$$
$$\times \left(1 - th\Big(\sqrt{A(\varphi_k,t)}\,\frac{\tau_k}{2}\Big)\right)$$
$$+ \frac{3}{m}A(\varphi_k,t)\frac{a_1(\varphi_k,t)\varphi_k'(t) - b_1(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t) - b_0(\varphi_k,t)u_1(\varphi_k,t)}{b_0(\varphi_k,t)}$$
$$\times ch^{-2}\Big(\sqrt{A(\varphi_k,t)}\,\frac{\tau_k}{2}\Big) - \frac{1}{m}\left[\frac{3}{2}\frac{a_0(\varphi_k,t)}{b_0(\varphi_k,t)}\,\frac{d}{dt}(A(\varphi_k,t))\right.$$
$$\left. - \,3A(\varphi_k,t)\frac{a_{0x}(\varphi_k,t)\varphi_k'(t) - b_{0x}(\varphi_k,t) - b_0(\varphi_k,t)u_{0x}(\varphi_k,t)}{b_0(\varphi_k,t)}\right]$$
$$\times \tau_k\; ch^{-2}\Big(\sqrt{A(\varphi_k,t)}\,\frac{\tau_k}{2}\Big)$$
$$+ \frac{9A^2(\varphi_k,t)}{2mb_0^2(\varphi_k,t)}\,(b_1(\varphi_k,t) + \tau_k b_{0x}(\varphi_k,t))\;\, ch^{-4}\Big(\sqrt{A(\varphi_k,t)}\,\frac{\tau_k}{2}\Big)$$
$$- \frac{3}{m}(A(\varphi_k,t))^{\frac{3}{2}}\frac{b_{0x}(\varphi_k,t)}{b_0^2(\varphi_k,t)}\; sh\Big(\sqrt{A(\varphi_k,t)}\,\frac{\tau_k}{2}\Big)\; ch^{-3}\Big(\sqrt{A(\varphi_k,t)}\,\frac{\tau_k}{2}\Big),$$

де $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $t \in [0;T]$, $k = \overline{1,m}$, — згадані вище розв'язки диференціального рівняння (4.15).

Неважко переконатися, що рівність $\lim_{\tau_k \to -\infty} \Phi_{1k}(t,\tau_k) = 0$, $k = \overline{1,m}$, має місце, якщо при кожному $t \in [0;T]$ функція $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $t \in [0;T]$, $k = \overline{1,m}$, додатково до рівняння (4.15) задовольняє співвідношення

$$a_0(\varphi_k,t)\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi_k,t)}}{b_0(\varphi_k,t)}\right) + \sqrt{A(\varphi_k,t)}u_{0x}(\varphi_k,t)$$
$$+ \big(a_{0x}(\varphi_k,t)\varphi_k'(t) - b_{0x}(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t) + b_0(\varphi_k,t)u_{0x}(\varphi_k,t)\big)$$
$$\times \frac{\sqrt{A(\varphi_k,t)}}{b_0(\varphi_k,t)} + \frac{(A(\varphi_k,t))^{\frac{3}{2}}\, b_{0x}(\varphi_k,t)}{b_0^2(\varphi_k,t)} = 0. \quad (4.16)$$

**Зауваження 4.1.** За умов $a_0(x,t) = a_0(x)$, $b_0(x,t) = b_0(x)$, для випадку так званого нульового фону, тобто, коли в якості розв'язку рівняння (3.4) береться функція $u_0(x,t) \equiv 0$, диференціальні рівняння (4.15), (4.16) є сумісними, наприклад, тоді, коли виконується співвідношення $(a_0(x))^5 = C(b_0(x))^6$, $x \in \mathbb{R}$, де $C \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ — деяке (довільне) число. У цьому випадку рівняння (4.15) для функції $\varphi_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, значно спрощується і набуває вигляду

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \rho_k\, \sqrt[3]{a_0(\varphi_k)}, \quad k = \overline{1,m}, \quad (4.17)$$

де $\rho_k$, $k = \overline{1,m}$, — деякі (довільні) від'ємні попарно різні дійсні числа.

У даному випадку, рівняння (4.17) з початковою умовою $\varphi_k(0) = 0$, $k = \overline{1,m}$, має (локально) розв'язок, вираз $A(\varphi(t),t)$ набуває вигляду $A(\varphi(t),t) = -a_0(\varphi(t))\varphi'(t)$ і виконується умова (4.5), бо, як легко бачити, при кожному $k = \overline{1,m}$ функції $a_0(\varphi_k(t))$, ${\varphi_k}'(t)$ мають різні знаки.

Має місце наступне твердження.

**Теорема 4.2.** *Нехай виконуються умови:*

$1^0$. *Функції $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $a_1(x,t)$, $b_1(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}\times[0;T])$;*

$2^0$. *Рівняння (3.4), (3.5) мають розв'язки $u_0(x,t)$, $u_1(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}\times[0;T])$ відповідно;*

$3^0$. *Функції $\varphi_k = \varphi_k(t)$, $t \in [0;T]$, $k = \overline{1,m}$, задовольняють диференціальні рівняння (4.15), (4.16) з початковою умовою $\varphi_k(0) = 0$, $k = \overline{1,m}$, при цьому $\varphi_k'(0) \neq 0$, $k = \overline{1,m}$, і має місце умова $4^0$ теореми 4.1.*

*Тоді функція*

$$Y_1(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^m \bar{V}_{0k}\left(t, \frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\left(u_1(x,t) + \sum_{k=1}^m \bar{V}_{1k}\left(t, \frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon}\right)\right) \tag{4.18}$$

*на множині $\mathbb{R}\times[0;\varepsilon^3T]$ задовольняє співвідношення (3.3) з точністю $O(\varepsilon^2)$. Якщо ж $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0;\varepsilon^3T]$ такі, що $|x-\varphi_k(t)|/\varepsilon \to +\infty$ при всіх $k = \overline{1,m}$, то функція $Y_1(x,t,\varepsilon)$, $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0;\varepsilon^3T]$, задовольняє співвідношення (3.3) з точністю $O(\varepsilon^3)$.*

*Доведення.* Підставимо функцію (4.18) у співвідношення (3.3). Маємо:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^3\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \varepsilon^4\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k^3} + \varepsilon\sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k^3} \\
&= \varepsilon a(x,t,\varepsilon)\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + a(x,t,\varepsilon)\left(\varepsilon\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial t} + \varepsilon^2\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial t}\right) \\
&\quad - a(x,t,\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^m \varphi_k'(t)\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} + \varepsilon\sum_{k=1}^m \varphi_k'(t)\frac{\partial \bar{V}_{1k}}{\partial \tau_k}\right)
\end{aligned}$$

$$+\varepsilon b(x,t,\varepsilon)\Bigg(u_0+\varepsilon u_1+\sum_{k=1}^m \bar V_{0k}+\varepsilon\sum_{k=1}^m \bar V_{1k}\Bigg)$$
$$\times\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^m\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}+\sum_{k=1}^m\frac{\partial \bar V_{1k}}{\partial \tau_k}\right). \quad (4.19)$$

Аналогічно, як і при доведенні теореми 4.1, враховуючи рівняння (3.4), (3.5) і (4.2), (4.10) для регулярної і сингулярної частин асимптотики (3.1), (3.2), отримуємо, шо для знаходження оцінки, з якою функція (4.18) задовольняє співвідношення (3.3), досить оцінити вираз вигляду

$$R_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=R_{10}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$$
$$+R_{11}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon).$$

Тут

$$R_{10}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=\varepsilon a(x,t,\varepsilon)\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)$$
$$+\varepsilon b(x,t,\varepsilon)(u_0+\varepsilon u_1)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)$$
$$-\varepsilon^3\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}-\varepsilon^4\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}-\varepsilon a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t}-\varepsilon b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}$$
$$-\varepsilon a_0(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial t}-\varepsilon b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_1}{\partial x}-\varepsilon b_0(x,t)u_1\frac{\partial u_0}{\partial x}-\varepsilon F_1(x,t)$$
$$+\varepsilon\sum_{k=1}^m\left(a(x,t,\varepsilon)-a_0(\varphi_k,t)\right)\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial t}+\varepsilon^2\sum_{k=1}^m\left(a(x,t,\varepsilon)-a_0(\varphi_k,t)\right)\frac{\partial \bar V_{1k}}{\partial t}$$
$$-\sum_{k=1}^m\left(a(x,t,\varepsilon)-a_0(\varphi_k,t)-\varepsilon\tau_k a_{0x}(\varphi_k,t)-\varepsilon a_1(\varphi_k,t)\right)\varphi_k'\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}$$
$$+\varepsilon\sum_{k=1}^m\left(a(x,t,\varepsilon)-a_0(\varphi_k,t)\right)\frac{\partial \bar V_{1k}}{\partial \tau_k}$$
$$+\sum_{k=1}^m\big[b(x,t,\varepsilon)u_0(x,t)-b_0(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t)-\varepsilon\tau_k(b_0(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t))_x$$
$$-\varepsilon b_1(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t)-\varepsilon b_0(\varphi_k,t)u_1(\varphi_k,t)\big]\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}$$
$$+\varepsilon\sum_{k=1}^m\left(b(x,t,\varepsilon)u_0(x,t)-b_0(\varphi_k,t)u_0(\varphi_k,t)\right)\frac{\partial \bar V_{1k}}{\partial \tau_k}$$
$$+\varepsilon\sum_{k=1}^m\left[b(x,t,\varepsilon)u_{0x}(x,t)-b_0(\varphi_k,t)u_{0x}(\varphi_k,t)\right]\frac{\partial \bar V_{1k}}{\partial \tau_k}+O(\varepsilon^2),$$

де $F_1(x,t)$ — функція в правій частині рівняння (3.5) при $j=1$;

$$R_{11}(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon)=B_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon)\\ +\varepsilon B_2(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon)+\varepsilon B_3(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon)\\ +\varepsilon^2 B_4(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon). \quad (4.20)$$

Тут

$$B_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon)=b(x,t,\varepsilon)\biggl(\sum_{k=1}^m \bar V_{0k}\biggr)\biggl(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\biggr)\\ -\sum_{k=1}^m m b_0(\varphi_k,t)\bar V_{0k}\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}-\varepsilon\sum_{k=1}^m m\tau_k b_{0x}(\varphi_k,t)\bar V_{0k}\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\\ -\varepsilon\sum_{k=1}^m m b_1(\varphi_k,t)\bar V_{0k}\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k},$$

$$B_2(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon)=b(x,t,\varepsilon)\biggl(\sum_{k=1}^m \bar V_{1k}\biggr)\biggl(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\biggr)\\ -\sum_{k=1}^m m b_0(\varphi_k,t)\bar V_{1k}\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k},$$

$$B_3(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon)=b(x,t,\varepsilon)\biggl(\sum_{k=1}^m \bar V_{0k}\biggr)\biggl(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar V_{1k}}{\partial \tau_k}\biggr)\\ -\sum_{k=1}^m m b_0(\varphi_k,t)\bar V_{0k}\frac{\partial \bar V_{1k}}{\partial \tau_k},$$

$$B_4(x,t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m,\varepsilon)=b(x,t,\varepsilon)\biggl(\sum_{k=1}^m \bar V_{1k}\biggr)\biggl(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \bar V_{1k}}{\partial \tau_k}\biggr).$$

Аналогічно, як і при доведенні теореми 4.1, використовуючи теорему про приріст функції, отримуємо, що існують такі сталі $C_{1k}>0$, $C_{2k}>0$, $k=\overline{1,m}$, для яких виконується нерівність

$$\biggl|\sum_{k=1}^m \bigl(b(x,t,\varepsilon)u_0(x,t)-b_0(\varphi_k(t),t)u_0(\varphi_k(t),t)\\ -\varepsilon\tau_k(b_0(\varphi_k(t),t)u_0(\varphi_k(t),t))_x-\varepsilon b_1(\varphi_k(t),t)\bigr)\frac{\partial \bar V_{0k}}{\partial \tau_k}\biggr|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} C_{1k}|x-\varphi_k(t)|^2 \left|\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}\right| + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} C_{2k}|x-\varphi_k(t)| \left|\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}\right| + O(\varepsilon^2) \leq C_5\varepsilon^2,$$

де $C_5 > 0$ — деяка стала, яка залежить від множини $K \subset \mathbb{R} \times [0;T]$.

Аналогічні оцінки мають місце і для інших доданків виразу для $R_{10}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$.

Розглянемо тепер доданок $R_{11}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$. Для функції $B_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$ за допомогою групування доданків і оцінки відповідних різниць, отримуємо асимптотичне співвідношення

$$\begin{aligned}
&B_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) \\
&\quad = b(x,t,\varepsilon)\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\bar{V}_{0k}\Bigg)\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k}\Bigg) - \sum_{k=1}^{m} m b_0(\varphi_k(t),t)\bar{V}_{0k}\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \\
&\quad - \varepsilon\sum_{k=1}^{m} m\tau_k b_{0x}(\varphi_k(t),t)\bar{V}_{0k}\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} - \varepsilon\sum_{k=1}^{m} m b_1(\varphi_k(t),t)\bar{V}_{0k}\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{m}\Bigg(\sum_{l=1}^{m}(b_0(x,t)+\varepsilon b_1(x,t))\bar{V}_{0l} - \big(b_0(\varphi_k(t),t) \\
&\qquad\qquad + \varepsilon\tau_k b_{0x}(\varphi_k(t),t) + \varepsilon b_1(\varphi_k(t),t)\big)\bar{V}_{0k}\Bigg)\frac{\partial \bar{V}_{0k}}{\partial \tau_k} + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Доданки правої частини, що залежать від функції $b_0(x,t)$ та її похідних, запишемо наступним чином:

$$\begin{aligned}
&b_0(x,t)\bar{V}_{0l} - (b_0(\varphi_k(t),t) + \varepsilon\tau_k b_{0x}(\varphi_k(t),t))\,\bar{V}_{0k} \\
&\quad = (b_0(x,t) - b_0(\varphi_l(t),t) - b_{0x}(\varphi_l(t),t)(x-\varphi_l(t)))\,\bar{V}_{0l} \\
&\qquad + \big[(b_0(\varphi_l(t),t) + b_{0x}(\varphi_l(t),t)(x-\varphi_l(t)))\,\bar{V}_{0l} \\
&\qquad\qquad - (b_0(\varphi_k(t),t) + b_{0x}(\varphi_k(t),t)(x-\varphi_k(t)))\,\bar{V}_{0k}\big].
\end{aligned}$$

На підставі теореми про приріст функції і умови $3^0$ теореми 4.2 знаходимо, що виконуються нерівності:

$$\big|(b_0(x,t) - b_0(\varphi_l(t),t) - b_{0x}(\varphi_l(t),t)(x-\varphi_l(t)))\,\bar{V}_{0l}\big| \leq C_6\varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned}
&\big|(b_0(\varphi_l(t),t) + b_{0x}(\varphi_l(t),t)(x-\varphi_l(t)))\,\bar{V}_{0l} \\
&\quad - (b_0(\varphi_k(t),t) + b_{0x}(\varphi_k(t),t)(x-\varphi_k(t)))\,\bar{V}_{0k}\big| \leq C_7\frac{|\varphi_k(t)-\varphi_l(t)|}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

де $C_6$, $C_7$ — деякі сталі, які залежать від множини $K \subset \mathbb{R} \times [0;T]$.

Звідси випливає асимптотичне співвідношення

$$B_1(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m;\varepsilon) = O(\varepsilon^2),$$

яке справджується для всіх $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0;\varepsilon^2 T]$.

Використовуючи аналогічні міркування при оцінюванні інших доданків виразу для $R_{11}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$ в (4.20), остаточно отримуємо асимптотичну рівність

$$R_{11}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) = O(\varepsilon^2).$$

Таким чином, функція

$$Y_1(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{0k}\left(t, \frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\left(u_1(x,t) + \sum_{k=1}^{m} \bar{V}_{1k}\left(t, \frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon}\right)\right)$$

на множині $\mathbb{R} \times [0;\varepsilon^3 T]$ задовольняє співвідношення (3.3) з точністю $O(\varepsilon^2)$.

Враховуючи, що $\bar{V}_{0k}(t,\tau_k)$, $\bar{V}_{1k}(t,\tau_k)$, при кожному $k = \overline{1,m}$ є швидко спадними за змінною $\tau_k$ функціями, у випадку, коли $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0;\varepsilon^2 T]$ такі, що $|x-\varphi_k(t)|/\varepsilon = |\tau_k| \to +\infty$ при всіх $k = \overline{1,m}$, отримуємо властивість: функція $Y_1(x,t,\varepsilon)$, $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0;\varepsilon^2 T]$, вигляду (4.18) задовольняє співвідношення (3.3) з точністю $O(\varepsilon^2)$.

Теорему 4.2 доведено. $\square$

## Висновки

Побудовано локальний асимптотичний розв'язок сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами у вигляді суми, що містить функції, кожна з яких є однофазовою солітоноподібною функцією. Отримано головний і перший член такого локального асимптотичного розв'язку, доведено теореми про точність, з якою побудований асимптотичний розв'язок задовольняє досліджуване рівняння.

### Література


[1] Э. Скотт, *Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике*, Советское радио, 1977.

[2] Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса*, Наука, 1988.

[3] R. Miura, *The Korteweg-de Vries equation: a survey of results* // SIAM Review, **18** (1976), No. 3, 412–459.

[4] A. Sjoberg, *On the Korteweg-de Vries equation: existence and uniqueness* // Journal Math. Anal. Appl., **29** (1970), No. 3, 569–579.

[5] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, 1980.

[6] Дж. Л. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, 1983.

[7] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, 1987.

[8] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, 1988.

[9] D. Blackmore, A. K. Prykarpatsky, V. Hr. Samoylenko, *Nonlinear dynamical systems of mathematical physics. Spectral and Symplectic Integrability Analysis*, World Scientific, 2011.

[10] T. Kato, *On the Korteweg-de Vries equation* // Manuscripta Math., **28** (1979), 89–99.

[11] В. М. Якупов, *О задаче Коши для уравнения Кортевега-де Фриса* // Дифференц. уравнения, **11** (1976), No. 3, 556–561.

[12] В. А. Аркадьев, А. К. Погребков, М. К. Поливанов, *Сингулярные решения уравнения КдВ и метод обратной задачи* // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IV. Зап. научн. сем. ЛОМИ: Наука, Ленинград. отд., **133** (1984), 17–37.

[13] С. И. Похожаев, *О сингулярных решениях уравнения Кортевега-де Фриза* // Матем. заметки, **5** (2010), No. 5, 770–777.

[14] С. И. Похожаев, *Об отсутствии глобальных решений уравнения Кортевега-де Фриза* // Современная математика. Фундаментальные направления, **39** (2011), 141–150.

[15] А. В. Фаминский, *Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений* // Труды семинара им. И. Г. Петровского, **13** (1988), 56–105.

[16] С. Н. Кружков, А. В. Фаминский, *Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза* // Матем. сборник, **120(162)** (1983), No. 3, 396–425.

[17] A. V. Faminskii, I. Yu. Bashlykova, *Weak solutions to one initial-boundary value problem with three boundary conditions for quasilinear evolution equations of the third order* // Ukr. Math. Bull., **5** (2008), No. 1, 83–98.

[18] F. de Kerf, *Asymptotic analysis of a class of perturbed Korteweg-de Vries initial value problems*, Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1988.

[19] Л. А. Калякин, *Возмущение солитона Кортевега-де Фриза* // Теоретическая и математическая физика, **92**, No. 1, (1992), 62–76.

[20] А. М. Ильин, Л. А. Калякин, *Возмущение конечносолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриса* // Доклады Академии наук, **336** (1994), No. 5, 595–598.

[21] H. Flaschka, M. G. Forest, D. W. McLaughlin, *Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg-de Vries equation* // Comm. Pure Appl. Math., **33** (1980), No. 6, 739–784.

[22] P. D. Lax, C. D. Levermore, *The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. I* // Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), No. 3, 253–290.

[23] P. D. Lax, C. D. Levermore, *The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. II* // Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), No. 5, 571–593.

[24] P. D. Lax, C. D. Levermore, *The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. III* // Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), No. 6, 809–829.

[25] D. W. McLaughlin, J. A. Strain, *Computing the weak limit of KdV* // Comm. Pure Appl. Math., **47** (1994), No. 10, 1319–1364.

[26] V. P. Maslov, G. A. Omel'yanov, *Geometric asymptotics for PDE. I.*, American Math. Society, 2001.

[27] В. П. Маслов, Г. А. Омельянов, *Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией* // Успехи мат. наук, **36(219)** (1981), No. 2, 63–124.

[28] L. Brillouin, *La mecanique ondulatoire de Schrodinger: une methode generale de resolution par approximations successives* // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, **183** (1926), 24–26.

[29] H. A. Kramers, *Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung* // Zeischtrift fur Physik, **39** (1926), No. 11–12, 828–840.

[30] G. Wentzel, *Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen fur die Zwecke der Wellenmechanik* // Zeitschrift fur Physik, **38** (1926), No. 6–7, 518–529.

[31] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, (1977).

[32] Yul. Samoylenko, *Asymptotical expansions for one-phase soliton-type solution to perturbed Korteweg-de Vries equation* // Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Institute of Mathematics, **3** (2004), 1435–1441.

[33] В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко *Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами* // Укр. мат. журн., **58**, No. 1, (2005), 111–124.

[34] В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко, *Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами* // Укр. мат. журн., **59** (2007), No. 1, 122–132.

[35] В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко, *Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами* // Укр. мат. журн., **60** (2008), No. 3, 378–387.

[36] В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко, *Асимптотичні m-фазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами. I.* // Укр. мат. журн., **64** (2012), No. 7, 970–987.

[37] В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко, *Асимптотичні m-фазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами. II.* // Укр. мат. журн., **64** (2012), No. 8, 1089–1105.

[38] Ю. І. Самойленко, *Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами (загальний випадок)* // Математичний вісник НТШ, **7** (2010), 227–242.

[39] С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, *Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях* // Современные проблемы математики, ВИНИТИ, **15** (1980), 3–94.

[40] V. Samoylenko, Yu. Samoylenko, *On Cauchy problem for Korteweg-de Vries equation with variable coefficients and small parameter* // Collection of papers "Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics", Siedlce (Poland), (2011), 128–135.

[41] В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко, *Існування розв'язку неоднорідного рівняння з одновимірним оператором Шредінгера в просторі швидко спадних функцій* // Укр. мат. вісник, **9** (2012), No. 2, 38–45.

## Відомості про авторів

**Валерій Григорович Самойленко, Юлія Іванівна Самойленко**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64,
01601, Київ,
Україна
*E-Mail:* vsam@univ.kiev.ua,
yusam@univ.kiev.ua