Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 2, 181 – 202

Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка

Александр И. Кожанов, Евгений Ф. Шарин

(*Представлена А. Е. Шишковим*)

Аннотация. Основная часть работы посвящена исследованию разрешимости задач сопряжения для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка. В дополнении приводятся дальнейшие обобщения и усиления полученных результатов.

2010 MSC. 35M99.

Ключевые слова и фразы. Неклассические дифференциальные уравнения высокого порядка, задача сопряжения, задача сопряжения-дифракции, регулярное решение, существование, единственность.

1. Постановка задачи

Пусть Ω есть интервал $(-1,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$. Далее, пусть $h(x)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ есть заданные функции, определенные при $x\in\overline{\Omega}$, $t\in[0,T]$, причем функция $h(x)$ строго положительна при $x\in\overline{\Omega}$, α_i, β_i, $i=\overline{1,4}$ — заданные действительные числа такие, что векторы $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ и $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ линейно независимы. Обозначим $D_t^k=\frac{\partial^k}{\partial t^k}$. Пусть L есть дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $u(x,t)$ определяется равенством

$$Lu=(-1)^{p+1}D_t^{2p}u-h(x)u_{xx}+c(x,t)u$$

(здесь $p\geq 1$ — натуральное число).

Обозначим $Q_1=(-1,0)\times(0,T)$, $Q_2=(0,1)\times(0,T)$.

Статья поступила в редакцию 8.01.2014

ISSN 1810 – 3200.

Задача сопряжения I : *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольниках* Q_1 *и* Q_2 *решением уравнения*

$$Lu = f(x,t) \tag{1.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1), \quad k = 0,\dots,p, \tag{1.2}$$

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=T} = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1), \quad k = 1,\dots,p-1 \tag{1.3}$$

(в случае $p = 1$ данное условие отсутствует),

$$\alpha_1 u(-0,t) + \alpha_2 u(+0,t) + \alpha_3 u_x(-0,t) + \alpha_4 u_x(+0,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{1.4}$$

$$\beta_1 u(-0,t) + \beta_2 u(+0,t) + \beta_3 u_x(-0,t) + \beta_4 u_x(+0,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{1.5}$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{1.6}$$

Уравнение (1.1) в случае $p = 1$ представляет собой волновое уравнение, в случае же $p > 1$ эти уравнения условно можно назвать "квазигиперболическими" (авторы не настаивают на таком названии, но в тоже время какого-либо другого названия, кроме обобщенного "уравнения неклассического типа", авторы не знают). Краевые задачи для таких уравнений — именно в случае $p > 1$ — изучались в работах В. Н. Врагова [2, 9], И. Е. Егорова и В. Е. Федорова [3]. Задачи сопряжения для уравнения (1.1) в случае $p = 1$ изучались многими авторами, из работ последнего времени отметим работы [4–11], однако в случае $p > 1$ подобные задачи не рассматривались.

В целом различные задачи с условиями сопряжения для тех или иных классов дифференциальных уравнений изучаются с довольно давних времен — они изучаются как задачи сопряжения-дифракции [12–17], как краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов [18–29]. Для неклассических уравнений задачи сопряжения изучены сравнительно мало — отметим лишь работы [30–32].

При выполнении условия линейной независимости векторов (α_1, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$) и ($\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$) один из миноров второго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix},$$

а именно, одно из чисел $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, $\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1$, $\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1$, $\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2$, $\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2$, $\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3$ — должен быть отличен от нуля. Следовательно, задачу сопряжения I можно преобразовать к одному из следующих видов.

Задача сопряжения I_1: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольниках* Q_1 *и* Q_2 *решением уравнения* (1.1) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2), (1.3), (1.6), *а также условия*

$$u(-0,t) = a_1 u_x(-0,t) + b_1 u_x(+0,t), \quad t \in (0,T), \tag{1.7}$$

$$u(+0,t) = c_1 u_x(-0,t) + d_1 u_x(+0,t), \quad t \in (0,T). \tag{1.8}$$

Задача сопряжения I_2: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольниках* Q_1 *и* Q_2 *решением уравнения* (1.1) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2), (1.3), (1.6), *а также условия*

$$u(-0,t) = a_2 u(+0,t) + b_2 u_x(+0,t), \quad t \in (0,T), \tag{1.9}$$

$$u_x(-0,t) = c_2 u(+0,t) + d_2 u_x(+0,t), \quad t \in (0,T). \tag{1.10}$$

Задача сопряжения I_3: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольниках* Q_1 *и* Q_2 *решением уравнения* (1.1) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2), (1.3), (1.6), *а также условия*

$$u(-0,t) = a_3 u(+0,t) + b_3 u_x(-0,t), \quad t \in (0,T), \tag{1.11}$$

$$u_x(+0,t) = c_3 u(+0,t) + d_3 u_x(-0,t), \quad t \in (0,T). \tag{1.12}$$

Задача сопряжения I_4: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольниках* Q_1 *и* Q_2 *решением уравнения* (1.1) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2), (1.3), (1.6), *а также условия*

$$u(+0,t) = a_4 u(-0,t) + b_4 u_x(+0,t), \quad t \in (0,T), \tag{1.13}$$

$$u_x(-0,t) = c_4 u(-0,t) + d_4 u_x(+0,t), \quad t \in (0,T). \tag{1.14}$$

Задача сопряжения I_5: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольниках* Q_1 *и* Q_2 *решением уравнения* (1.1) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2), (1.3), (1.6), *а также условия*

$$u(+0,t) = a_5 u(-0,t) + b_5 u_x(-0,t), \quad t \in (0,T), \tag{1.15}$$

$$u_x(+0,t) = c_5 u(-0,t) + d_5 u_x(-0,t), \quad t \in (0,T). \tag{1.16}$$

Задача сопряжения I_6: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольниках* Q_1 *и* Q_2 *решением уравнения* (1.1) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2), (1.3), (1.6), *а также условия*

$$u_x(-0,t) = a_6 u(-0,t) + b_6 u(+0,t), \quad t \in (0,T), \tag{1.17}$$

$$u_x(+0,t) = c_6 u(-0,t) + d_6 u(+0,t), \quad t \in (0,T). \tag{1.18}$$

Уточним, что в задачах I_1–I_6 числа a_i, b_i, c_i и d_i вычисляются через числа α_i и β_i.

Предметом исследования в настоящей работе будут задачи сопряжения I_1, I_3, I_4 и I_6 (причины будут пояснены ниже). Заметим, что задачи I_3 и I_4 соответствуют известным задачам, в которых задаются условия сопряжения решения и градиента решения.

Определим пространство, в котором будут изучаться свойства единственности и существования решений поставленных выше задач. Именно, положим

$$V_m = \{v(x,t):\ v(x,t) \in W_{2,x,t}^{2,m}(Q_1), \quad v(x,t) \in W_{2,x,t}^{2,m}(Q_2)\};$$

норму в пространстве V_m определим равенством

$$\|v\|_{V_m} = \|v\|_{W_{2,x,t}^{2,m}(Q_1)} + \|v\|_{W_{2,x,t}^{2,m}(Q_2)}$$

(здесь $m \geq 0$ есть целое число).

2. Единственность решений

Условиями, достаточными для единственности решений задачи сопряжения I, являются следующие:

(E_1): $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$;

(E_2): $\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1 \neq 0$;

(E_3): $\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \neq 0$;

(E_4): $\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3 \neq 0$;

(E_5): *функция $h(x)$ непрерывна всюду на отрезке $[-1,1]$, за исключением, быть может, точки 0, в которой она имеет разрыв первого рода, и строго положительна на этом отрезке*;

(E_6): $c(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $c(x,T) \geq 0$ *при* $x \in [-1,1]$, *существует число* λ_0 *такое, что* $\lambda_0 > T$, $((\lambda_0 - t)c(x,t))_t \leq 0$ *при* $(x,t) \in \overline{Q}$;

(E_7): $a_1 \leq 0$, $b_1c_1 \leq 0$, $d_1 \geq 0$;

(E_8): *если* $b_1 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, *то выполняется одно из неравенств*

$$\frac{a_1b_1d_1}{c_1} - b_1^2 \geq 0 \quad \text{или} \quad \frac{a_1c_1d_1}{b_1} - c_1^2 \geq 0;$$

(E_9): $c_3 \geq -1$, $b_3 \leq 0$, $a_3d_3 \geq 0$;

(E_{10}): $c_4 \leq 1$, $b_4 \geq 0$, $a_4d_4 \geq 0$;

(E_{11}): $a_6 \le 0$, $d_6 \ge 0$, $b_6 c_6 \le 0$;

(E_{12}): *если* $b_6 \ne 0$, $c_6 \ne 0$, *то одна из квадратичных форм* $(1 - \frac{b_6 d_6}{c_6})\xi^2 - 2b_6\xi\eta + (1-a_6)\eta^2$ *или* $(1+\frac{a_6 c_6}{b_6})\xi^2 + 2c_6\xi\eta + (1+d_6)\eta^2$ *является неотрицательно определенной.*

Теорема 2.1. *Пусть выполняется одна из групп условий* (E_1), (E_5), (E_6), (E_7), (E_8), *либо* (E_2), (E_5), (E_6), (E_9), *либо* (E_3), (E_5), (E_6), (E_{10}), *либо* (E_4), (E_5), (E_6), (E_{11}), (E_{12}). *Тогда задача сопряжения* I *не может иметь в пространстве* V_{2p} *более одного решения.*

Доказательство. Необходимо установить, что если $f(x,t) \equiv 0$, то при выполнении соответствующих условий решение задачи сопряжения I из пространства V_{2p} есть тождественно нулевая функция.

Пусть выполняются условия (E_1), (E_5), (E_6), (E_7) и (E_8). В этом случае задача сопряжения I сводится к задаче I_1. Прежде всего заметим, что если $b_1 = c_1 = 0$, то условия (1.7) и (1.8) становятся независимыми друг от друга условиями, и тем самым задача I_1 распадается на две независимые задачи в прямоугольниках Q_1 и Q_2, для каждой из этих задач в случае $f(x,t) \equiv 0$ из условий (E_5), (E_6) и (E_7) следует $u(x,t) \equiv 0$ (см. [3]).

Пусть выполняется $b_1 \ne 0$, $c_1 = 0$. В этом случае задача I_1 порождает обычную краевую задачу (без условий сопряжения) в прямоугольнике Q_2, и если $f(x,t) \equiv 0$, то вследствие условий (E_5), (E_6) и (E_7) имеем $u(x,t) \equiv 0$ в Q_2. Но тогда условие (1.7) преобразуется в условие

$$u(-0,t) = a_1 u_x(-0,t), \quad t \in (0,T);$$

тем самым вновь получаем задачу в прямоугольнике Q_1, для которой выполняется $u(x,t) \equiv 0$ — вновь вследствие условий (E_5), (E_6) и (E_7).

Итак, в случае $b_1 \ne 0$, $c_1 = 0$ решение задачи I_1 при $f(x,t) \equiv 0$ есть тождественно нулевая в Q функция.

Очевидно, что в случае $b_1 = 0$, $c_1 \ne 0$ при выполнении условий (E_5), (E_6) и (E_7) в случае $f(x,t \equiv 0)$ также будет выполняться $u(x,t) \equiv 0$ в Q.

Пусть теперь $b_1 \ne 0$, $c_1 \ne 0$, выполняются условия (E_1), (E_5), (E_6), (E_7), и пусть выполняется первое неравенство условия (E_8). Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{h(x)} Lu \cdot u_t \, dx\, dt + \gamma \int\limits_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{h(x)} Lu \cdot u_t \, dx\, dt = 0, \qquad (2.1)$$

в котором γ есть число $-\frac{b_1}{c_1}$. Интегрируя по частям и используя условия (1.7) и (1.8), получим следствие из (2.1):

$$\frac{2p-1}{2}\int\limits_{Q_1}\frac{1}{h(x)}(D_t^p u)^2\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_1}u_x^2\,dx\,dt$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_1}\frac{((\lambda_0-t)c(x,t))_t}{h(x)}u^2\,dx\,dt+\frac{\gamma(2p-1)}{2}\int\limits_{Q_2}\frac{1}{h(x)}(D_t^p u)^2\,dx\,dt$$
$$+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{Q_2}u_x^2\,dx\,dt+\frac{\lambda_0-T}{2}\int\limits_{-1}^{0}[D_t^p u(x,T)]^2\,dx$$
$$+\frac{\lambda_0-T}{2}\int\limits_{-1}^{0}u_x^2(x,T)\,dx+\frac{\lambda_0-T}{2}\int\limits_{-1}^{0}c(x,T)u^2(x,T)\,dx$$
$$+\frac{\gamma(\lambda_0-T)}{2}\int\limits_{0}^{1}[D_t^p u(x,T)]^2\,dx+\frac{\gamma(\lambda_0-T)}{2}\int\limits_{0}^{1}u_x^2(x,T)\,dx$$
$$+\frac{\gamma(\lambda_0-T)}{2}\int\limits_{0}^{1}c(x,T)u^2(x,T)\,dx-\frac{\gamma}{2}\int\limits_{Q_2}\frac{((\lambda_0-t)c(x,t))_t}{h(x)}u^2\,dx\,dt$$
$$+\int\limits_{0}^{T}\left[-\frac{a_1}{2}u_x^2(-0,t)-b_1u_x(-0,t)u_x(+0,t)+\frac{\gamma d_1}{2}u_x^2(+0,t)\right]dt$$
$$+\Bigg[-\frac{a_1(\lambda_0-T)}{2}u_x^2(-0,T)-b_1(\lambda_0-T)u_x(-0,T)u_x(+0,T)$$
$$+\frac{\gamma d_1(\lambda_0-T)}{2}u_x^2(+0,T)\Bigg].$$

Из этого равенства и условий (E_5)–(E_8) и следует, что функция $u(x,t)$ есть тождественно нулевая в прямоугольниках Q_1 и Q_2 функция.

Если выполняется второе неравенство условия (E_8), то вместо равенства (2.1) необходимо рассмотреть равенство

$$\widetilde{\gamma}\int\limits_{Q_1}\frac{\lambda_0-t}{h(x)}Lu\cdot u_t\,dx\,dt+\int\limits_{Q_2}\frac{\lambda_0-t}{h(x)}Lu\cdot u_t\,dx\,dt=0,$$

в котором $\widetilde{\gamma}$ есть число $-\frac{c_1}{b_1}$. Аналогичные предыдущему выкладки вновь дадут соотношения $u(x,t)\equiv 0$ в Q_1, $u(x,t)\equiv 0$ в Q_2.

Пусть теперь выполняются условия (E_2), (E_5), (E_6) и (E_9). В этом случае задача сопряжения I сводится к задаче I_3. Вновь рассмотрим равенство (2.1), в котором число γ есть число $\frac{a_3}{d_3}$ (при $d_3 \neq 0$, если же $d_3 = 0$, то задача I_3 является распадающейся). Интегрируя по частям, используя условия (1.11) и (1.12), условия теоремы и дополнительно неравенство

$$u^2(y,T) \leq \int\limits_0^1 u_x^2(x,T)\,dx, \quad 0 \leq y \leq 1, \tag{2.2}$$

вновь получим $u(x,t) \equiv 0$ в Q_1 и Q_2.

При выполнении условий (E_3), (E_5), (E_6) и (E_{10}), (E_4), (E_5), (E_6), (E_{11}) и (E_{12}) доказательство требуемого факта проводится вполне аналогично, уточним лишь, что задача I сводится к задачам I_4 и I_6, соответственно, число γ есть либо $\frac{d_4}{a_4}$, либо $\frac{b_6}{c_6}$, дополнительно используется неравенство

$$u^2(y,T) \leq \int\limits_{-1}^0 u_x^2(x,T)\,dx, \quad -1 \leq y \leq 0. \tag{2.3}$$

Теорема доказана. □

Замечание 2.1. Условия на числа a_i, b_i, c_i и d_i можно ослабить, если условие (E_6) заменить условием

(E_6'): *$c(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $c(x,t) \geq c_0 > 0$, $c_t(x,t) \leq 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$.*

Уточним, что при выполнении этого условия число λ_0 может быть любым из промежутка $(T, +\infty)$.

3. Существование решений

Изучение разрешимости задачи сопряжения I начнем с задачи I_3.

Прежде всего заметим, что если $a_3 = 0$ или $d_3 = 0$, то задача I_3 становится полураспадающейся или же распадающейся задачей, и ее исследование не представляется сложной проблемой.

Определим необходимое ниже пространство $\widetilde{V}_m$:

$$\widetilde{V}_m = \{v(x,t): \quad v(x,t) \in V_m, \quad v_x(x,t) \in V_m, \quad v_{xx}(x,t) \in V_m\}.$$

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия (E_2), (E_5), (E_6), условие*

$$a_3 \leq 0, \quad b_3 \leq 0, \quad c_3 \geq 0, \quad d_3 \leq 0,$$

и пусть функция $f(x,t)$ такова, что выполняются включения $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$. Тогда задача сопряжения I_3 разрешима в пространстве V_{2p}.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации. Пусть ε — положительное число, L_ε есть оператор, действие которого определяется равенством

$$L_\varepsilon u = Lu + \varepsilon(-1)^p h(x) D_t^{2p} u_{xx}.$$

Рассмотрим задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения*

$$L_\varepsilon u = f(x,t) \tag{3.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.2), (1.3), (1.6), (1.11) *и* (1.12). Покажем, что эта задача разрешима в пространстве $\widetilde{V}_{2p}$. Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство задач: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения* (3.1) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2), (1.3), (1.6), *а также условия*

$$u(-0,t) = \lambda a_3 u(+0,t) + b_3 u_x(-0,t), \quad t \in (0,T), \tag{3.2}$$

$$u_x(+0,t) = c_3 u(+0,t) + \lambda d_3 u_x(-0,t), \quad t \in (0,T). \tag{3.3}$$

Как это обычно делается при использовании теоремы о методе продолжения по параметру [33], обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых задача (3.1), (1.2), (1.3), (1.6), (3.2), (3.3) разрешима в пространстве $\widetilde{V}_{2p}$ для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$. Если окажется, что множество Λ не пусто, открыто и замкнуто (в топологии метрического пространства $X = [0,1]$), то оно будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$ (см. [33]).

Для того, чтобы установить наличие необходимых свойств у множества Λ, понадобятся априорные оценки. Покажем, что нужные оценки имеются.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{h(x)} L_\varepsilon u \cdot u_t \, dx\, dt + \gamma \int\limits_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{h(x)} L_\varepsilon u \cdot u_t \, dx\, dt = \int\limits_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{h(x)} f \cdot u_t \, dx\, dt + \gamma \int\limits_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{h(x)} f \cdot u_t \, dx\, dt,$$

в котором γ есть число $\frac{a_3}{d_3}$. Из этого равенства с помощью интегрирования по частям, условий теоремы и неравенства Юнга нетрудно получить первую оценку

$$\int\limits_{Q_1} \left[(D_t^p u)^2 + u_x^2 + \varepsilon (D_t^p u_x)^2\right] dx\,dt + \int\limits_{Q_2} \left[(D_t^p u)^2 + u_x^2 + \varepsilon (D_t^p u_x)^2\right] dx\,dt \leq N_1, \quad (3.4)$$

в которой число N_1 определяется лишь нормой функции $f(x,t)$ в пространстве $L_2(Q)$, а также числами a_3, b_3, c_3 и d_3.

Рассмотрим теперь равенство

$$-\int\limits_{Q_1} (\lambda_0 - t) L_\varepsilon u \cdot u_{xxt}\,dx\,dt - \gamma \int\limits_{Q_2} (\lambda_0 - t) L_\varepsilon u \cdot u_{xxt}\,dx\,dt = -\int\limits_{Q_1} (\lambda_0 - t) f \cdot u_{xxt}\,dx\,dt - \gamma \int\limits_{Q_2} (\lambda_0 - t) f \cdot u_{xxt}\,dx\,dt. \quad (3.5)$$

Интегрируя в этом равенстве слева по частям, справа же применяя неравенство Юнга и далее интегральные неравенства, которые позволяют оценить норму в пространстве L_2 производной по t через нормы в том же пространстве старших производных, нетрудно получить вторую оценку

$$\int\limits_{Q_1} \left[(D_t^p u_x)^2 + u_{xx}^2 + \varepsilon (D_t^p u_{xx})^2\right] dx\,dt + \int\limits_{Q_2} \left[(D_t^p u_x)^2 + u_{xx}^2 + \varepsilon (D_t^p u_{xx})^2\right] dx\,dt \leq N_2, \quad (3.6)$$

в которой число N_2 определяется лишь нормой функции $f(x,t)$ в пространстве $L_2(Q)$, а также функцией $c(x,t)$, числами a_3, b_3, c_3, d_3, T и ε.

Следующее равенство

$$\int\limits_{Q_1} L_\varepsilon u \cdot (-1)^{p+1} D_t^{2p} u\,dx\,dt + \int\limits_{Q_2} L_\varepsilon u \cdot (-1)^{p+1} D_t^{2p} u\,dx\,dt = \int\limits_{Q_1} f \cdot (-1)^{p+1} D_t^{2p} u\,dx\,dt + \int\limits_{Q_2} f \cdot (-1)^{p+1} D_t^{2p} u\,dx\,dt \quad (3.7)$$

и оценка (23) дают третью оценку

$$\int\limits_{Q_1} (D_t^{2p} u)^2 \, dx \, dt + \int\limits_{Q_2} (D_t^{2p} u)^2 \, dx \, dt \le N_3, \tag{3.8}$$

постоянная N_3 в которой вновь определяется нормой функции $f(x,t)$ в пространстве $L_2(Q)$, числами a_3, b_3, c_3, d_3, T и ε, а также функцией $c(x,t)$.

Последняя оценка

$$\int\limits_{Q_1} (D_t^{2p} u_{xx})^2 \, dx \, dt + \int\limits_{Q_2} (D_t^{2p} u_{xx})^2 \, dx \, dt \le N_4 \tag{3.9}$$

очевидна.

Оценки (3.4), (3.6), (3.8), (3.9) и дают возможность установить наличие требуемых свойств множества Λ.

Непустота Λ следует из того, что число 0 принадлежит ему. Действительно, при $\lambda = 0$ задача (3.1), (1.2), (1.3), (1.6), (3.2), (3.3) является распадающейся, разрешимость же задач (3.1), (1.2), (1.3), (1.6), (3.2) ($\lambda = 0$) и (3.1), (1.2), (1.3), (1.6), (3.3) ($\lambda = 0$) в прямоугольниках Q_1 и Q_2, соответственно, легко устанавливается с помощью тех же оценок (3.4), (3.6), (3.8), (3.9) (см. также [3]).

Покажем, что множество Λ открыто.

Пусть λ_0 есть элемент множества Λ. Множество Λ будет открытым, если при малой величине $|\widetilde{\lambda}|$ число $\lambda_0 + \widetilde{\lambda}$ также будет принадлежать Λ.

Для произвольной функции $v(x,t)$ из пространства $\widetilde{V}_{2p}$ рассмотрим задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения* (3.1) *и такую, что для нее выполняются условия* (1.2), (1.3), (1.6), *а также условия*

$$u(-0,t) = \lambda_0 a_3 u(+0,t) + b_3 u_x(-0,t) + \widetilde{\lambda} a_3 v(+0,t), \quad t \in (0,T), \tag{3.10}$$

$$u_x(+0,t) = c_3 u(+0,t) + \lambda_0 d_3 u_x(-0,t) + \widetilde{\lambda} d_3 v_x(-0,t), \quad t \in (0,T). \tag{3.11}$$

Обозначим для краткости $\varphi(t) = \widetilde{\lambda} a_3 v(+0,t)$, $\psi(t) = \widetilde{\lambda} d_3 v_x(-0,t)$ и положим

$$\Delta_1 = b_3 c_3 - (\lambda_0 a_3 - 1)(\lambda_0 d_3 - 1),$$

$$w_0(x,t) = \frac{1}{\Delta_1}\{[c_3 x^3 - (\lambda_0 d_3 - 1)x^2 - c_3 x + (\lambda_0 d_3 - 1)]\varphi(t) + [(1 - \lambda_0 a_3)x^3 + b_3 x^2 + (\lambda_0 a_3 - 1)x - b_3]\psi(t)\}$$

(заметим, что вследствие условий теоремы выполняется $\Delta_1 \neq 0$). Определим функцию $\widetilde{f}(x,t)$:

$$\widetilde{f}(x,t) = f(x,t) - L_\varepsilon w_0(x,t).$$

Рассмотрим задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения*

$$L_\varepsilon w = \widetilde{f}(x,t) \tag{3.12}$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.2), (1.3), (1.6), (3.2), (3.3) *при* $\lambda = \lambda_0$. Заметим, что функция $\widetilde{f}(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$ — это следует из принадлежности функции $v(x,t)$ пространству $\widetilde{V}_{2p}$. Согласно определению множества Λ, задача (3.12), (1.2), (1.3), (1.6), (3.2), (3.3) при $\lambda = \lambda_0$ имеет решение $w(x,t)$, принадлежащее пространству $\widetilde{V}_{2p}$. Положим $u(x,t) = w(x,t) + w_0(x,t)$. Очевидно, что функция $u(x,t)$ принадлежит пространству $\widetilde{V}_{2p}$, и что она является решением задачи (3.1), (1.2), (1.3), (1.6), (3.10), (3.11). Следовательно, данная задача порождает оператор A, действующий из пространства $\widetilde{V}_{2p}$ в себя: $A(v) = u$. Покажем, что при малой величине $|\widetilde{\lambda}|$ этот оператор будет сжимающим.

Пусть выполняется $f(x,t) \equiv 0$. Оценки (3.4), (3.6), (3.8) и (3.9) вместе с принадлежностью функции $v(x,t)$ пространству $\widetilde{V}_{2p}$ дают для решений задачи (3.1), (1.2), (1.3), (1.6), (3.10), (3.11) неравенство

$$\|w\|_{\widetilde{V}_{2p}} \leq C_1|\widetilde{\lambda}|\|v\|_{\widetilde{V}_{2p}}$$

с постоянной C_1, определяющейся лишь функцией $h(x)$ и числами a_3, b_3, c_3, d_3, T и ε. Из этого неравенства вытекает аналогичная оценка для функции $u(x,t)$:

$$\|u\|_{\widetilde{V}_{2p}} \leq C_1'|\widetilde{\lambda}|\|v\|_{\widetilde{V}_{2p}}.$$

Если теперь число $\widetilde{\lambda}$ таково, что выполняется $C_1'|\widetilde{\lambda}| < 1$, то оператор A и будет сжимающим.

Итак, при малой величине $|\widetilde{\lambda}|$ оператор A будет сжимающим в пространстве $\widetilde{V}_{2p}$. Следовательно, оператор A имеет в пространстве $\widetilde{V}_{2p}$ неподвижную точку $u(x,t)$: $A(u) = u$. Эта неподвижная точка представляет собой решение задачи (3.1), (1.2), (1.3), (1.6), (3.2), (3.3) при $\lambda = \lambda_0 + \widetilde{\lambda}$. А это и означает, что число $\lambda_0 + \widetilde{\lambda}$ принадлежит множеству Λ и далее — что множество Λ открыто.

Покажем теперь, что множество Λ замкнуто.

Пусть $\{\lambda_n\}$ есть последовательность чисел из множества Λ такая, что $\lambda_n \to \overline{\lambda}_0$, $u_n(x,t)$ есть решение задачи (3.1), (1.2), (1.3), (1.6), (3.2), (3.3) при $\lambda = \lambda_n$. Семейство функций $\{u_n(x,t)\}$ равномерно ограничено в пространстве $\widetilde{V}_{2p}$. Свойство рефлексивности гильбертова пространства, теоремы вложения и теорема о возможности выбора из сильно сходящейся в L_2 последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду (см. [34]) означают, что существуют последовательность $\{n_m\}$ натуральных чисел и функция $u(x,t)$ из пространства $\widetilde{V}_{2p}$ такие, что при $m \to \infty$ имеют место сходимости $u_{n_m}(x,t) \to u(x,t)$ *слабо в пространстве* $\widetilde{V}_{2p}$, $u_{n_m}(-0,t) \to u(-0,t)$, $u_{n_m}(+0,t) \to u(+0,t)$, $u_{n_m x}(-0,t) \to u_x(-0,t)$, $u_{n_m x}(+0,t) \to u_x(+0,t)$ *почти всюду* на $[0,T]$. Из этих сходимостей следует, что для предельной функции $u(x,t)$ будут выполняться уравнение (1.1), а также условия (1.2), (1.3), (1.6), (3.2), (3.3) при $\lambda = \overline{\lambda}_0$. А это и означает, что число $\overline{\lambda}_0$ принадлежит множеству Λ, и далее — что множество Λ замкнуто.

Итак, множество Λ не пусто, открыто и замкнуто, и, тем самым, совпадает с отрезком $[0,1]$. Следовательно, задача (3.1), (1.2), (1.3), (1.6), (1.11), (1.12) при фиксированном ε имеет решение $u(x,t) = u^\varepsilon(x,t)$, принадлежащее пространству $\widetilde{V}_{2p}$. Покажем, что для семейства функций $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ имеют место равномерные по ε априорные оценки.

Прежде всего заметим, что для семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ имеет место оценка (3.4). Далее, если в равенстве (3.5) в правой части дополнительно выполнить интегрирование по частям (с использованием условия $f_t(x,t) \in L_2(Q)$), то нетрудно получить для семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ оценку (3.6), но теперь с постоянной N_2', определяющейся нормами функций $f(x,t)$ и $f_t(x,t)$ в пространстве $L_2(Q)$, функцией $c(x,t)$, а также числами T, a_3, b_3, c_3 и d_3. Используя оценку (3.6) и равенство (3.7), получим, что для семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ имеет место следующая оценка:

$$\int\limits_{Q_1} \Big[(D_t^{2p} u^\varepsilon)^2 + \varepsilon (D_t^{2p} u_x^\varepsilon)^2\Big]\, dx\, dt + \int\limits_{Q_2} \Big[(D_t^{2p} u^\varepsilon)^2 + \varepsilon (D_t^{2p} u_x^\varepsilon)^2\Big]\, dx\, dt \le N_3',$$

постоянная N_3' в которой определяется нормами $f(x,t)$, $f_t(x,t)$ в пространстве $L_2(Q)$, функцией $c(x,t)$, а также числами T, a_3, b_3, c_3 и d_3.

Последняя оценка

$$\varepsilon^2 \int\limits_{Q_1} (D_t^{2p} u_{xx})^2\, dx\, dt + \varepsilon^2 \int\limits_{Q_2} (D_t^{2p} u_{xx})^2\, dx\, dt \le N_4'$$

очевидна.

Из доказанных оценок, вновь свойства рефлексивности гильбертова пространства, теорем вложения и теоремы о возможности выбора из сильно сходящейся в L_2 последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду, следует, что существуют последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел и функция $u(x,t)$ из пространства V_{2p} такие, что при $n \to \infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_n \to 0$,

$u^{\varepsilon_n}(x,t) \to u(x,t)$ слабо в пространстве V_{2p}, $\varepsilon_n D_t^{2p} u_{xx}^{\varepsilon_n}(x,t) \to 0$ слабо в пространстве $L_2(Q)$, $u^{\varepsilon_n}(-0,t) \to u(-0,t)$, $u^{\varepsilon_n}(+0,t) \to u(+0,t)$, $u_x^{\varepsilon_n}(-0,t) \to u_x(-0,t)$, $u_x^{\varepsilon_n}(+0,t) \to u_x(+0,t)$ почти всюду на $[0,T]$. Очевидно, что предельная функция $u(x,t)$ будет решением уравнения (1.1) в прямоугольниках Q_1 и Q_2, и что для нее будут выполняться условия (1.2), (1.3), (1.6), (1.11) и (1.12). Другими словами, функция $u(x,t)$ будет требуемым решением задачи сопряжения I_3.

Теорема доказана. □

Очевидно, что совершенно аналогичным образом исследуется разрешимость задачи сопряжения I_4.

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия (E_2), (E_5), (E_7), условие*

$$a_4 \le 0, \quad b_4 \ge 0, \quad c_4 \le 0, \quad d_4 \le 0,$$

и пусть функция $f(x,t)$ такова, что выполняются включения $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$. Тогда задача сопряжения I_4 разрешима в пространстве V_{2p}.

Перейдем теперь к обсуждению условий разрешимости задач сопряжения I_1 и I_6.

Теорема 3.3. *Пусть выполняются условия (E_1), (E_5), (E_6), условие*

$$b_1 \le 0, \quad d_1 \ge 0, \quad c_1 \ge 0, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \le 0,$$

и пусть функция $f(x,t)$ такова, что выполняются включения $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$. Тогда задача сопряжения I_1 разрешима в пространстве V_{2p}.

Доказательство. Если выполняется $d_1 = 0$, то из условий теоремы следует, что либо b_1, либо c_1 равны нулю. Но тогда задача I_1 является распадающейся задачей, и ее разрешимость легко устанавливается. Пусть выполняется $d_1 \ne 0$. Условия (1.7) и (1.8) в этом случае можно преобразовать к виду

$$u(-0,t) = \frac{b_1}{d_1} u(+0,t) + \left(a_1 - \frac{b_1 c_1}{d_1} \right) u_x(-0,t),$$

$$u_x(+0,t) = \frac{1}{d_1} u(+0,t) - \frac{c_1}{d_1} u_x(-0,t),$$

т.е. к виду условий задачи I_3. Поскольку условия теоремы гарантируют выполнение условий теоремы 3.1, то преобразованная задача имеет решение, принадлежащее пространству V_{2p}. Но тогда и исходная задача I_1 имеет решение, принадлежащее тому же пространству.

Теорема доказана. □

Теорема 3.4. *Пусть выполняются условия* (E_4), (E_5), (E_6), *условие*

$$b_6 \leq 0, \quad c_6 \geq 0, \quad d_6 \geq 0, \quad a_6 d_6 - b_6 c_6 \leq 0,$$

и пусть функция $f(x,t)$ *такова, что выполняются включения* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$. *Тогда задача сопряжения* I_6 *разрешима в пространстве* V_{2p}.

Доказательство этой теоремы проводится вполне аналогично доказательству теоремы 3.3, с тем лишь отличием, что задача I_6 сводится к задаче I_4.

Замечание 3.1. Если в дополнение к условиям теоремы 3.3, или же теоремы 3.4 выполняется неравенство $a_1 d_1 - b_1 c_1 < 0$, или же соответственно неравенство $a_6 d_6 - b_6 c_6 < 0$, то задача I_1 сводится к задаче I_6, соответственно задача I_6 сводится к задаче I_1, условия теоремы 3.3 переходят в условия теоремы 3.4, и наоборот.

4. Дополнение

4.1. О задаче сопряжения с операторами разных порядков

Пусть p_1 и p_2 есть натуральные числа, L_1, L_2 и L — операторы, действие которых определяется равенствами

$$L_j u = (-1)^{p_j+1} D_t^{2p_j} u - h(x) u_{xx} + c(x,t) u,$$

$$Lu = \begin{cases} L_1 u, & \text{если } (x,t) \in Q_1, \\ L_2 u, & \text{если } (x,t) \in Q_2. \end{cases}$$

Задача сопряжения I': *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольниках* Q_1 *и* Q_2 *решением уравнения*

$$Lu = f(x,t) \tag{4.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\begin{gathered} D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x \in (-1,0), \quad k = 0, \ldots, p_1, \\ D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,1), \quad k = 0, \ldots, p_2, \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered} D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in (-1,0), \quad k = 1, \ldots, p_1 - 1, \\ D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in (0,1), \quad k = 1, \ldots, p_2 - 1 \end{gathered} \tag{4.3}$$

(*при* $p_1 = 1$ *или* $p_2 = 1$ *соответствующие условия отсутствуют*), *а также условия* (1.4), (1.5) *и* (1.6).

Пусть m_1 и m_2 есть целые неотрицательные числа. Определим пространство V_{m_1,m_2}:

$$V_{m_1,m_2} = \{v(x,t): \quad v(x,t) \in W^{2,m_1}_{2,x,t}(Q_1), \quad v(x,t) \in W^{2,m_2}_2(Q_2)\}.$$

Теорема 4.1. *Пусть выполняется одна из групп условий* (E_1), (E_5), (E_6), (E_7), (E_8), *либо* (E_2), (E_5), (E_6), (E_9), *либо* (E_3), (E_6), (E_7), (E_{10}), *либо* (E_4), (E_6), (E_7), (E_{11}), (E_{12}). *Тогда задача сопряжения* I' *не может иметь в пространстве* $V_{2p_1,2p_2}$ *более одного решения.*

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q_1} \frac{\lambda_0 - t}{h(x)} L_1 u \cdot u_t \, dx\, dt + \int\limits_{Q_2} \frac{\lambda_0 - t}{h(x)} L_2 u \cdot u_t \, dx\, dt = 0.$$

Интегрируя в этом равенстве по частям, используя граничные условия, а также соответствующие условия (E_1), (E_5), (E_6), (E_7), (E_8) и т.п., получим $u(x,t) \equiv 0$ в Q.

Теорема доказана. □

4.2. О задаче сопряжения для уравнений составного типа

Фактически по ходу доказательства теорем 3.1–3.4 получены теоремы существования и единственности регулярных решений для уравнений составного типа, которые условно можно назвать "квазигиперболическими" — именно, для уравнений вида (3.1) при фиксированном ε и для некоторых их обобщений. Как и для задачи I', сформулируем и докажем лишь теорему единственности, теорему же существования обсудим в отдельной работе.

Пусть $g(x)$ есть определенная на отрезке $[-1,1]$ строго положительная функция, непрерывная на отрезках $[-1,0]$ и $[0,1]$, имеющая, быть может, разрыв первого рода в точке 0. Далее, обозначим через $\widetilde{L}$ оператор, действие которого определяется равенством

$$\widetilde{L}u = (-1)^{p+1} D_t^{2p}(u - g(x)u_{xx}) - h(x)u_{xx} + c(x,t)u,$$

через $\widetilde{h}(x)$, h_0 и h_1 обозначим соответственно функции и числа:

$$\widetilde{h}(x) = \frac{h(x)}{g(x)}, \quad h_0 = \min_{-1\le x\le 1} \widetilde{h}(x), \quad h_{11} = \max_{-1\le x\le 0} |\widetilde{h}'(x)|,$$

$$h_{12} = \max_{0\le x\le 1} |\widetilde{h}'(x)|, \quad h_1 = \max(h_{11}, h_{12}).$$

Для функций $v(x,t)$, принадлежащих пространству V_{2p} и таких, что для них выполняются условия (1.2) и (1.3), справедливы неравенства

$$\int\limits_{Q_1} v_t^2\,dx\,dt \le \delta_0 \int\limits_{Q_1} (D_t^p v)^2\,dx\,dt + M_0 \int\limits_{Q_1} v^2\,dx\,dt, \tag{4.4}$$

$$\int\limits_{Q_2} v_t^2\,dx\,dt \le \delta_0 \int\limits_{Q_2} (D_t^p v)^2\,dx\,dt + M_0 \int\limits_{Q_2} v^2\,dx\,dt, \tag{4.5}$$

в которых δ_0 есть произвольное положительное число, число же M_0 определяется числами T и δ_0 [34] (см. также [3]).

Теорема 4.2. *Пусть функция $\widetilde{h}(x)$ имеет ограниченную производную на отрезках $[-1,0]$ и $[0,1]$, выполняются условия*

$$c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,t) \ge c_0 > 0, \quad c_t(x,t) \le 0 \quad \text{при } (x,t) \in \overline{Q}, \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered} \exists\,\delta_0 > 0,\ \delta_1 > 0:\ h_0 - h_1\delta_1^2 > 0, \\ 2p - 1 - \frac{h_1 T^2 \delta_0}{\delta_1^2} > 0, \quad c_0 - \frac{h_1 T^2 M_0}{\delta_1^2} > 0, \end{gathered} \tag{4.7}$$

и выполняется также одна из групп условий (E_1), (E_5), (E_7), (E_8), либо (E_2), (E_5), (E_9), либо (E_3), (E_5), (E_{10}), либо (E_4), (E_5), (E_{11}), (E_{12}). Тогда задача сопряжения (1.2)–(1.6) для уравнения

$$\widetilde{L}u = 0$$

не может иметь в пространстве $\widetilde{V}_{2p}$ более одного решения.

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q_1} \widetilde{L}u \cdot \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} u_t\,dx\,dt + \gamma \int\limits_{Q_2} \widetilde{L}u \cdot \frac{\lambda_0 - t}{g(x)} u_t\,dx\,dt = 0,$$

в котором число γ определяется так же, как ранее — см. доказательство теоремы 2.1. Интегрируя по частям, используя условия (E_1), (E_5), (E_7), (E_8), либо (E_2), (E_5), (E_9), либо (E_3), (E_5), (E_{10}), либо (E_4), (E_5), (E_{11}), (E_{12}), условие (4.6) и, наконец, при оценке интегралов

$$\int\limits_{Q_1} \widetilde{h}'(x) u_x u_t (\lambda_0 - t)\,dx\,dt, \quad \int\limits_{Q_2} \widetilde{h}'(x) u_x u_t (\lambda_0 - t)\,dx\,dt$$

применяя неравенство Юнга, неравенства (4.4), (4.5) и используя условие (4.7), получим оценку

$$\int\limits_{Q_1} [(D_t^p u)^2 + u_x^2 + u^2]\, dx\, dt + \int\limits_{Q_2} [(D_t^p u)^2 + u_x^2 + u^2]\, dx\, dt \leq 0.$$

Из этой оценки и следует $u(x,t) \equiv 0$ в Q.

Теорема доказана. □

Существование решений задачи сопряжения для соответствующего уравнения с оператором $\widetilde{L}$ нетрудно доказать, следуя схеме доказательства теорем 3.1–3.4.

4.3. Примеры неединственности

Приведем несколько примеров, показывающих, что при невыполнении для чисел a_i, b_i, c_i и d_i, $i = \overline{1,4}$, условий теоремы 2.1 может не быть единственности.

Пусть в уравнении (1.1) выполняется $p = 2$, $h(x) \equiv 1$, $c(x,t) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$.

Рассмотрим задачу I_1 в случае $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, $d_1 < 0$. Очевидно, что для решения $u(x,t)$ этой задачи выполняется

$$u(x,t) \equiv 0 \quad \text{при } (x,t) \in Q_1.$$

Далее, функция $u(x,t)$ в области Q_2 есть решение уравнения

$$D_t^4 u + u_{xx} = 0, \tag{4.8}$$

и при этом для нее должны выполняться условия

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,1), \quad k = 0,1,2,$$

$$D_t u(x,t)\big|_{t=T} = 0, \quad x \in (0,1),$$

$$u(+0,t) - d_1 u_x(+0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Будем искать функцию $u(x,t)$ при $(x,t) \in Q_2$ в виде

$$u(x,t) = \varphi(t) w(x),$$

со следующей функцией $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = C \left[e^{\frac{\pi n t}{T}} \cos \frac{\pi n t}{T} - e^{\frac{\pi n t}{T}} \sin \frac{\pi n t}{T} - e^{-\frac{\pi n t}{T}} \cos \frac{\pi n t}{T} - e^{-\frac{\pi n t}{T}} \sin \frac{\pi n t}{T} \right], \tag{4.9}$$

$C = const$, n — натуральное число. Тогда функция $w(x)$ должна представлять собой решение задачи

$$w'' - \mu^4 w = 0, \quad \mu = \frac{\sqrt{2}\pi n}{T}, \quad x \in (0,1),$$

$$w(0) - d_1 w'(0) = 0, \quad w(1) = 0.$$

Функция $w(x)$ имеет вид

$$w(x) = A_1 e^{\mu^2 x} + A_2 e^{-\mu^2 x};$$

для чисел A_1 и A_2 должны выполняться равенства

$$\begin{gathered} A_1 e^{\mu^2} + A_2 e^{-\mu^2} = 0, \\ A_1(1 - \mu^2 d_1) + A_2(1 + \mu^2 d_1) = 0. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Положим

$$d_1^* = \frac{e^{-\mu^2} - e^{\mu^2}}{\mu^2(e^{\mu^2} + e^{-\mu^2})}.$$

Очевидно, что выполняется $d_1^* < 0$, и что существуют числа A_1 и A_2, не равные нулю одновременно, являющиеся решением системы (4.10). Но тогда функция

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in Q_1, \\ \varphi(t) w(x), & (x,t) \in Q_2, \end{cases}$$

будет представлять собой искомое нетривиальное решение однородной задачи I_1 в случае $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, $d_1 = d_1^*$.

Аналогичный пример можно построить и для случая $b_1 = c_1 = d_1 = 0$, $a_1 > 0$.

Рассмотрим теперь задачу I_3 для уравнения (4.8). Пусть выполняется $a_3 = c_3 = d_3 = 0$, $b_3 > 0$. Тогда для решения $u(x,t)$ задачи I_3 в случае $p = 2$, $h(x) \equiv 1$, $f(x,t) \equiv 0$ выполняется

$$u(x,t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x \in Q_2,$$

$$D_t^4 u + u_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x \in Q_1,$$

$$D_t^k u(x,t)\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in (-1,0), \quad k = 0,1,2,$$

$$D_t u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad x \in (-1,0),$$

$$u(-0,t) - b_3 u_x(-0,t) = 0, \quad u(-1,t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Функцию $u(x,t)$ при $(x,t) \in Q_1$ определим равенством

$$u(x,t) = \varphi(t) w(x),$$

в котором $\varphi(t)$ есть определенная формулой (4.9) функция, функция же $w(x)$ есть решение задачи

$$w'' - \mu^4 w = 0, \quad \mu = \frac{\sqrt{2}\pi n}{T}, \quad x \in (-1, 0),$$

$$w(-1) = 0, \quad w(0) - b_3 w'(0) = 0.$$

Положим

$$b_3^* = \frac{e^{\mu^2} - e^{-\mu^2}}{\mu^2(e^{-\mu^2} + e^{\mu^2})}.$$

Функция $w(x)$ тогда имеет вид

$$w(x) = A_1 e^{\mu^2 x} + A_2 e^{-\mu^2 x}$$

с числами A_1 и A_2, являющимися решением системы

$$A_1 e^{-\mu^2} + A_2 e^{\mu^2} = 0,$$

$$A_1(1 - \mu^2 b_3^*) + A_2(1 + \mu^2 b_3^*) = 0.$$

Поскольку существуют числа A_1 и A_2, не являющиеся одновременно нулевыми и дающие решение этой системы, то определена и ненулевая в Q_1 функция $u(x,t)$. Тем самым определено и нетривиальное решение однородной задачи I_3, дающее искомый пример.

Аналогичные примеры нетрудно построить для задач I_4 и I_6.

Сделаем еще несколько замечаний.

1. Очевидно, что если в задачах I_2 и I_5 выполняется $a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0$ или $a_5 = b_5 = c_5 = d_5 = 0$, то получим переопределенную задачу в прямоугольнике Q_1 и недоопределенную в прямоугольнике Q_2, или наоборот (заметим, что для остальных задач ситуация $a_j = b_j = c_j = d_j = 0$ допускается). В то же время очевидно, что если одно из чисел a_2, b_2, c_2, d_2, или же a_5, b_5, c_5, d_5 отлично от нуля, то соответствующая задача сводится к одной из рассмотренных задач I_1, I_3, I_4 или же I_6, и тем самым условия разрешимости задач I_2 и I_5 нетрудно указать, используя полученные выше результаты.

2. Условия (1.6) в задачах сопряжения I, I' или же в соответствующей задаче с оператором $\widetilde{L}$ можно заменить условиями второй или третьей краевых задач, или же смешанными условиями.

3. Наличие в уравнении (1.1) слагаемых с младшими производными не меняет принципиально ситуацию и вносит лишь технические трудности.

Литература

[1] В. Н. Врагов, *К теории краевых задач для уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения, **13** (1977), No. 6, 1098–1105.

[2] В. Н. Врагов, *О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа*, Матем. анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978, с. 5–13.

[3] И. Е. Егоров, В. Е. Федоров, *Неклассические уравнения математической физики высокого порядка*, Новосибирск: Сиб. отд-ние АН СССР. Вычислительный Центр СО АН СССР, 1995.

[4] В. А. Ильин, П. В. Луференко, *Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы* // Докл. РАН, **428** (2009), No. 1, 12–15.

[5] В. А. Ильин, П. В. Луференко, *Обобщенные решения смешанных задач для разрывного волнового уравнения при условии равенства импендансов* // Докл. РАН, **429** (2009), No. 3. 317–321.

[6] О. А. Андропова, *Спектральные задачи сопряжения с поверхностной диссипацией энергии* // Труды ИПММ НАН Украины, **19** (2009), 10–22.

[7] В. А. Ильин, *Оптимизация производимого смещением граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков* // Дифференц. уравнения, **47** (2011), No. 7, 978–986.

[8] А. М. Рогожников, *Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков* // Докл. РАН, **441** (2012), No. 4. 449–451.

[9] А. А. Кулешов, *Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости* // Докл. РАН, **442** (2012), No. 4, 451–454.

[10] А. М. Рогожников, *Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами* // Докл. РАН, **444** (2012), No. 5, 488–491.

[11] И. Н. Смирнов, *О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости* // Дифференц. уравн., **49** (2013), No. 5, 643–648.

[12] О. А. Ладыженская, *О решении общей задачи дифракции* // Докл. АН СССР, **93** (1954), 433–436.

[13] О. А. Олейник, *Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с разрывными коэффициентами* // Известия АН СССР. Серия математическая, **25** (1961), 3–20.

[14] В. А. Ильин, *О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами* // Докл. АН СССР, **137** (1961), No. 1, 28–30.

[15] В. А. Ильин, *Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами* // Докл. АН СССР, **142** (1962), No. 1, 21–24.

[16] С. А. Терсенов, *Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени*, Новосибирск: Сиб. отд-ние АН СССР. Ин-т математики, 1982.

[17] И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов, *Неклассические дифференциально-операторные уравнения* // Новосибирск: Наука, 2000.

[18] М. М. Смирнов, *Уравнения смешанного типа*, М.: Наука, 1970.

[19] Т. Д. Джураев, *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов* // Ташкент: Фан, 1986.

[20] Е. И. Моисеев, *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром*, М.: МГУ, 1988.

[21] А. П. Солдатов, *Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. I. Теоремы единственности* // Докл. РАН, **332** (1993), No. 6, 696–698; *II. Теоремы существования* // Докл. РАН, **333** (1993), No. 1, 16–18.

[22] М. М. Хачев, *Первая краевая задача для линейного уравнения смешанного типа*, Нальчик: Эльбрус, 1998.

[23] К. Б. Сабитов, *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области* // Докл. РАН, **413** (2007), No. 1, 23–26.

[24] О. И. Маричев, А. А. Килбас, О. А. Репин, *Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами*, Самара: Самарский государственный экономический университет, 2008.

[25] О. А. Ладыженская, Л. Ступялис, *Об уравнениях смешанного типа* // Вестник ЛГУ, (1967), No. 19, 38–46.

[26] О. А. Ладыженская, Л. Ступялис, *Краевые задачи для уравнений смешанного типа* // Труды МИАН СССР, **116** (1971), No. 16, 101–136.

[27] Л. Ступялис, *Краевые задачи для эллиптико-гиперболических уравнений* // Труды МИАН СССР, **125** (1973), 211–229.

[28] Е. И. Моисеев, Т. Н. Лихоманенко, *Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева–Бицадзе* // Докл. РАН, **446** (2012), No. 3, 256–258.

[29] К. Б. Сабитов, *Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области* // Дифференц. уравнения, **49** (2013), No. 2, 488–496.

[30] А. И. Кожанов, *Задача сопряжения для одного класса уравнений составного типа переменного направления*, Неклассические уравнения математической физики. Сб. научн. трудов. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002, с. 96–109.

[31] В. В. Шубин, *Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом* // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, **12** (2012), вып. 1, 126–138.

[32] S. V. Potapova, *Boundary Value Problems for Pseudohyperbolic Equations with a Variable Time Direction* // TWMS. Journal of Pure and Applied Mathematics, **3** (2012), No. 1, 73–91.

[33] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, М.: Наука, 1980.

[34] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, М.: Наука, 1973.

Сведения об авторах

Александр Иванович Кожанов
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. ак. Коптюга, 4,
Новосибирский государственный
университет
ул. Пирогова, 2
630090, Новосибирск,
Россия
E-Mail: kozhanov@math.nsc.ru

Евгений Федорович Шарин
Институт математики и информатики
Северо-Восточный федеральный
университет им. М. К. Аммосова
ул. Белинского, 58
677000, Якутск
Россия
E-Mail: eugene_sharin@mail.ru