Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 2, 250 – 273

Эффект затухания решений параболических уравнений высокого порядка с двойной нелинейностью и вырождающимся абсорбционным потенциалом

Екатерина В. Степанова

(*Представлена А. Е. Шишковим*)

Аннотация. В работе изучается свойство затухания решений задачи Коши–Дирихле для нелинейных параболических уравнений порядка $2m$ с абсорбционным потенциалом в полуограниченном цилиндре $(0,+\infty)\times\Omega$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N\geqslant 1$. В зависимости от N, m, q (где q — параметр однородной нелинейности в главной части уравнения) получены достаточные условия, гарантирующие затухание решения рассматриваемой задачи за конечное время.

2010 MSC. 35K25, 35K55, 35B40, 35P15.

Ключевые слова и фразы. Нелинейные параболические уравнения высокого порядка, абсорбционный потенциал, затухание (исчезновение) решений за конечное время, полуклассический анализ.

1. Введение: постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N\geqslant 1$, с границей $\partial\Omega$. В полуограниченном цилиндре $Q=(0,+\infty)\times\Omega$ рассматривается следующая задача Коши–Дирихле:

$$\big(|u|^{q-1}u\big)_t+(-1)^m\sum_{|\eta|=m}D_x^\eta\big(|D_x^m u|^{q-1}D_x^\eta u\big)+a(x)|u|^{\lambda-1}u=0, \quad (1.1)$$

$$D_x^\eta u\big|_{(0,+\infty)\times\partial\Omega}=0 \qquad \forall\,\eta:|\eta|\le m-1, \quad (1.2)$$

$$u(0,x)=u_0(x), \qquad x\in\Omega. \quad (1.3)$$

Здесь $m\ge 1$, $0\le\lambda<q$, $a(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, $u_0(x)\in L_{q+1}(\Omega)$.

Статья поступила в редакцию 10.03.2014

Определение 1.1. *Следуя* [1], *энергетическим* (*слабым*) *решением задачи* (1.1)–(1.3) *называется функция*

$$u(t,x) \in L_{q+1,\,loc}\big([0,+\infty); \overset{\circ}{W}{}^{m}_{q+1}(\Omega)\big)$$

такая, что:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(|u|^{q-1}u\big) \in L_{\frac{q+1}{q},\,loc}\big([0,+\infty); \big(\overset{\circ}{W}{}^{m}_{q+1}(\Omega)\big)^{*}\big),$$

выполняется начальное условие $u(0,x) = u_0(x)$ *и справедливо интегральное равенство*

$$\int\limits_0^T \langle(|u|^{q-1}u)_t, \varphi\rangle\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Bigg(\sum_{|\eta|=m} |D_x^m u|^{q-1} D_x^\eta u D_x^\eta \varphi + a(x)|u|^{\lambda-1}u\varphi\Bigg) dx\, dt = 0$$

для произвольной функции $\varphi(t,x) \in L_{q+1,\,loc}([0,+\infty); \overset{\circ}{W}{}^{m}_{q+1}(\Omega))$ *и произвольного* $T < +\infty$.

В интегральном равенстве определения 1.1, как это принято, через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначена билинейная операция спаривания элементов пространств V и его сопряженного V^*. Через $\overset{\circ}{W}{}^{m}_{q+1}(\Omega)$ обозначаем замыкание в норме соболевского пространства $W^m_{q+1}(\Omega)$ множества функций из $C^m_0(\Omega)$.

Определение 1.2. *Если для произвольного решения* $u(t,x)$ *рассматриваемой задачи существует* $T > 0$ *такое, что* $u(t,x) = 0$ *почти всюду в* Ω *для любого* $t \geq T$, *то говорят, что решение задачи затухает за конечное время.*

Отметим здесь, что существование энергетического (слабого) решения задачи (1.1)–(1.3) следует из результатов работы [2].

Вопросы детальной характеризации эффекта затухания решения (оценки времени затухания, асимптотическое поведение вблизи времени затухания и т.п.) для различных классов полулинейных параболических уравнений типа диффузии–абсорбции изучались во многих работах (см., например, [3–8] и имеющиеся там ссылки). Так, для уравнения нелинейной диффузии с абсорбцией в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{(t,x) :\ 0 < t < +\infty,\ x \in \mathbb{R}^1\}$

$$u_t - \triangle\varphi(u) + \psi(u) = 0, \tag{1.4}$$

где функции $\varphi(u) \geq 0$, $\psi(u) \geq 0$ определены и непрерывны для $u \geq 0$, с начальными данными

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \;\; u_0 \in C(\mathbb{R}^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$$

А. С. Калашниковым в работе [9] была доказана достаточность условия $P := \int_0^1 \frac{ds}{\psi(s)} < \infty$ для полного остывания (затухания решения) за конечное время. При некоторых дополнительных ограничениях на функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ условие $P < \infty$ является не только достаточным, но и необходимым для затухания (см. [10]). Е. С. Сабининой [11] была изучена первая краевая задача в ограниченной области с нулевыми граничными данными на латеральных границах для уравнения (1.4) в случае $\psi(u) \equiv 0$ для $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(u) > 0$ при $u \neq 0$, $\varphi'(\pm 0) = +\infty$. Именно для уравнения быстрой диффузии в работе [11] была доказана необходимость и достаточность условия $\int_0^1 \frac{ds}{\varphi(s)} < \infty$ для явления исчезновения решения за конечное время. Этот результат был распространен в статье [12] на более общие одномерные уравнения, а в [13] — на многомерные уравнения с многозначными функциями. В работе [14] было установлено, что в случае $\varphi(u) = u^\mu$ с $\mu > 1$ для всякого x найдется t_1 такое, что $u(t,x) > 0$ при $t > t_1$, если только $u_0 \not\equiv 0$. Другими словами, хотя тепло и распространяется с конечной скоростью, оно проникает как угодно далеко. А. С. Калашниковым [15] было доказано, что свойство затухания для (1.4), как и свойство мгновенной компактификации носителя решения за конечное время, не имеет места, если мощность поглощения достаточно быстро ослабевает при $|x| \to \infty$.

Для параболического уравнения высокого порядка с сильной абсорбцией Ф. Бернисом [16] был доказан эффект компактификации носителя решения за конечное время (или коротко КНРВ).

Зависимость свойства мгновенной КНРВ для параболического уравнения высокого порядка от локальной структуры начальной функции была изучена в работах [17, 18].

Явление исчезновения решения для полулинейных параболических уравнений типа диффузии–абсорбции с невырождающимся потенциалом изучалось также в [19–22].

В. А. Кондратьев и Л. Верон [23] первыми начали изучение условий затухания за конечное время решения задачи Неймана для полулинейного параболического уравнения с вырождающимся абсорбционным потенциалом. Так, в работе [23] было найдено достаточное условие, гарантирующее наличие КНРВ–свойства для уравнения:

$$u_t - \Delta u + a_0(x)|u|^{\lambda-1}u = 0 \quad \text{в } (0,+\infty) \times \Omega, \tag{1.5}$$

где $a_0(x) \geq 0$: $\inf_{x\in\Omega} a_0(x) = 0$, $0 < \lambda < 1$, Ω — ограниченная область. Это условие имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{-1} \ln \mu_n < \infty,$$

где

$$\mu_n = \inf \left\{ \int\limits_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 + 2^n a_0(x)\psi^2)\, dx : \psi \in W^{1,2}(\Omega),\ \int\limits_{\Omega} \psi^2 dx = 1 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

На его основе в работе [24] найдено точное явное достаточное условие затухания решения задачи Коши–Неймана для уравнения (1.5):

$$\ln a_0(x)^{-1} \in L_p(\Omega) \quad p > \frac{N}{2},\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^N,\ N \geq 1. \tag{1.6}$$

Как показано в [24], если $a_0(x) \geq a_\alpha(|x|) := \exp(-\frac{1}{|x|^\alpha})$ $\forall\, x \in \Omega$, то условие (1.6) выполняется при произвольном $\alpha < 2$. В случае, когда $\alpha > 2$ эффект зануления решения не имеет места. Отметим здесь, что в основе методов [24] лежит полуклассический анализ [25], который использует точные оценки спектра оператора Шрёдингера [26–28], а они подразумевают наличие у рассматриваемого решения определенной регулярности, в частности, используются точные оценки сверху $\|u(t,\cdot)\|_{L_\infty(\Omega)}$. В работе [29] была предложена техника локально-энергетических оценок, не использующая "дополнительных" свойств регулярности решений.

Так, в [29] с помощью двух различных методов: полуклассического (для произвольного вырождающегося потенциала) и локально-энергетического (для радиального потенциала), была изучена начально-краевая задача для уравнения (1.5). В [29] установлено достаточное условие типа Дини для затухания решения.

В работе [30] было рассмотрено уравнение (1.1) при $m = 1$, $a(x) \geq \exp(-\frac{\omega(|x|)}{|x|^{q+1}})$, где $\omega(\cdot) \in C([0,+\infty))$, $\omega(0) = 0$, $\omega(\tau) > 0$ при $\tau > 0$. Методом локальных энергетических оценок в [30] получено условие типа Дини на функцию $\omega(\cdot)$: $\int_0^c \frac{\omega(s)}{s}\, ds < \infty$, гарантирующее затухание произвольного решения за конечное время.

В статье [31] был предложен новый вариант полуклассического анализа. В цитируемой работе рассматривается семейство первых собственных значений нелинейного оператора Шрёдингера, связанных с уравнением (1.1) при $q = 1$. Для получения оценок собственных значений в [31] используется аппарат соболевских вложений.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $N \geq 1,\ m \geq 1,\ 0 \leq \lambda < q$.

(*i*) *Если* $N < m(q+1)$ *и выполняется*

$$\int\limits_0^c \frac{\operatorname{meas}\{x \in \Omega : a(x) \leq s\}}{s}\, ds < +\infty \quad \forall\, c > 0,$$

тогда произвольное энергетическое решение $u(t,x)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *затухает за конечное время.*

(*ii*) *Если* $N > m(q+1)$ *и выполняется*

$$\int\limits_0^c \frac{\left(\operatorname{meas}\{x \in \Omega : a(x) \leq s\}\right)^{\frac{m(q+1)}{N}}}{s}\, ds < +\infty \quad \forall\, c > 0,$$

тогда произвольное энергетическое решение $u(t,x)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *затухает за конечное время.*

(*iii*) *Если* $N = m(q+1)$ *и выполняется*

$$\int\limits_0^c \frac{\operatorname{meas}\{x \in \Omega : a(x) \leq s\}}{s}$$
$$\times \left(-\ln \operatorname{meas}\{x \in \Omega : a(x) \leq s\}\right) ds < +\infty \quad \forall\, c > 0,$$

тогда произвольное энергетическое решение $u(t,x)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *затухает за конечное время.*

2. Вспомогательные построения и утверждения для случая $N \neq m(q+1)$

Лемма 2.1. *Пусть* $u(t,x)$ — *произвольное энергетическое решение задачи* (1.1)–(1.3). *Тогда для всех* $0 \leq a < b < +\infty$ *имеет место следующее соотношение:*

$$\int\limits_\Omega \left(|u(b,x)|^{q+1} - |u(a,x)|^{q+1}\right) dx$$

$$+ \frac{q+1}{q} \int\limits_a^b \int\limits_\Omega \left((-1)^m \sum_{|\eta|=m} |D_x^\eta u| + a(x)|u(t,x)|^{\lambda+1}\right) dx\, dt = 0. \quad (2.1)$$

Доказательство. Полагая в интегральном тождестве из определения 1.1 в качестве пробной функции $u(t,x)$ и используя формулу интегрирования по частям из [1], приходим к (2.1). $\square$

Введем спектральную характеристику

$$\lambda_1(h) := \inf\Bigg\{ \int\limits_\Omega \left(|D_x^m v|^{q+1} + a(x)|v|^{\lambda+1} \right) dx,$$

$$v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{q+1}(\Omega), \quad \|v\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} = h \Bigg\}. \quad (2.2)$$

Лемма 2.2. *Если*

$$\int\limits_0^c \frac{dh}{\lambda_1(h)} < +\infty, \quad (2.3)$$

то произвольное решение задачи (1.1)–(1.3) *затухает за конечное время*

$$T \le \frac{q}{q+1} \int\limits_0^{\tilde c} \frac{dh}{\lambda_1(h)}, \quad \text{где} \;\; \tilde c = \|u_0\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}. \quad (2.4)$$

Доказательство. Запишем (2.1) с $a = 0$, $b = t < +\infty$:

$$\frac{q}{q+1} \int\limits_\Omega \left(|u(t,x)|^{q+1} - |u(0,x)|^{q+1} \right) dx$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left(|D_x^m v|^{q+1} + a(x)|v|^{\lambda+1} \right) dx\, dt = 0.$$

Первый член в этом равенстве абсолютно непрерывен по t и имеет производную почти всюду, второе слагаемое тоже абсолютно непрерывно по t. Поэтому после дифференцирования по t и в силу (2.2) из последнего соотношения имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\right) + \frac{q+1}{q}\, \lambda_1\left(\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\right) \le 0, \quad (2.5)$$

решая обыкновенное дифференциальное неравенство (2.5), приходим к (2.3). $\square$

Обозначим

$$\widetilde{\lambda}_1(h) := \inf\left\{ \int\limits_{\Omega} \left(|D_x^m v|^{q+1} + \widetilde{a}(x)|v|^{\lambda+1}\right) dx, \right.$$

$$\left. v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{q+1}(\Omega),\ \|v\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} = h \right\}, \quad (2.6)$$

где

$$\widetilde{a}(x) = a(x)\exp\Big(-\frac{1}{|x|^{\alpha}}\Big), \quad \alpha > 0. \quad (2.7)$$

В силу того, что $0 \le \widetilde{a}(x) \le a(x)$, $\widetilde{\lambda}_1(h) \le \lambda_1(h)$ для всех $h > 0$. Следовательно,

$$\int\limits_0^c \frac{dh}{\lambda_1(h)} \le \int\limits_0^c \frac{dh}{\widetilde{\lambda}_1(h)}. \quad (2.8)$$

Значит, если покажем сходимость интеграла в правой части (2.8), то благодаря лемме 2.2 эффект затухания произвольного решения рассматриваемой задачи (1.1)–(1.3) будет доказан.

Для произвольного $v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{q+1}(\Omega)$ введем в рассмотрение функционал

$$\widetilde{F}(v) = \int\limits_{\Omega} \left(|D_x^m v|^{q+1} + \widetilde{a}(x)|v|^{\lambda+1}\right) dx, \quad (2.9)$$

тогда, очевидно, что для любого $h > 0$ существует функция $\widetilde{v} = \widetilde{v}_h \in \overset{\circ}{W}{}^m_{q+1}(\Omega)$ такая, что

$$\|\widetilde{v}\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} = h, \quad (2.10)$$

и справедливы неравенства

$$0 < \widetilde{\lambda}_1(h) \le \widetilde{F}(\widetilde{v}) \le 2\,\widetilde{\lambda}_1(h). \quad (2.11)$$

Лемма 2.3. *Существует $C_1 = \mathrm{const} > 0$ такая, что для достаточно малых h имеют место неравенства*

$$C_1 \le \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}\Big(\operatorname{meas}\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\Big\}\Big)^{\frac{m(q+1)}{N}}, \ \textit{если}\ N > m(q+1) \quad (2.12)$$

и

$$C_1 \le \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}\operatorname{meas}\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\Big\}, \quad \textit{если}\ N < m(q+1), \quad (2.13)$$

где $\widetilde{\lambda}_1(h)$ из (2.6), $\widetilde{a}(x)$ из (2.7), функция $\widetilde{v}$ из (2.10).

Доказательство. Обозначим

$$H(v,x)=\frac{\widetilde{F}(v)}{\|v\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}}-\frac{\widetilde{a}(x)}{|v|^{q-\lambda}},$$

тогда

$$\int\limits_{\Omega}|D^m_x v|^{q+1}=\int\limits_{\{x:|v|>0\}}|v|^{q+1}H(v,x)\,dx.$$

Пусть $H^+(v,x):=max(0,H(v,x))$, тогда в силу последнего соотношения справедливо неравенство

$$\|D^m_x v\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\le\int\limits_{\{x:|v|>0\}}|v|^{q+1}H^+(v,x)\,dx. \tag{2.14}$$

Поскольку $v\in\overset{\circ}{W}{}^m_{q+1}(\Omega)$, то в силу теоремы вложения:

$$\|v\|^{q+1}_{L^{q^*}(\Omega)}\le c\,\|D^m_x v\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\,, \tag{2.15}$$

где постоянная c не зависит от v, а q^* определяется следующим образом:

$$q^*=\begin{cases}\frac{N(q+1)}{N-m(q+1)}, & \text{если } N>m(q+1),\\ +\infty, & \text{если } N<m(q+1).\end{cases} \tag{2.16}$$

Продолжая неравенство (2.14) с учетом (2.15), приходим к

$$\frac{1}{c}\|v\|^{q+1}_{L^{q^*}(\Omega)}\le\int\limits_{\{x:|v|>0\}}|v|^{q+1}H^+(v,x)\,dx. \tag{2.17}$$

К правой части (2.17) применим неравенство Гёльдера

$$\frac{1}{c}\|v\|^{q+1}_{L^{q^*}(\Omega)}\le\|v\|^{q+1}_{L^{q^*}(\Omega)}\Bigg(\int\limits_{\{x:|v|>0\}}(H^+(v,x))^{\frac{q^*}{q^*-q-1}}\,dx\Bigg)^{\frac{q^*-q-1}{q^*}}, \tag{2.18}$$

откуда получаем

$$C_1\le\frac{\widetilde{F}(v)}{\|v\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}}\big(\,\mathrm{meas}\,\big\{\{x:|v|>0\}\cap\{x:H(v,x)>0\}\big\}\big)^{\frac{q^*-q-1}{q^*}}. \tag{2.19}$$

Легко проверить, что

$$\frac{q^*-q-1}{q^*}=\begin{cases}\frac{m(q+1)}{N}, & \text{если } N>m(q+1),\\ 1, & \text{если } N<m(q+1).\end{cases}$$

Кроме того, для $v = \tilde v$ справедливо равенство

$$H(\tilde v, x) = \frac{\widetilde F(\tilde v)}{\|\tilde v\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}} - \frac{\widetilde a(x)}{|\tilde v|^{q-\lambda}},$$

откуда в силу неравенства (2.11) выводим

$$H(\tilde v, x) \le \frac{2\widetilde\lambda_1(h)}{h} - \frac{\widetilde a(x)}{|\tilde v|^{q-\lambda}},$$

что завершает доказательство. □

Лемма 2.4. *Существует* $C_2 = \mathrm{const} > 0$ *такая, что для достаточно малых* $h > 0$ *справедлива оценка*

$$\widetilde\lambda_1(h) \le C_2\, h\, (-\ln h)^{\frac{m(q+1)}{\alpha}}, \tag{2.20}$$

где $\widetilde\lambda_1(h)$ *из* (2.6), α *из* (2.7).

Доказательство. Для произвольного $r > 0$ обозначим

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}.$$

Пусть $v \in C_0^\infty(B_1)$ и $\|v\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} = 1$. Для произвольного $h > 0$ положим $v_1 = v h^{\frac{1}{q+1}}$. Очевидно, что $v_1 \in \overset{\circ}{W}{}^m_{q+1}(\Omega)$ и $\|v_1\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} = h$. В силу (2.6) имеем

$$\begin{aligned}\widetilde\lambda_1(h) \le \int\limits_\Omega \Big(|D_x^m v_1|^{q+1} + \widetilde a(x)|v_1|^{\lambda+1}\Big)\,dx \\ = h\int\limits_\Omega |D_x^m v|^{q+1} dx + h^{\frac{\lambda+1}{q+1}} \int\limits_\Omega \widetilde a(x)|v(x)|^{\lambda+1}\,dx.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Понятно, что для $v_r(x) := v\left(\frac{x}{r}\right)$ справедливо

$$\int\limits_\Omega v_r^{q+1}(x)\,dx = \int\limits_{B_r} v_r^{q+1}(x)\,dx = r^N \int\limits_{B_1} v^{q+1}(y)\,dy = r^N,$$

отсюда

$$\|v_r(x)\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} = r^N \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{v_r(x)}{r^{\frac{N}{q+1}}}\right\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} = 1.$$

Значит, в неравенстве (2.21) в качестве функции v можем взять отношение $\frac{v_r(x)}{r^{\frac{N}{q+1}}}$, тогда получим:

$$\widetilde{\lambda}_1(h) \le h \int\limits_{\Omega} \left| \frac{1}{r^{\frac{N}{q+1}}} D_x^m v_r(x) \right|^{q+1} dx + h^{\frac{\lambda+1}{q+1}} \int\limits_{\Omega} \widetilde{a}(x) \left| \frac{v_r(x)}{r^{\frac{N}{q+1}}} \right|^{\lambda+1} dx$$

$$= \frac{h}{r^N} \int\limits_{B_r} \left| \frac{1}{r^m} D_x^m v_r(x) \right|^{q+1} dx + \frac{h^{\frac{\lambda+1}{q+1}}}{r^{\frac{N(\lambda+1)}{q+1}}} \int\limits_{B_r} \widetilde{a}(x) \, |v_r(x)|^{\lambda+1} \, dx$$

$$= \frac{h}{r^{m(q+1)}} \int\limits_{B_1} |D^m v(y)|^{q+1} \, dy + h^{\frac{\lambda+1}{q+1}} \, r^{\frac{N(q-\lambda)}{q+1}} \int\limits_{B_1} \widetilde{a}(ry) |v(y)|^{\lambda+1} \, dy.$$

В силу того, что $v \in C_0^\infty(B_1)$ и $\widetilde{a}(x) \le C \exp(-\frac{1}{|x|^\alpha})$, где $0 < C = \mathrm{const} < +\infty$ (см. условие (2.7)), из последнего соотношения выводим

$$\widetilde{\lambda}_1(h) \le C' \, \frac{h}{r^{m(q+1)}} + C'' \, h^{\frac{\lambda+1}{q+1}} \, r^{\frac{N(q-\lambda)}{q+1}} \exp\Big(- \frac{1}{r^\alpha} \Big),$$

где $C' = \mathrm{const} < +\infty$ и $C'' = \mathrm{const} < +\infty$. Оптимизируем последнюю оценку по параметру r, при этом для $r = r_{optimal} := \frac{\lambda+1}{(-ln\, h)^{1/\alpha}}$ имеем

$$\widetilde{\lambda}_1(h) \le C_2 \bigg(h \, (-\ln h)^{\frac{m(q+1)}{\alpha}} + h^{\frac{\lambda+1}{q+1}} \bigg(\frac{1}{(-\ln h)^{1/\alpha}} \bigg)^{\frac{N(q-\lambda)}{q+1}} h \bigg),$$

что при достаточно малом h приводит к (2.20). □

Лемма 2.5. *Существуют постоянные $C_3 > 0$, $C_4 > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для достаточно малых h справедливы неравенства*

$$C_3 \le \frac{\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} \big(\mathrm{meas} \{x : C_4 h^\gamma \ge \widetilde{a}(x)\} \big)^{\frac{m(q+1)}{N}}, \quad \text{если } N > m(q+1) \tag{2.22}$$

и

$$C_3 \le \frac{\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} \mathrm{meas} \{x : C_4 h^\gamma \ge \widetilde{a}(x)\}, \quad \text{если } N < m(q+1), \tag{2.23}$$

где $\widetilde{\lambda}_1(h)$ из (2.6), $\widetilde{a}(x)$ из (2.7).

Доказательство. Понятно, что для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\int\limits_{\Omega} |\widetilde{v}|^{q+1} \, dx \ge \int\limits_{\{x:\, |\widetilde{v}|^{q+1} \ge \varepsilon\}} |\widetilde{v}|^{q+1} \, dx \ge \varepsilon \, \mathrm{meas}\{x : |\widetilde{v}|^{q+1} \ge \varepsilon\}. \tag{2.24}$$

Из (2.24) при $\varepsilon = h^\beta$, где $0 < \beta < 1$, и в силу (2.10) имеем

$$h \ge h^\beta \ \mathrm{meas}\{x : |\widetilde{v}|^{q+1} \ge h^\beta\},$$

откуда легко приходим к неравенству

$$h^{1-\beta} \geq \operatorname{meas}\Big\{x : |\widetilde{v}|^{q-\lambda} \geq h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}}\Big\}. \tag{2.25}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered}\operatorname{meas}\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\Big\} \\ = \operatorname{meas}\Big(\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\Big\} \cap \Big\{x : |\widetilde{v}|^{q-\lambda} \geq h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}}\Big\}\Big) \\ + \operatorname{meas}\Big(\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\Big\} \cap \Big\{x : |\widetilde{v}|^{q-\lambda} < h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}}\Big\}\Big).\end{gathered} \tag{2.26}$$

Легко также заметить, что

$$\begin{gathered}\operatorname{meas}\Big(\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\Big\} \cap \Big\{x : |\widetilde{v}|^{q-\lambda} \geq h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}}\Big\}\Big) \\ \leq \operatorname{meas}\Big\{x : |\widetilde{v}|^{q-\lambda} \geq h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}}\Big\} \leq h^{1-\beta}.\end{gathered} \tag{2.27}$$

Оценим сверху теперь и второе слагаемое в правой части (2.26):

$$\begin{gathered}\operatorname{meas}\Big(\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\Big\} \cap \Big\{x : |\widetilde{v}|^{q-\lambda} < h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}}\Big\}\Big) \\ \leq \operatorname{meas}\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} > \widetilde{a}(x)\Big\}.\end{gathered} \tag{2.28}$$

Теперь вернемся к (2.26) с учетом оценок (2.27) и (2.28):

$$\begin{gathered}\operatorname{meas}\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\Big\} \\ \leq h^{1-\beta} + \operatorname{meas}\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} > \widetilde{a}(x)\Big\}.\end{gathered} \tag{2.29}$$

В силу (2.29) неравенства (2.12) и (2.13) из леммы 2.3 перепишем следующим образом:

$$C_1 \leq \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}\Big(h^{1-\beta} + \operatorname{meas}\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} > \widetilde{a}(x)\Big\}\Big)^{\frac{m(q+1)}{N}}, \quad N > m(q+1) \tag{2.30}$$

и

$$C_1 \leq \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}\Big(h^{1-\beta} + \operatorname{meas}\Big\{x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} > \widetilde{a}(x)\Big\}\Big), \quad N < m(q+1). \tag{2.31}$$

Благодаря лемме 2.4, имеем следующую информацию о первом слагаемом в (2.30) и (2.31), соответственно:

$$\frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} h^{\frac{(1-\beta)(q+1)m}{N}} \leq 2\,C_2\,(-\ln h)^{\frac{m(q+1)}{\alpha}} h^{\frac{(1-\beta)(q+1)m}{N}} \longrightarrow 0, \quad \text{при } h \longrightarrow 0,$$

$$\frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} h^{1-\beta} \leq 2\,C_2\,(-\ln h)^{\frac{m(q+1)}{\alpha}} h^{1-\beta} \longrightarrow 0, \quad \text{при } h \longrightarrow 0.$$

Следовательно, существует $C_3 = \mathrm{const} > 0$ такая, что для достаточно малых h справедливы неравенства:

$$C_3 \leq \frac{\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} \Big(\mathrm{meas} \Big\{ x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} > \widetilde{a}(x) \Big\} \Big)^{\frac{m(q+1)}{N}}, \quad N > m(q+1) \tag{2.32}$$

и

$$C_3 \leq \frac{\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}\, \mathrm{meas} \Big\{ x : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} > \widetilde{a}(x) \Big\}, \quad N < m(q+1). \tag{2.33}$$

Так как $\beta \in (0,1)$, то существуют положительные постоянные C_4 и γ такие, что для достаточно малых h выполнено

$$\frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} \leq C_4 h^{\gamma}. \tag{2.34}$$

Из (2.32), (2.33) с учетом (2.34) и монотонности меры, получаем утверждение леммы 2.5. □

3. Доказательство теоремы 1.1 для $N \neq m(q+1)$

Затухание решений в случае $N < m(q+1)$. Интегрируя неравенство (2.23) леммы 2.5 по h имеем:

$$\int\limits_0^c \frac{dh}{\widetilde{\lambda}_1(h)} \leq \int\limits_0^c \frac{\mathrm{meas}\,\{x : C_4 h^{\gamma} \geq \widetilde{a}(x)\}}{h}\, dh = I_1.$$

В результате замены переменной $s = C_4 h^{\gamma} \Rightarrow ds = \gamma\, C_4 h^{\gamma} \frac{dh}{h}$, то есть $\frac{dh}{h} = \frac{ds}{\gamma s}$, приходим к

$$I_1 = \frac{1}{\gamma} \int\limits_0^{\tilde{c}} \frac{\mathrm{meas}\,\{x : \widetilde{a}(x) \leq s\}}{s}\, ds < +\infty$$

в силу условия теоремы 1.1 и предложений 6.3, 6.4. Так как имеет место неравенство (2.8), то согласно лемме 2.2 получаем соответствующее случаю $N < m(q+1)$ утверждение теоремы. $\square$

Затухание решений случае $N > m(q+1)$. Интегрируя неравенство (2.22) леммы 2.5 по h, имеем:

$$\int\limits_0^c \frac{dh}{\widetilde{\lambda}_1(h)} \leq \int\limits_0^c \frac{(\operatorname{meas}\{x : C_4 h^\gamma \geq \widetilde{a}(x)\})^{\frac{m(q+1)}{N}}}{h}\, dh = I_2.$$

После замены $s = C_4 h^\gamma$ имеем:

$$I_2 = \frac{1}{\gamma} \int\limits_0^{\tilde{c}} \frac{(\operatorname{meas}\{x : \widetilde{a}(x) \leq s\})^{\frac{m(q+1)}{N}}}{s}\, ds.$$

Тот факт, что $I_2 < +\infty$ следует из условия теоремы 1.1 и предложений 6.3 и 6.4. Из неравенства (2.8) в силу леммы 2.2 получаем соответствующее случаю $N > m(q+1)$ утверждение теоремы. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть* $N \neq m(q+1)$, $\omega(\cdot)$ *определена и непрерывна на* $[0, +\infty)$, *является неубывающей и неотрицательной функцией, а также удовлетворяет условию* $\omega(r) \leq \omega_0 = \mathrm{const} < \infty\ \forall\, r \in [0, +\infty)$ *и выполнено условие типа Дини*

$$\int\limits_0^c \frac{\omega(\tau)}{\tau}\, d\tau < +\infty, \quad c = \mathrm{const} > 0. \tag{3.1}$$

Пусть

$$a(x) = \exp\Big(-\frac{\omega(|x|)}{|x|^{N\theta}}\Big), \quad \text{где } \theta = \min\Big\{\frac{m(q+1)}{N}; 1\Big\}, \tag{3.2}$$

тогда произвольное энергетическое решение $u(t,x)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *затухает за конечное время.*

Доказательство. Из (3.2) для произвольного $s > 0$ имеем:

$$a(x) \leq s \iff \frac{\omega(|x|)}{|x|^{N\theta}} \geq -\ln s, \tag{3.3}$$

что в силу условия следствия 3.1 на функцию $\omega(\cdot)$ дает неравенство $\frac{\omega_0}{|x|^{N\theta}} \geq -\ln s$, откуда

$$|x| \leq \left(\frac{\omega_0}{-\ln s}\right)^{\frac{1}{N\theta}}. \tag{3.4}$$

Благодаря монотонности $\omega(\cdot)$ и неравенству (3.4), выводим:

$$\omega(|x|) \le \omega\Bigg(\left(\frac{\omega_0}{-\ln s}\right)^{\frac{1}{N\theta}} \Bigg). \tag{3.5}$$

Таким образом, для произвольного $s > 0$ в силу неравенств (3.3), (3.5) и предложения 6.1 при $\alpha = N\theta$ имеем:

$$\operatorname{meas}\{x \in \Omega : a(x) \le s\} = \operatorname{meas}\left\{x \in \Omega : |x|^{N\theta} \le \frac{\omega(|x|)}{-\ln s}\right\}$$
$$\le \operatorname{meas}\left\{x \in \Omega : |x|^{N\theta} \le \frac{\omega\big((\frac{\omega_0}{-\ln s})^{\frac{1}{N\theta}}\big)}{-\ln s}\right\} = C_N \left\{\frac{\omega\big((\frac{\omega_0}{-\ln s})^{\frac{1}{N\theta}}\big)}{-\ln s}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Тогда условие сходимости интеграла в теореме 1.1 принимает вид

$$\int\limits_0^c \frac{(\operatorname{meas}\{x \in \Omega :\ a(x) \le s\})^\theta}{s}\, ds \ \le \ \int\limits_0^{1/e} C_N^\theta \, \frac{\omega\big((\frac{\omega_0}{-\ln s})^{\frac{1}{N\theta}}\big)}{s(-\ln s)}\, ds \ = \ I_3.$$

Пусть $y = \frac{\omega_0}{-\ln s} \Rightarrow dy = -\frac{\omega_0}{(-\ln s)^2}\big(-\frac{ds}{s}\big)$, т.е. $\frac{ds}{s(-\ln s)} = -\ln s \frac{dy}{\omega_0} = \frac{dy}{y}$. Следовательно,

$$I_3 = C_N^\theta \int\limits_0^{\omega_0} \frac{\omega\big(y^{\frac{1}{N\theta}}\big)}{y}\, dy.$$

Сделаем замену переменной $\tau = y^{\frac{1}{N\theta}}$, тогда понятно, что

$$N\theta\, \tau^{N\theta-1} d\tau = dy, \quad \text{т.е.} \quad N\theta\, \frac{d\tau}{\tau} = \frac{dy}{y}.$$

Значит,

$$C_N^\theta \int\limits_0^{\omega_0} \frac{\omega\big(y^{\frac{1}{N\theta}}\big)}{y}\, dy = N\theta\, C_N^\theta \int\limits_0^{\omega_0^{\frac{1}{N\theta}}} \frac{\omega(\tau)}{\tau}\, d\tau < +\infty,$$

что и требовалось доказать. □

Отметим здесь, что задача (1.1)–(1.3) в случае $m = 1$ без ограничения на размерность пространства и с условием на потенциал $a(x) \ge \exp(-\frac{\omega(|x|)}{|x|^{q+1}})$ была изучена в работе [30]. Методом локально-энергетических оценок в [30] получено достаточное условие (3.1) типа Дини, гарантирующее затухание произвольного решения за конечное время.

4. Вспомогательные построения и утверждения для случая $N = m(q+1)$

Пространством Орлича L_B (см. [32]) называется множество измеримых относительно меры Лебега функций на ограниченном замкнутом множестве $E \subset \mathbb{R}^N$, на которых конечна норма Орлича $\|u\|_B$, то есть

$$\|u\|_B = \sup\left\{ \int\limits_E u(t)y(t)\,dt : \int\limits_E \hat{B}\big(y(t)\big)\,dt \le 1 \right\} < \infty,$$

здесь $B(u), \hat{B}(u)$ — пара дополнительных N-функций (см. [33]).

Напомним здесь также *норму Люксембурга* (которая, как известно, эквивалентна норме Орлича):

$$\|u\|_{L_A(E)} = \inf\left\{ k > 0 : \int\limits_E A\Big(\frac{|u(x)|}{k}\Big)\,dx \le 1 \right\}, \tag{4.1}$$

и *обобщенное неравенство Гёльдера* (которое используется ниже):

$$\left| \int\limits_E u_1(t)u_2(t)\,dt \right| \le c\|u_1\|_{L_B(E)}\|u_2\|_{L_{\hat{B}}(E)}, \tag{4.2}$$

где c — положительная постоянная, $B(\cdot)$ и $\hat{B}(\cdot)$ — пара дополнительных N-функций.

Лемма 4.1. *Пусть $N = m(q+1)$. Существует $C_5 = \mathrm{const} > 0$ такая, что для достаточно малых h справедливо неравенство*

$$C_5 \le \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}\left(\hat{B}^{-1}\left(\mathrm{meas}\left\{x \in \Omega : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\right\}\right)^{-1}\right)^{-1}, \tag{4.3}$$

где $\widetilde{\lambda}_1(h)$ из (2.6), $\widetilde{a}(x)$ из (2.7), $\widetilde{v}$ из (2.10), $\hat{B}(s) = (1+s)\ln(1+s) - s$ является дополнительной функцией к $B(s) = e^s - s - 1$ в смысле пространства Орлича.

Доказательство. Для доказательства леммы 4.1 будем использовать функционал $\widetilde{F}(\cdot)$, введенный в (2.9), а также формулы (2.10), (2.11) и (2.14).

Согласно результатам работы [34] имеет место вложение:

$$\|\widetilde{v}\|^{q+1}_{L_A(\Omega)} \le c(N, |\Omega|)\ \|D^m_x \widetilde{v}\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\,, \tag{4.4}$$

где $A(t) = e^t - 1$. Из (4.4) в силу (2.14) для $v = \widetilde{v}$ выводим:

$$\frac{1}{c}\|\widetilde{v}\|^{q+1}_{L_A(\Omega)} \leq \int\limits_{\{x:|\widetilde{v}|>0\}} |\widetilde{v}|^{q+1} H^+(\widetilde{v}, x)\, dx. \tag{4.5}$$

Из (4.5) с помощью обобщенного неравенства Гёльдера (4.2) имеем:

$$\frac{1}{c}\|\widetilde{v}\|^{q+1}_{L_A(\Omega)} \leq \|\widetilde{v}^{q+1}\|_{L_B(\{x:|\widetilde{v}|>0\})}\|H^+(\widetilde{v}, x)\|_{L_{\hat{B}}(\{x:|\widetilde{v}|>0\})}, \tag{4.6}$$

где $B(\cdot)$ и $\hat{B}(\cdot)$ — пара дополнительных N-функций из леммы 4.1. В силу предложения 6.6 левая часть соотношения (4.6) примет вид $\|\widetilde{v}\|^{q+1}_{L_A(\Omega)} = \|\widetilde{v}^{q+1}\|_{L_M(\Omega)}$. Оценку (4.6) согласно предложению 6.8 продолжаем вправо, в результате чего, приходим к неравенству:

$$C_5\|\widetilde{v}^{q+1}\|_{L_M(\Omega)} \leq \|\widetilde{v}^{q+1}\|_{L_B(\Omega)}\|H^+(\widetilde{v}, x)\|_{L_{\hat{B}}(\{x:|\widetilde{v}|>0\})}. \tag{4.7}$$

Понятно, что $B(t) = e^t - t - 1 \leq e^t - 1 \leq M(t)$. С учетом этого неравенства и в силу предложения 6.7 из соотношения (4.7) имеем

$$C_5\|\widetilde{v}^{q+1}\|_{L_B(\Omega)} \leq \|\widetilde{v}^{q+1}\|_{L_B(\Omega)}\|H^+(\widetilde{v}, x)\|_{L_{\hat{B}}(\{x:|\widetilde{v}|>0\})},$$

т.е.

$$C_5 \leq \|H^+(\widetilde{v}, x)\|_{L_{\hat{B}}(\{x:|\widetilde{v}|>0\})}. \tag{4.8}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\|H^+(\widetilde{v}, x)\|_{L_{\hat{B}}(\{x:|\widetilde{v}|>0\})} &= \|\max(0, H(\widetilde{v}, x))\|_{L_{\hat{B}}(\{x:|\widetilde{v}|>0\})} \\ &= \|H(\widetilde{v}, x)\|_{L_{\hat{B}}(\{x:|\widetilde{v}|>0\}\cap\{H(\widetilde{v},x)>0\})},\end{aligned}$$

откуда благодаря предложениям 6.8 и 6.9 приходим к неравенству

$$\begin{aligned}\|H^+(\widetilde{v}, x)\|_{L_{\hat{B}}(\{x:|\widetilde{v}|>0\})} &\leq \|H(\widetilde{v}, x)\|_{L_\infty(\{x:H(\widetilde{v},x)>0\})} \\ &\times \frac{1}{\hat{B}^{-1}\big((\mathrm{meas}\{x \in \Omega : H(\widetilde{v}, x) > 0\})^{-1}\big)}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Возвращаясь к оценке (4.8), с учетом (4.9) выводим

$$C_5 \leq \frac{\|H(\widetilde{v}, x)\|_{L_\infty(\{x:H(\widetilde{v},x)>0\})}}{\hat{B}^{-1}\big(\frac{1}{\mathrm{meas}\{x\in\Omega:H(\widetilde{v},x)>0\}}\big)}. \tag{4.10}$$

В силу определения $H(\widetilde{v}, x)$ и неравенства (2.11) имеем

$$\|H(\widetilde{v}, x)\|_{L_\infty(\{x:H(\widetilde{v},x)>0\})} \leq \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h},$$

что при подстановке в (4.10) дает утверждение леммы 4.1. □

Лемма 4.2. *Пусть* $N = m(q+1)$. *Существует* $C_6 = \mathrm{const} > 0$ *такая, что для достаточно малых* h *имеет место неравенство*

$$C_6 \le \frac{\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} E\big(2 \ \mathrm{meas}\,\{x : C_4 h^{\gamma} \ge \widetilde{a}(x)\}\,\big), \tag{4.11}$$

где $\widetilde{\lambda}_1(h)$ *из* (2.6), $E(s) = s(-\ln s)$, $\widetilde{a}(x)$ *из* (2.7), *постоянные* $C_4 > 0$, $\gamma > 0$ *из* (2.34).

Доказательство. Очевидно, что при $s \to +\infty$ для $\hat{B}(s)$ из леммы 4.1 справедливо
$$\hat{B}(s) \sim s \ln s \le C_7 s \ln s := \hat{D}(s),$$

где $C_7 = \mathrm{const} > 0$. Значит, в силу предложения 6.2 для достаточно больших s имеет место неравенство:

$$\hat{B}^{-1}(s) \ge \hat{D}^{-1}(s). \tag{4.12}$$

Заметим, что $\ln \hat{D}(s) \sim \ln s$ и $\frac{\hat{D}(s)}{C_7 \ln \hat{D}(s)} = \frac{s \ln s}{\ln \hat{D}(s)} \sim s$, тогда

$$\hat{D}^{-1}(s) \sim \frac{s}{C_7 \ln s}. \tag{4.13}$$

Из (4.12) и (4.13) имеем: $\hat{B}^{-1}(s) \ge \hat{D}^{-1}(s) \ge C_8 \frac{s}{\ln s}$, откуда

$$\frac{1}{\hat{B}^{-1}(s)} \le \frac{\ln s}{C_8 s}. \tag{4.14}$$

Теперь можем продолжить неравенство (4.3) из леммы 4.1 с учетом оценки (4.14):

$$C_5 \le \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{C_8 h} \mathrm{meas}\,\Big\{x \in \Omega : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\Big\} \\ \times \Big(-\ln \mathrm{meas}\,\Big\{x \in \Omega : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\Big\}\Big). \tag{4.15}$$

Пусть $E(s) = s(-\ln s)$, тогда неравенство (4.15) перепишется в виде

$$\frac{C_9 h}{\widetilde{\lambda}_1(h)} \le E\bigg(\mathrm{meas}\,\Big\{x \in \Omega : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h}|\widetilde{v}|^{q-\lambda} > \widetilde{a}(x)\Big\}\bigg). \tag{4.16}$$

Так как функция $E(\cdot)$ возрастает на интервале $(0, 1/e)$, то из (4.16) и (2.29) следует оценка

$$E^{-1}\bigg(\frac{C_9 h}{\widetilde{\lambda}_1(h)}\bigg) \le h^{1-\beta} + \mathrm{meas}\,\bigg\{x \in \Omega : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} > \widetilde{a}(x)\bigg\}, \tag{4.17}$$

где $\beta \in (0,1)$. Из (4.17) с лёгкостью приходим к неравенству

$$1 \leq \frac{h^{1-\beta}}{E^{-1}\big(\frac{C_9 h}{\widetilde{\lambda}_1(h)}\big)} + \frac{\operatorname{meas}\big\{x \in \Omega : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} > \widetilde{a}(x)\big\}}{E^{-1}\big(\frac{C_9 h}{\widetilde{\lambda}_1(h)}\big)}. \tag{4.18}$$

В силу оценки (2.20) из леммы 2.4 и монотонности $E^{-1}(\cdot)$, получаем неравенство

$$E^{-1}\left(\frac{C_9 h}{\widetilde{\lambda}_1(h)}\right) \geq E^{-1}\big(C_2 \,(-\ln h)^{\frac{m(q+1)}{\alpha}}\big),$$

откуда

$$\frac{h^{1-\beta}}{E^{-1}\big(\frac{C_9 h}{\widetilde{\lambda}_1(h)}\big)} \leq \frac{h^{1-\beta}}{E^{-1}\big(C_2 \,(-\ln h)^{\frac{m(q+1)}{\alpha}}\big)} \longrightarrow 0 \quad \text{при } h \to 0, \tag{4.19}$$

поскольку $E^{-1}(s) \sim \frac{s}{-\ln s}$ при $s \to 0$. Из неравенства (4.18) с учетом (4.19) при достаточно малом h, имеем:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\operatorname{meas}\big\{x \in \Omega : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} > \widetilde{a}(x)\big\}}{E^{-1}\big(\frac{C_9 h}{\widetilde{\lambda}_1(h)}\big)},$$

откуда

$$E^{-1}\left(\frac{C_9 h}{\widetilde{\lambda}_1(h)}\right) \leq 2 \operatorname{meas}\left\{x \in \Omega : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} > \widetilde{a}(x)\right\}, \tag{4.20}$$

что дает оценку

$$\frac{C_9 h}{\widetilde{\lambda}_1(h)} \leq E\left(2 \operatorname{meas}\big\{x \in \Omega : \frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} > \widetilde{a}(x)\big\}\right). \tag{4.21}$$

Поскольку $0 < \beta < 1$, то существуют положительные постоянные C_4 и γ такие, что для достаточно малых h справедливо неравенство

$$\frac{2\widetilde{\lambda}_1(h)}{h} h^{\frac{\beta(q-\lambda)}{q+1}} \leq C_4 h^{\gamma}. \tag{4.22}$$

В силу (4.22) и того факта, что функция $E(\cdot)$ являются возрастающей, можем продолжить (4.21):

$$\frac{C_9 h}{\widetilde{\lambda}_1(h)} \leq E\big(2 \operatorname{meas}\{x : C_4 h^{\gamma} \geq \widetilde{a}(x)\}\big),$$

что и требовалось доказать. $\square$

5. Доказательство теоремы 1.1 при $N = m(q+1)$

Затухание решений в случае $N = m(q+1)$. Интегрируя неравенство (4.11) леммы 4.2 по h, имеем:

$$\int_0^c \frac{dh}{\widetilde{\lambda}_1(h)} \le \int_0^c \frac{\operatorname{meas}\{x : C_4 h^\gamma \ge \widetilde{a}(x)\}}{h} \times \big(-\ln(\operatorname{meas}\{x : C_4 h^\gamma \ge \widetilde{a}(x)\})\big)\, dh = I_4.$$

В результате замены переменной $s = C_4 h^\gamma \Rightarrow ds = \gamma\, C_4 h^\gamma \frac{dh}{h}$, т.е. $\frac{dh}{h} = \frac{ds}{\gamma s}$, приходим к:

$$I_4 = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\tilde{c}} \frac{\operatorname{meas}\{x : \widetilde{a}(x) \le s\}\big(-\ln(\operatorname{meas}\{x : \widetilde{a}(x) \le s\})\big)}{s}\, ds < +\infty$$

в силу условия теоремы 1.1 и предложений 6.3, 6.4. Неравенство (2.8) и лемма 2.2 завершают доказательство основного результата при $N = m(q+1)$.

6. Приложение

6.1. Класс S_φ

Пусть функция φ определена на $[0,\gamma]$ для некоторого $\gamma > 0$ и имеют место свойства:

(1) $\varphi(0) = 0$,

(2) φ — неубывающая на $[0,\gamma]$ функция,

(3) $\varphi(t) > 0$, $\forall\, t \in (0,\gamma]$,

(4) существуют $C > 0$ и $\gamma' \in (0,\gamma]$ такие, что для всех α, β из $[0,\gamma']$ справедливо неравенство $\varphi(\alpha+\beta) \le C\ (\varphi(\alpha) + \varphi(\beta))$.

Положим

$$S_\varphi = \left\{ a \in L^\infty(\Omega) \,|\, \exists\, c > 0 : \int_0^c \frac{\varphi\big(\operatorname{meas}\{x \in \Omega : |a(x)| \le t\}\big)}{t}\, dt < +\infty \right\}.$$

Основные свойства класса S_φ см. в работе [31].

Предложение 6.1. *Для $\alpha > 0$ справедливо неравенство:*

$$\operatorname{meas}\left\{x \in \Omega : \left|\exp\left(-\frac{\omega(|x|)}{|x|^\alpha}\right)\right| \leq s\right\} \leq C_N \left(\frac{\omega(|x|)}{-\ln s}\right)^{\frac{N}{\alpha}}. \tag{6.1}$$

Доказательство.

$$\operatorname{meas}\left\{x \in \Omega : \left|\exp\left(-\frac{\omega(|x|)}{|x|^\alpha}\right)\right| \leq s\right\}$$
$$= \operatorname{meas}\left\{x \in \Omega : |x|^\alpha \leq \frac{\omega(|x|)}{-\ln s}\right\}$$
$$= \operatorname{meas}\left\{x \in \Omega : |x| \leq \left(\frac{\omega(|x|)}{-\ln s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\} \leq C_N \left(\frac{\omega(|x|)}{-\ln s}\right)^{\frac{N}{\alpha}},$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 6.2 ([31, Prop. 4.9]). *Пусть f, g — возрастающие функции, определенные в окрестности $+\infty$ и такие, что*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Если выполнено неравенство $f(x) \leq g(x)$ для достаточно больших x, то справедливо $f^{-1}(x) \geq g^{-1}(x)$ при достаточно больших x.

Предложение 6.3 ([31, Prop. 4.2]). *Для $\alpha > 0$ имеет место $\exp\left(-\frac{1}{|x|^\alpha}\right) \in S_\varphi$, где $\varphi(t) = t^\beta$, $\beta > 0$.*

Предложение 6.4 ([31, Theor. 4.1]). *Если a и b принадлежат S_φ, то $ab \in S_\varphi$.*

Предложение 6.5. *Для $0 < \alpha < N$ имеет место $\exp\left(-\frac{1}{|x|^\alpha}\right) \in S_\varphi$, где $\varphi(t) = t(-\ln t)$.*

Доказательство. В силу предложения 6.1 и монотонности функции $\varphi(t) = t(-\ln t)$ имеем

$$\varphi\Big(\operatorname{meas}\Big\{x \in \Omega : \Big|\exp\Big(-\frac{1}{|x|^\alpha}\Big)\Big| \leq s\Big\}\Big) \leq \varphi\Big(C_N(-\ln s)^{-\frac{N}{\alpha}}\Big)$$
$$= C_N(-\ln s)^{-\frac{N}{\alpha}}\Big\{-\ln\Big(C_N(-\ln s)^{-\frac{N}{\alpha}}\Big)\Big\}.$$

Отсюда понятно, что для доказательства предложения 6.5 достаточно показать сходимость следующего интеграла:

$$I_5 = \int_0^c \frac{\ln(-\ln t)\,dt}{t(-\ln t)^{\frac{N}{\alpha}}}.$$

С этой целью сделаем замену под интегралом: $-\ln t = u \Rightarrow t = e^{-u}$, а значит $dt = -e^{-u}du$. Отметим, что для $\varepsilon > 0$ справедливо $\frac{\ln u}{u^\varepsilon} \to 0$ и будем считать здесь, не нарушая общности, что $c_1 > 1$, тогда

$$I_5 = -\int\limits_{+\infty}^{c_1} \frac{\ln u}{u^{\frac{N}{\alpha}}}\, du = \int\limits_{c_1}^{+\infty} \frac{\ln u}{u^\varepsilon} \frac{du}{u^{\frac{N}{\alpha}-\varepsilon}} \leq c_2 \int\limits_{c_1}^{+\infty} \frac{du}{u^{\frac{N}{\alpha}-\varepsilon}} < +\infty,$$

когда $\frac{N}{\alpha} - \varepsilon > 1$. Очевидно, что $\frac{\ln u}{u^{\frac{N}{\alpha}}} \geq \frac{1}{u^{\frac{N}{\alpha}}}$ при $u \geq e$, $\int_{c_1}^{+\infty} \frac{du}{u^{\frac{N}{\alpha}}} = +\infty$, когда $\frac{N}{\alpha} \leq 1$. □

6.2. Норма Люксембурга

Предложение 6.6. *Справедливо равенство*

$$\|v\|^{q+1}_{L_A(E)} = \|v^{q+1}\|_{L_M(E)},$$

где $M(t) = A(\sqrt[q+1]{t})$, $\|v\|_{L_M(E)} = \inf\big\{k > 0 : \int_E A\big(\sqrt[q+1]{\frac{|v(x)|}{k}}\big)dx \leq 1\big\}$.

Доказательство. По определению

$$\|v\|^{q+1}_{L_A(E)} = \inf\left\{k > 0 : \int\limits_E A\Big(\frac{|v(x)|}{k}\Big)dx \leq 1\right\}^{q+1}.$$

Так,

$$\|v\|^{q+1}_{L_A(E)} = \inf\left\{k > 0 : \int\limits_E A\left(\sqrt[q+1]{\frac{|v(x)|^{q+1}}{k^{q+1}}}\right)dx \leq 1\right\}^{q+1},$$

что дает

$$\|v\|^{q+1}_{L_A(E)} = \inf\left\{k^{q+1} > 0 : \int\limits_E A\left(\sqrt[q+1]{\frac{|v(x)|^{q+1}}{k^{q+1}}}\right)dx \leq 1\right\}$$

и $\|v\|^{q+1}_{L_A(E)} = \|v^{q+1}\|_{L_M(E)}$. □

Предложение 6.7 ([31, Prop. 4.6]). *Если $B \leq A$, то справедливо неравенство* $\|v\|_{L_B(E)} \leq \|v\|_{L_A(E)}$.

Предложение 6.8 ([31, Prop. 4.7]). *Если E, F — измеримые множества положительной меры и такие, что $E \subset F$, тогда имеет место оценка* $\|v\|_{L_B(E)} \leq \|v\|_{L_B(F)}$.

Предложение 6.9 ([31, Prop. 4.8]). *Если B является N-функцией, а F — измеримое множество положительной меры, то имеет место следующее неравенство:*

$$\|v\|_{L_B(F)} \leq \frac{\|v\|_{L^\infty(F)}}{B^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{meas}(F)}\right)} \quad \forall\, v \in L^\infty(F)$$

Литература

[1] H. W. Alt, S. Luckhaus, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations* // Math. Z., **183**, (1983), No. 3, 311–341.

[2] F. Bernis, *Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domain* // Math. Am., **279** (1988), No. 3, 373–394.

[3] L. E. Payne, *Improperly posed problems in partial differential equations* // Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 22. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa, (1975), p. 76.

[4] B. F. Knerr, *The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension* // Trans. Amer. Math. Soc., **249**, (1979), No. 2, 409–424.

[5] B. Straughan, *Instability, nonexistence and weighted energy methods in fluid dynamics and related theories*, Research Notes in Mathematics, **74**, London: Pitman (Advanced Publishing Program), 1982, 169 p.

[6] C. Bandle, I. Stakgold, *The formation of the dead core in parabolic reaction-diffusion problems* // Trans. Amer. Math. Soc., **286** (1984), No. 1, 275–293.

[7] A. Friedman, M. A. Herrero, *Extinction properties of semilinear heat equations with strong absorption*// J. Math. Anal. Appl., **124**, (1987), N 2, 530–546.

[8] Chen Xu-Yan, H. Matano, M. Mimura, *Finite-point extinction and continuity of interfaces in a nonlinear diffusion equation with strong absorption* // J. Reine Angew. Math., **459** (1995), No. 1, 1–36.

[9] А. С. Калашников, *О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **14** (1974), No. 4, 891–905.

[10] R. Kersner, *Nonlinear heat conduction with absorption space localization and extinction in finite time* // SIAM J. Appl. Math., **43** (1983), No. 6, 1274–1285.

[11] Е. С. Сабинина, *Об одном классе нелинейных вырождающихся параболических уравнений* // ДАН СССР, **143** (1962), No. 4, 794–797.

[12] Е. С. Сабинина, *Об одном классе квазилинейных параболических уравнений, не разрешимых относительно производной по времени* // Сиб. мат. журн., **6** (1965), No. 5, 1074–1100.

[13] G. Diaz, I. Diaz, *Finite extinction time for a class of nonlinear parabolic equations* // Comm. Partial Differential Equations., **4** (1979), No. 11, 1213–1231.

[14] А. С. Калашников, *О возникновении особенностей у решений уравнения нестационарной фильтрации* // Журнал вычислительной математики и математической физики, **7** (1967), No. 2, 440–444.

[15] А. С. Калашников, *О зависимости свойств решений параболических уравнений в неограниченных областях от поведения коэффициентов на бесконечности* // Математический сборник, **125** (1984), No. 3(11), 398–409.

[16] F. Bernis, *Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., **104 A** (1986), No. 1–2, 1–19.

[17] А. Е. Шишков, *Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка* // Матем. сб., **190**, (1999) No. 12, 129–156.

[18] A. Shishkov, R. Kersner, *Instantaneous shrinking of the support of energy solutions* // J. Math. Anal. Appl., **198** (1996), No. 3, 729–750.

[19] R. Kersner, F. Nicolosi, *The nonlinear heat equation with absorption: effects of variable coefficients* // J. Math. Anal. Appl., **170** (1992), No. 2, 551–566.

[20] A. S. Kalashnikov, *Instantaneous shrinking of the support for solutions to certain parabolic equations and systems* // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., **8** (1997), No. 4, 263–272.

[21] Li Jun-Jie, *Qualitative properties for solutions of semilinear heat equations with strong absorption* // J. Math. Anal. Appl., **281** (2003), No. 1, 382–394.

[22] Li Jun-Jie, *Qualitative properties of solutions to semilinear heat equations with singular initial data* // Electronic J. of Differ. Equat., (2004), No. 53, 1–12.

[23] V. A. Kondratiev, L. Véron, *Asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations* // Asymptotic Analysis, **14** (1997), 117–156.

[24] Y. Belaud, B. Helffer, L. Véron, *Long-time vanishing properties of solutions of sublinear parabolic equations and semi-classical limit of Schrųdinger operator* // Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. nonlinear, **18** (2001), No. 1, 43–68.

[25] B. Helffer, *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, Lecture Notes in Math. 1336, Springer-Verlag, 1989.

[26] M. Cwickel, *Weak type estimates for singular value and the number of bound states of Schrödinger operator* // Ann. Math. **106** (1977), 93–100.

[27] E. H. Lieb, W. Thirring, *Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrųdinger Hamiltonian and their relations to Sobolev Inequalities*, In Studies in Math. Phys., essay in honour of V. Bargmann, Princeton Univ. Press, 1976.

[28] G. V. Rosenblyum, *Distribution of the discrete spectrum of singular differential operators* // Doklady Akad. Nauk USSR, **202** (1972), 1012–1015.

[29] Y. Belaud, A. Shishkov, *Long-time extinction of solutions of some semilinear parabolic equations* // J. Differ. Equat., **238** (2007), 64–86.

[30] Е. В. Степанова, *Затухание решений параболических уравнений с двойной нелинейностью и вырождающимся абсорбционным потенциалом* // УМЖ, (2014), No. 1, 89–107.

[31] Y. Belaud, A. Shishkov, *Extinction of solutions of some semilinear higher order parabolic equations with degenerate absorption potential* // J. Evol. Equ., **10** (2010), No. 4, 857–882.

[32] W. Orlicz, *Ueber eine gewisse Klasse von Raumen vom Typus* // Bull. Intern. Acad. Pol. Ser. A, **8/9** (1932), 207—220.

[33] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1958.

[34] N. S. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications* // J. Math. Mech., **17** (1967), No. 5, 473–483.

Сведения об авторах

Екатерина Вадимовна Степанова

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург 74,
Донецк, 83114,
Украина
E-Mail: kitti_dob@rambler.ru