Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 3, 380 – 399

Метод сравнения для дифференциальных уравнений с производной Хукухары в пространстве $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$

Евгений В. Очеретнюк, Виталий И. Слынько

(*Представлена Н. А. Перестюком*)

Аннотация. Предложен новый подход к анализу решений дифференциальных уравнений с производной Хукухары основаный на идеях геометрии выпуклых тел и метод сравнения Матросова–Васильева. Получены оценки площади решений для одного класса псевдолинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары. Полученные результаты продемонстрированы на примерах.

2010 MSC. 34G20.

Ключевые слова и фразы. производная Хукухары, смешанная площадь, метод сравнения Матросова–Васильева.

Введение

Исследованию дифференциальных уравнений с производной Хукухары посвящено значительное число публикаций. В монографии [1] вопросы об устойчивости решений дифференциальных уравнений с производной Хукухары на основании прямого метода Ляпунова и метода сравнения. В обобщающих работах [2, 3] приведены результаты, касающиеся исследования решений дифференциальных уравнений с производной Хукухары на основе метода усреднения Н. Н. Боголюбова.

В настоящей работе предлагается новый подход к качественному анализу динамических свойств решений дифференциальных уравнений с производной Хукухары. В основу этого подхода положены идеи геометрии выпуклых тел, предложенные в работах Г. Минковского и А. Д. Александрова, и качественные методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, метод сравнения Матросова–Васильева, в варианте приведенном в работе [4].

Статья поступила в редакцию 14.04.2014

На основе этих идей получены оценки площади решений для одного класса псевдолинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары и приведены примеры иллюстрирующие эти результаты.

1. Вспомогательные результаты

Пусть $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ — метрическое пространство выпуклых компактов из $\mathbb{R}^2$ с метрикой Хаусдорфа. В пространстве $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ определены операции сложения (Минковского) и умножения на неотрицательный скаляр. Если $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$, $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ — пространство линейных операторов $\mathbb{R}^2$, тогда действие оператора A естественным образом распространяется на пространство $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$:

$$Au = \{Ax : x \in u\} \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2), \quad u \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2).$$

Пусть $u \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$, $v \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$, тогда если существует элемент $w \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ такой, что $u = w + v$, то элемент w называется разностью Хукухары элементов u и v. При этом обозначается $w = u - v$. Разность двух элементов пространства $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ существует не всегда.

Понятие разности Хукухары позволяет определить понятие производной Хукухары для отображения $F : (\alpha, \beta) \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$, $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$.

Определение 1.1. *Отображение $F : (\alpha, \beta) \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ называется дифференцируемым в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$, если существует элемент $D_H F(t_0) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ такой, что пределы*

$$\lim_{\varrho \to 0+} \frac{F(t_0 + \varrho) - F(t_0)}{\varrho}, \quad \lim_{\varrho \to 0+} \frac{F(t_0) - F(t_0 - \varrho)}{\varrho}$$

существуют и равны $D_H F(t_0)$. В этом случае, $D_H F(t_0)$ называется производной Хукухары в точке t_0.

Стандартно определяется дифференцируемость на открытых, полуоткрытых и замкнутых интервалах.

Отображение $F(t)$ дифференцируемое на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ восстанавливается по своей производной при помощи интеграла Ауманна [1]

$$F(t) = F(a) + \int_a^t D_H F(s)\, ds, \quad t \in [a, b].$$

Отметим, что необходимым условием дифференцируемости отображения является неубывания функции $\mathrm{diam}\, F(t)$.

Приведем, необходимые для дальнейшего изложения, результаты геометрии выпуклых тел, следуя работам А.Д. Александрова [5–8].

Пусть $u_i \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$, $i = 1, 2$ обозначим $S[u_1, u_2]$ смешанную площадь выпуклых компактов u_i, а $S[u] = S[u, u]$ — площадь фигуры u.

Функционал $S[u_1, u_2]$ является аддитивным и позитивно однородным по каждому аргументу, инвариантным относительно перестановки аргументов, а также непрерывным по совокупности своих аргументов относительно метрики Хаусдорфа. Поэтому справедлива формула Штейнера

$$S[u_1 + \varrho u_2] = S[u_1] + 2\varrho S[u_1, u_2] + \varrho^2 S[u_2], \quad \varrho \in \mathbb{R}_+. \tag{1.1}$$

Из этой формулы следует, что

$$2S[u_1, u_2] = \lim_{\varrho \to 0+0} \frac{S[u_1 + \varrho u_2] - S[u_1]}{\varrho}$$

Изопериметрическое неравенство Брунна–Минковского имеет вид

$$S[u_1, u_2] \geq \sqrt{S[u_1]S[u_2]}.$$

Поскольку разность Хукухары двух элементов пространства $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$, также как и производная Хукухары отображения $(\alpha, \beta) \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ не всегда определены, то возникает необходимость вложения пространства $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ в некоторое банахово пространство, так чтобы разность (Хукухары) любых двух элементов пространства была всегда определена как элемент этого более широкого пространства, а понятие производной отображения было бы применимо к более широкому классу отображений. Такое вложение осуществлено еще в 1937 году в работе академика А. Д. Александрова [5, с. 959–962]. Аналогичные результаты в этом направлении приведены также в более поздних работах [9–11]. Прежде чем привести соответствующую конструкцию, сделаем следующее замечание. Пространство $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ изометрично и изоморфно вкладывается как клин ([12]) в пространство $C(S^1)$ — непрерывных функций на единичной окружности S^1. Такое вложение осуществляется сопоставлением каждому элементу $u \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ его опорной функции. Поэтому, далее элементы пространства $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ будут отождествляться со своими опорными функциями, и это особо оговариваться не будет.

Опишем вложение пространства $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ в некоторое линейное нормированное пространство $\mathcal{A}_2$ так, что в этом пространстве для любых двух элементов осуществима операция разности двух элементов.

Рассмотрим множество $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)\times\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ и введем на этом множестве бинарное отношение ρ

$$(u,v)\rho(w,z)\equiv(u+z=v+w).$$

Пусть $\mathcal{A}_2=\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)\times\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)/\rho$. В пространстве $\mathcal{A}_2$ вводятся операции сложения и умножения на скаляр $\lambda\in\mathbb{R}$. Если $[(u,v)]\in\mathcal{A}_2$, $[(w,z)]\in\mathcal{A}_2$, то

$$\lambda[(u,v)]=\begin{cases}[(\lambda u,\lambda v)], & \lambda\geq 0,\\ [(|\lambda|v,|\lambda|u)], & \lambda\leq 0,\end{cases}\quad [(u,v)]+[(w,z)]=[(u+w,v+z)].$$

Эти операции корректно определены, а исходное пространство $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ изоморфно вкладывается в $\mathcal{A}_2$ по правилу $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)\ni u\to[(u,0)]\in\mathcal{A}_2$. В $\mathcal{A}_2$ можно ввести норму $\|[(u,v)]\|_{\mathcal{A}_2}=d_H(u,v)$. Это определение корректно, а соответствующее вложение $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)\to\mathcal{A}_2$ является изометричным вложением метрического пространства $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ в метрическое пространство $\mathcal{A}_2$, в котором метрика порождена введенной нормой $\|.\|_{\mathcal{A}_2}$. По терминологии монографии [12], пространство $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ является клином в линейном нормированном пространстве $\mathcal{A}_2$. Отметим, также, что пространство $\mathcal{A}_2$ не является полным, однако в [5, с. 961, лемма II] доказано, что его пополнение совпадает с $C(S^1)$. Для дальнейшего изложения необходимо распространить действие функционала $S[u_1,u_2]$ на элементы пространства $C(S^1)$. Это делается очевидным образом: используя свойство полилинейности этого функционала он распространяется сначала на пространство $\mathcal{A}_2$, а потом, используя продолжение по непрерывности, на элементы пространства $C(S^1)$. Явные формулы такого продолжения приведены в работе [5, с. 967, формула (3)].

Приведенные выше соображения позволяют несколько обобщить понятие производной Хукухары для отображения $F:(\alpha,\beta)\to\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$, приведенные выше.

Определение 1.2. *Отображение $F:(\alpha,\beta)\to\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ называется дифференцируемым в точке $t_0\in(\alpha,\beta)$, если существует элемент $D_HF(t_0)\in C(S^1)$ такой, что предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(t_0+\varepsilon)-F(t_0)}{\varepsilon}, \tag{1.2}$$

существует и равен $D_HF(t_0)$. В этом случае, $D_HF(t_0)$ называется (обобщённой) производной Хукухары в точке t_0.

Отметим, что разность в формуле (1.2) необходимо понимать как разность двух элементов пространства $\mathcal{A}_2$, а предел как элемент пространства $C(S^1)$ — пополнения пространства $\mathcal{A}_2$. Отметим, что определение 1.2 производной отображения $F : (\alpha, \beta) \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ обобщает известные определения производной Хукухары, так и понятие π-производной [2].

Напомним еще понятие производной Гато отображения $F : (\alpha, \beta) \times \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2) \to C(S^1)$ по переменной u.

Определение 1.3. *Непрерывный оператор $F'_u(t, u_0)$ с областью определения $\mathcal{D}(F'_u(t, u_0)) = \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ называется производной Гато по клину $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$, если при всех $v \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ выполняется равенство*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{F(t, u_0 + \varepsilon v) - F(t, u_0)}{\varepsilon} = F'_u(t, u_0)(v).$$

Оператор $F'_u(t, u_0)$ сохраняет структуру клина $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$, т.е. для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ и $u, v \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ выполняется равенство

$$F'_u(t, u_0)(\alpha u + \beta v) = \alpha F'_u(t, u_0)(u) + \beta F'_u(t, u_0)(v).$$

Используя лемму II из [5, с. 961] этот оператор можно однозначно продолжить до линейного непрерывного оператора пространства $C(S^1)$. Пусть отображение $F(t, u)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по переменной u при $u = u_0$. Тогда, нетрудно установить, что если $u \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ и элемент $v \in C(S^1)$ такой, что при достаточно малых положительных ε элемент $u + \varepsilon v \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$, то

$$F(t, u_0 + \varepsilon v) = F(t, u_0) + \varepsilon F'_u(t, u_0)(v) + o(\varepsilon).$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнения с (обобщённой) производной Хукухары

$$D_H u(t) = F(t, u), \quad u(t_0) = u_0, \tag{2.1}$$

где $u \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$, $F : [t_0, +\infty) \times \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2) \to C(S^1)$. Предположим, что для задачи Коши (2.1) выполняются условия, гарантирующие существование и единственность решений задачи Коши и пространство $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ является инвариантным множеством для дифференциального уравнения (2.1), т.е. из условия $u_0 \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ следует включение $W^t_{t_0}(u_0) \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^2)$ при всех $t \geq t_0$ при которых соответствующий оператор сдвига $W^t_{t_0}$ траекторий уравнения (2.1) определен.

В настоящей работе метод сравнения Матросова–Васильева [13] применяется к исследованию эволюции площади $S[u(t)]$ выпуклого множества $u(t)$ — решения задача Коши (2.1) с начальным значением $u(t_0) = u_0$. Введем следующие дополнительные предположения относительно дифференциального уравнения (2.1).

Предположение 2.1. *Предположим, что для дифференциального уравнения* (2.1) *выполняются условия*

1) *существуют частные производные* $F_t(t,u) \in C(S^1)$ *и* $F'_u(t,u) \in \mathfrak{L}(C(S^1)))$*;*

2) *существуют непрерывные функции* $\overline{\Psi} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $\underline{\Psi} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$*, такие, что выполняются оценки*

$$\begin{aligned}\underline{\Psi}(t, S[u], S[u, F(t,u)]) \le S[F(t,u(t))] \\ + S[u(t), F'_t(t,u(t))] + S[u(t), F'_u(t,u(t))(F(t,u(t)))] \\ \le \overline{\Psi}(t, S[u], S[u, F(t,u)])\end{aligned}$$

3) *функции* $\overline{\Psi}(t, s_0, s_1)$, $\underline{\Psi}(t, s_0, s_1)$ *не убывают по переменной* s_0 *при* $s_0 \ge 0$, $s_1 \ge 0$.

Введем вспомогательные функции $s_0(t) = S[u(t)]$ и $s_1(t) = S[u(t), F(t,u(t))]$. Вычислим полные производные этих функций вдоль решений исходного дифференциального уравнения (2.1).

Из дифференциального уравнения (2.1) следует, что

$$u(t+\varepsilon) = u(t) + \varepsilon\hat{F}(t,\varepsilon), \quad \hat{F}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+\varepsilon} F(s,u(s))\,ds.$$

Применяя формулу Штейнера, с учетом непрерывности функционала смешанной площади, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{s_0(t+\varepsilon) - s_0(t)}{\varepsilon} = 2\lim_{\varepsilon\to 0+}(S[u(t), \hat{F}(t,\varepsilon)] + \varepsilon S[\hat{F}(t,\varepsilon), \hat{F}(t,\varepsilon)])$$

Применяя теорему о среднем получим $\hat{F}(t,\varepsilon) \to F(t,u)$ при $\varepsilon \to 0$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{s_0(t+\varepsilon) - s_0(t)}{\varepsilon} = 2S[u(t), F(t,u(t))].$$

Аналогично

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{s_0(t) - s_0(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = 2S[u(t), F(t,u(t))].$$

Поэтому
$$\frac{ds_0}{dt} = 2S[u(t), F(t, u(t))].$$

Рассмотрим изменение вспомогательной функции $s_1(t) = S[u(t), F(t, u(t))]$ вдоль решений дифференциального уравнения (2.1). С учетом свойств функционала смешанной площади, получим

$$\begin{aligned} S[u(t+\varepsilon), F(t+\varepsilon, u(t+\varepsilon))] \\ = S[u(t) + \varepsilon\hat{F}(t,\varepsilon), F(t+\varepsilon, u(t) + \varepsilon\hat{F}(t,\varepsilon))] = \\ = S[u(t), F(t,u(t))] + \varepsilon(S[\hat{F}(t,\varepsilon), F(t,u(t))] + S[u(t), F'_t(t,u))] \\ + S[u(t), F'_u(t,u(t))(F(t,u))]) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Из последней формулы, следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{s_1(t+\varepsilon) - s_1(t)}{\varepsilon} = S[F(t,u(t)), F(t,u(t))] \\ + S[u(t), F'_t(t,u(t))] + S[u(t), F'_u(t,u(t))(F(t,u(t)))]. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{s_1(t) - s_1(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = S[F(t,u(t)), F(t,u(t))] \\ + S[u(t), F'_t(t,u(t))] + S[u(t), F'_u(t,u(t))(F(t,u(t)))]. \end{aligned}$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{dt} = S[F(t,u(t)), F(t,u(t))] \\ + S[u(t), F'_t(t,u(t))] + S[u(t), F'_u(t,u(t))(F(t,u(t)))]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Полученные выражения для полных производных вспомогательных функций $s_0(t)$ и $s_1(t)$ позволяют установить следующий общий результат.

Рассмотрим задачи Коши для систем сравнения

$$\frac{dv_0}{dt} = 2v_1, \quad v_0(t_0) = S[u_0],$$
$$\frac{dv_1}{dt} = \underline{\Psi}(t, v_0, v_1), \quad v_1(t_0) = S[u_0, F(t_0, u_0)],$$
$$\frac{dw_0}{dt} = 2w_1, \quad w_0(t_0) = S[u_0],$$
$$\frac{dw_1}{dt} = \overline{\Psi}(t, w_0, w_1), \quad w_1(t_0) = S[u_0, F(t_0, u_0)].$$

Теорема 2.1. *Предположим, что для дифференциального уравнения с производной Хукухары* (2.1) *выполняются условия предположения* 2.1.

Тогда при всех $t \geq t_0$ *выполняется неравенство*

$$v_0(t; t_0, S[u_0], S[u_0, F(t_0, u_0)]) \leq S[u(t)] \\ \leq w_0(t; t_0, S[u_0], S[u_0, F(t_0, u_0)])$$

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием теоремы о дифференциальном неравенстве и полученных выше оценок производных вспомогательных функционалов. □

3. Псевдолинейные дифференциальные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение с производной Хукухары вида

$$D_H u(t) = \psi(t, S[u(t)])Au(t), \tag{3.1}$$

где D_H — производная Хукухары, $u \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C([a, +\infty) \times [b, +\infty); \mathbb{R}_+)$, $b > 0$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$. Предположим, что для уравнения (3.1) выполняются условия, гарантирующие существование и единственность соответствующей задачи Коши.

Введем к рассмотрению функцию $s_0(t) = S[u(t)]$, где $u : [t_0, \Omega^+(t_0, u_0)) \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$ — решение задачи Коши дифференциального уравнения (3.1) с начальным условием $u(t_0) = u_0$, $u_0 \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$, $t_0 > a$, $S[u_0] \geq b$. Рассмотрим вопрос об изменении функции $s_0(t)$ вдоль решения $u(t)$. Применяя формулу (2.2), получим

$$\frac{ds_0(t)}{dt} = 2\psi(t, s_0(t))S[u(t), Au(t)]. \tag{3.2}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $s_1(t) = S[u(t), Au(t)]$. Аналогично тому, как получена формула (2.2), можно установить равенство

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = \psi(t, s_0(t))(S[Au(t), Au(t)] + S[u(t), A^2u(t)]) \\ = \psi(t, s_0(t))(|\det A|S[u(t)] + S[u(t), A^2u(t)]). \tag{3.3}$$

Соотношения (3.2) и (3.3) позволяют установить верхние и нижние оценки для площади $S[u(t)]$ решения дифференциального уравнения с производной Хукухары (3.1).

Рассмотрим вопрос о нижних оценках площади $S[u(t)]$. Соотношение (3.2) можно переписать в виде

$$\frac{ds_0(t)}{dt} = 2\psi(t, s_0(t))s_1(t). \tag{3.4}$$

Получим дифференциальное неравенство для функции $s_0(t)$. Применяя для соотношения (3.3) неравенство Брунна—Минковского, получим

$$\frac{ds_1(t)}{dt} \geq 2\psi(t, s_0(t))|\det A|s_0(t). \tag{3.5}$$

Из соотношений (3.4) и (3.5) следует неравенство

$$\frac{d}{dt}(s_1^2(t) - |\det A|s_0^2(t)) \geq 0.$$

Поэтому

$$s_1(t) \geq \sqrt{|\det A|s_0^2(t) + s_1^2(t_0) - |\det A|s_0^2(t_0))}.$$

Из равенства (3.4) и последнего неравенства следует дифференциальное неравенство для функции $s_0(t)$

$$\frac{ds_0(t)}{dt} \geq 2\psi(t, s_0(t))\sqrt{|\det A|s_0^2(t) + S^2[u_0, Au_0] - |\det A|S^2[u_0])}.$$

Наряду с этим неравенством рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = 2\psi(t, \zeta(t))\sqrt{|\det A|\zeta^2(t) + S^2[u_0, Au_0] - |\det A|S^2[u_0])}. \tag{3.6}$$

Из теоремы о дифференциальном неравенстве [14] следует теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $\zeta_- : [t_0, \Omega^+(t_0, \zeta_0)) \to \mathbb{R}_+$ *— минимальное решение задачи Коши для уравнения* (3.6) *с начальным условием* $\zeta_0 = S[u_0]$.

Тогда при всех $t \in [t_0, \min[\Omega^+(t_0, u_0), \Omega^+(t_0, \zeta_0)])$ *справедлива оценка*

$$S[u(t)] \geq \zeta_-(t).$$

Рассмотрим вопрос о верхних оценках площади $S[u(t)]$ решения $u(t)$ задачи Коши для дифференциального уравнения (3.1) при дополнительном предположении, что функция $\psi(t, s)$ не возрастает по переменной $s \geq 0$.

В силу теоремы Гамильтона–Кели

$$A^2 - (\mathrm{tr} A)A + (\det A)I = 0$$

поэтому

$$S[u(t), A^2u(t)] = S[u(t), ((\mathrm{tr} A)A - (\det A)I)u(t)]$$

$$\leq |\mathrm{tr}A|S[u(t), \mathrm{sgn}(\mathrm{tr}A)Au(t)] + |\det A|S[u(t), -\mathrm{sgn}(\det A)Iu(t)]. \quad (3.7)$$

Таким образом, приходим к необходимости изучения четырех случаев.

Случай 1. Пусть $\mathrm{sgn}(\mathrm{tr}A) = 1$, $\mathrm{sgn}(\det A) = -1$. В этом случае, из неравенства (3.7) и соотношений (3.3) и (3.4), следуют неравенства

$$\begin{aligned} \frac{ds_0}{dt} &\leq 2\psi(t, \zeta_-(t))s_1(t), \\ \frac{ds_1}{dt} &\leq \psi(t, s_0(t))(2|\det A|s_0(t) + |\mathrm{tr}A|s_1(t)) \\ &\leq \psi(t, \zeta_-(t))(2|\det A|s_0(t) + |\mathrm{tr}A|s_1(t)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $\zeta_-(t)$ — минимальное решение задачи Коши для дифференциального уравнения (3.6) с начальным условием $\zeta_-(t_0) = S[u_0]$.

Рассмотрим систему уравнений сравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_0}{dt} &= 2\psi(t, \zeta_-(t))\xi_1(t), \\ \frac{d\xi_1}{dt} &= \psi(t, \zeta_-(t))(2|\det A|\xi_0(t) + |\mathrm{tr}A|\xi_1(t)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

с начальными условиями $\xi_0(t_0) = S[u_0]$, $\xi_1(t_0) = S[u_0, Au_0]$. Правые части этой системы удовлетворяют условиям Важевского, поэтому при $t \geq t_0$ выполняются неравенства

$$s_0(t) \leq \xi_0(t). \quad (3.10)$$

Обозначим

$$\mu_1 = \frac{|\mathrm{tr}A| + \sqrt{\mathrm{tr}^2 A + 16|\det A|}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{|\mathrm{tr}A| - \sqrt{\mathrm{tr}^2 A + 16|\det A|}}{2}.$$

Тогда, интегрируя уравнение сравнения, получим при всех $t \geq t_0$ неравенство

$$\begin{aligned} S[u(t)] \leq \frac{1}{\sqrt{\mathrm{tr}^2 A + 16|\det A|}} \Bigg(&(2S[u_0, Au_0] - \mu_2 S[u_0])e^{\mu_1 \int_{t_0}^{t} \psi(s,\zeta_-(s))\,ds} \\ &+ (\mu_1 S[u_0] - 2S[u_0, Au_0])e^{\mu_2 \int_{t_0}^{t} \psi(s,\zeta_-(s))\,ds} \Bigg). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Прежде чем рассмотреть другие случаи, отметим, что если u_0 — центрально-симметричная фигура, то при всех $t \geq t_0$ выпуклое множество $u(t)$ также является центрально симметричной фигурой. В этом случае приведенная оценка (3.11) справедлива независимо от знаков $\mathrm{tr}A$ и $\det A$.

Случай 2. Рассмотрим далее случай $\mathrm{sgn}(\mathrm{tr}A) = -1$, $\mathrm{sgn}(\det A) = -1$. Обозначим $\widetilde{s}_0(t) = S[u(t), -Iu(t)]$, $\widetilde{s}_1(t) = S[u(t), -Au(t)]$, тогда, с учетом (3.7)

$$\begin{aligned}\frac{ds_1(t)}{dt} &\le \psi(t, s_0(t))(2|\det A|s_0(t) + |\mathrm{tr}A|\widetilde{s}_1(t)) \\ &\le \psi(t, \zeta_-(t))(2|\det A|s_0(t) + |\mathrm{tr}A|\widetilde{s}_1(t)),\end{aligned}$$

$$\frac{d\widetilde{s}_0(t)}{dt} = 2\psi(t, s_0(t))\widetilde{s}_1(t) \le \psi(t, \zeta_-(t))\widetilde{s}_1(t),$$

$$\begin{aligned}\frac{d\widetilde{s}_1(t)}{dt} \le \psi(t, s_0(t))(|\det A|\widetilde{s}_0(t) &+ |\mathrm{tr}A|S[u(t), -\mathrm{sgn}(\mathrm{tr}A)Au] \\ &+ |\det A|S[u(t), \mathrm{sgn}(\det A)u(t)]).\end{aligned}$$

Из последнего неравенства в рассматриваемом случае следует неравенство

$$\begin{aligned}\frac{d\widetilde{s}_1(t)}{dt} &\le \psi(t, s_0(t))(2|\det A|\widetilde{s}_0(t) + |\mathrm{tr}A|s_1(t)) \\ &\le \psi(t, \zeta_-(t))(2|\det A|\widetilde{s}_0(t) + |\mathrm{tr}A|s_1(t)).\end{aligned}$$

Рассмотрим систему сравнения

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_0(t)}{dt} &= 2\psi(t, \zeta_-(t))\xi_1(t), \\ \frac{d\widetilde{\xi}_0(t)}{dt} &= 2\psi(t, \zeta_-(t))\widetilde{\xi}_1(t), \\ \frac{d\xi_1(t)}{dt} &= \psi(t, \zeta_-(t))(2|\det A|\xi_0(t) + |\mathrm{tr}A|\widetilde{\xi}_1(t)), \\ \frac{d\widetilde{\xi}_1(t)}{dt} &= \psi(t, \zeta_-(t))(2|\det A|\widetilde{\xi}_0(t) + |\mathrm{tr}A|\xi_1(t)).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Правые части системы сравнения удовлетворяют условиям Важевского, и поэтому из теоремы о дифференциальном неравенстве следует, что справедливо неравенство (3.10), в котором $\xi_0(t)$ — ξ_0-компонента решения задачи Коши для системы сравнения (3.12) с начальными условиями $\xi_0(t_0) = S[u_0, u_0]$, $\widetilde{\xi}_0(t_0) = S[u_0, -Iu_0]$, $\xi_1(t_0) = S[u_0, Au_0]$, $\widetilde{\xi}_1(t_0) = S[u_0, -Au_0]$.

Интегрирование системы сравнения приводит к следующей оценке для площади $S[u(t)]$ решения дифференциального уравнения (3.1), справедливой при $t \ge t_0$

$$
\begin{aligned}
S[u(t)] \leq \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tr}^2 A + 16|\det A|}}\Bigg[&(2(S[u_0, Au_0] + S[u_0, -Au_0]) \\
&- \mu_2(S[u_0] + S[u_0, -Iu_0]))\exp\left\{\mu_1 \int\limits_{t_0}^{t} \psi(s, \zeta_-(s))\, ds\right\} \\
&+ (2(S[u_0, Au_0] + S[u_0, -Au_0]) \\
&- \mu_1(S[u_0] + S[u_0, -Iu_0]))\exp\left\{\mu_2 \int\limits_{t_0}^{t} \psi(s, \zeta_-(s))\, ds\right\} \\
&+ (2(S[u_0, Au_0] - S[u_0, -Au_0]) \\
&- \mu_4(S[u_0] - S[u_0, -Iu_0]))\exp\left\{\mu_3 \int\limits_{t_0}^{t} \psi(s, \zeta_-(s))\, ds\right\} \\
&+ (2(S[u_0, Au_0] - S[u_0, -Au_0]) \\
&- \mu_3(S[u_0] - S[u_0, -Iu_0]))\exp\left\{\mu_4 \int\limits_{t_0}^{t} \psi(s, \zeta_-(s))\, ds\right\}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\mu_3 = \frac{-|\mathrm{tr}A| + \sqrt{\mathrm{tr}^2 A + 16|\mathrm{det}A|}}{2},
$$
$$
\mu_4 = \frac{-|\mathrm{tr}A| - \sqrt{\mathrm{tr}^2 A + 16|\mathrm{det}A|}}{2}.
$$

Случай 3. $\mathrm{sgn}(\mathrm{tr}A) = -1$, $\mathrm{sgn}(\det A) = 1$. Система сравнения в этом случае имеет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi_0}{dt} &= 2\psi(t, \zeta_-(t))\xi_1, \\
\frac{d\widetilde{\xi_0}}{dt} &= 2\psi(t, \zeta_-(t))\widetilde{\xi_1}, \\
\frac{d\xi_1}{dt} &= \psi(t, \zeta_-(t))(|\det A|(\xi_0 + \widetilde{\xi_0}) + |\mathrm{tr}A|\widetilde{\xi_1}), \\
\frac{d\widetilde{\xi_1}}{dt} &= \psi(t, \zeta_-(t))(|\det A|(\xi_0 + \widetilde{\xi_0}) + |\mathrm{tr}A|\xi_1),
\end{aligned}
$$

Интегрируя эту систему, получим оценку для площади $S[u(t)]$ при всех $t \geq t_0$

$$S[u(t)] \le \frac{1}{2}\Bigg[2(S[u_0] - S[u_0, -Iu_0])$$

$$+ \frac{2}{|\mathrm{tr}A|}\left(1 - \exp\left\{-|\mathrm{tr}A|\int\limits_{t_0}^{t}\psi(s,\zeta_-(s))\,ds\right\}\right)(S[u_0, Au_0]$$

$$- S[u_0, -Au_0]) + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{tr}^2A + 16|\det A|}}\Bigg((2(S[u_0, Au_0] + S[u_0, -Au_0])$$

$$- \mu_2(S[u_0] + S[u_0, -Iu_0]))\exp\left\{\mu_1\int\limits_{t_0}^{t}\psi(s,\zeta_-(s))\,ds\right\}$$

$$+ (\mu_1(S[u_0] + S[u_0, -Iu_0])$$

$$- 2(S[u_0, Au_0] + S[u_0, -Au_0]))\exp\left\{\mu_2\int\limits_{t_0}^{t}\psi(s,\zeta_-(s))\,ds\right\}\Bigg)\Bigg]$$

Случай 4. $\mathrm{sgn}(\mathrm{tr}A) = 1$, $\mathrm{sgn}(\det A) = 1$. Система сравнения в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi_0}{dt} = 2\psi(t,\zeta_-(t))\xi_1, \quad \frac{d\widetilde{\xi}_0}{dt} = 2\psi(t,\zeta_-(t))\widetilde{\xi}_1,\\
&\frac{d\xi_1}{dt} = \psi(t,\zeta_-(t))(|\det A|(\xi_0 + \widetilde{\xi}_0) + |\mathrm{tr}A|\xi_1),\\
&\frac{d\widetilde{\xi}_1}{dt} = \psi(t,\zeta_-(t))(|\det A|(\xi_0 + \widetilde{\xi}_0) + |\mathrm{tr}A|\widetilde{\xi}_1).
\end{aligned}$$

Интегрируя эту систему, получим оценку для площади $S[u(t)]$ при всех $t \ge t_0$

$$S[u(t)] \le \frac{1}{2}\Bigg[2(S[u_0] - S[u_0, -Iu_0])$$

$$+ \frac{2}{|\mathrm{tr}A|}\left(\exp\left\{|\mathrm{tr}A|\int\limits_{t_0}^{t}\psi(s,\zeta_-(s))\,ds\right\} - 1\right)(S[u_0, Au_0]$$

$$- S[u_0, -Au_0]) + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{tr}^2A + 16|\det A|}}\Bigg((2(S[u_0, Au_0] + S[u_0, -Au_0])$$

$$- \mu_2(S[u_0] + S[u_0, -Iu_0]))\exp\left\{\mu_1\int\limits_{t_0}^{t}\psi(s,\zeta_-(s))\,ds\right\}$$

$$+ (\mu_1(S[u_0] + S[u_0, -Iu_0])$$

$$- 2(S[u_0, Au_0] + S[u_0, -Au_0])) \exp\left\{\mu_2 \int\limits_{t_0}^{t} \psi(s, \zeta_-(s))\, ds\right\}\Bigg)\Bigg]$$

4. Примеры

Рассмотрим некоторые примеры, когда предложенный в настоящей работе подход позволяет получить точное значение площади $S[u(t)]$ решения или построить все решения дифференциального уравнения с производной Хукухары в пространстве $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$.

Пример 4.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$D_H u(t) = Au(t), \tag{4.1}$$

где $u \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$

Случай 1. $\mathrm{tr}A = 0$, $\mathrm{sgn}(\det A) = -1$. Тогда из формулы (3.11) следует неравенство

$$S[u(t)] \le S[u_0]\mathrm{ch}\big(2\sqrt{|\det A|}(t-t_0)\big) + \frac{S[u_0, Au_0]}{\sqrt{|\det A|}}\mathrm{sh}\big(2\sqrt{|\det A|}(t-t_0)\big), \quad \text{при всех } t \ge t_0.$$

С учетом этой оценки, интегрируя уравнение сравнения (3.6), получим равенство

$$S[u(t)] = S[u_0]\mathrm{ch}\big(2\sqrt{|\det A|}(t-t_0)\big) + \frac{S[u_0, Au_0]}{\sqrt{|\det A|}}\mathrm{sh}\big(2\sqrt{|\det A|}(t-t_0)\big), \quad \text{при всех } t \ge t_0.$$

Случай 2. Оператор A периодический. Предположим, что существует натуральное число $n \ge 2$ такое, что $A^n = I$. Предположим, что это число n является наименьшим натуральным числом для которого этого условие выполняется. Определим вспомогательные функции $s_j(t) = S[u(t), A^j u(t)]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Эти функции удовлетворяют линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered} \frac{ds_0}{dt} = 2s_1, \\ \frac{ds_j}{dt} = s_{j-1} + s_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-2, \\ \frac{ds_{n-1}}{dt} = s_{n-2} + s_0. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Система уравнений с постоянными коэффициентами (4.2) может быть проинтегрирована в явном виде. Приведем соответствующие выражения для площади $S[u(t)]$ решения уравнения (4.1) при $n = 3, 4$.

$$
\begin{aligned}
n=3,\quad S[u(t)] &= \Big(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\Big)S[u_0] \\
&\quad+\Big(-\frac{4}{9}e^{-t}+\frac{4}{9}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}t\Big)S[u_0,Au_0] \\
&\qquad+\Big(-\frac{2}{9}e^{-t}+\frac{2}{9}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}t\Big)S[u_0,A^2u_0],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n=4,\quad S[u(t)] &= \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}\Big)S[u_0] \\
+\Big(\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}e^{2t}-\frac{3}{8}e^{-2t}\Big)S[u_0,Au_0]&+\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}\Big)S[u_0,A^2u_0] \\
&+\Big(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}e^{2t}-\frac{1}{8}e^{-2t}\Big)S[u_0,A^3u_0].
\end{aligned}
$$

Пример 4.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$D_H u(t) = \psi(t, S[u])Au(t), \tag{4.3}$$

где $u \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$

Предположим, что оператор A нильпотентный и $A^2 = O$, а функция $\psi(\tau, s)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной s на любом множестве вида $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, $a \geq 0$ т.е.

$$
\begin{gathered}
(\exists\, L > 0)\ (\forall\, \tau \in [\alpha, \beta]),\ \ (\forall\, s_1,\ s_2 \in [a, b]) \\
|\psi(\tau, s_2) - \psi(\tau, s_1)| \leq L|s_2 - s_1|.
\end{gathered}
$$

Определим вспомогательные функции $s_j(t) = S[u(t), A^j u(t)]$, $j = 0, 1$. Эти функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{ds_0}{dt} &= 2\psi(t, s_0)s_1, \\
\frac{ds_1}{dt} &= 0,
\end{aligned}
$$

которая сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения

$$\frac{ds_0}{dt} = 2\psi(t, s_0)S[u_0, Au_0]. \tag{4.4}$$

Обозначим решение этого уравнения с начальным условием $s_0(t_0) = S[u_0]$ определенное на полуинтервале $[t_0, t_0+\omega^+(t_0,u_0))$ через $s_0(t;t_0, S[u_0], S[u_0, Au_0])$.

Пусть $B_r(u_0)$ ($\overline{B}_r(u_0)$) — открытый (замкнутый) шар радиуса r с центром u_0 в метрическом пространстве $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^2)$. Пусть η, $0 < \eta < \omega^+(t_0,u_0)$ — фиксированное достаточно малое число. Построим решение уравнения (4.3), применяя к этому уравнению метод последовательных приближений

$$u_n(t) = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau, S[u_{n-1}])Au_{n-1}(\tau)\,d\tau = u_0 \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau, S[u_{n-1}])Au_0\,d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Установим условия сходимости последовательных приближений, равномерной на замкнутом интервале $[t_0, t_0+\eta]$. Прежде всего отметим, что из формулы Штейнера и определения метрики Хаусдорфа выводится, что существует постоянная $L_1 > 0$ такая, что при всех $u, v \in \overline{B}_r(u_0)$ выполняется неравенство

$$|S[u] - S[v]| \le L_1 d_H(u,v).$$

Пусть $m(\eta) = \max_{t\in[t_0,t_0+\eta]} \psi(t, S[u_0])$, тогда существует $\eta_0 > 0$ такое, что при всех $\eta \in [0,\eta_0]$ выполняется неравенство $(m(\eta) + LL_1 r) \times d_H(Au_0, 0)\eta \le r$. Если $u_{n-1}(t) \in \overline{B}_r(u_0)$ при всех $t \in [t_0, t_0+\eta]$, то из свойств метрики Хаусдорфа следует оценка

$$d_H(u_n(t), u_0) \le \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau, S[u_{n-1}(\tau)])\,d\tau\, d_H(Au_0, 0) \\ \le (m(\eta) + LL_1 r) d_H(Au_0, 0)\eta \le r, \quad t \in [t_0, t_0+\eta],$$

т.е. $u_n(t) \in \overline{B}_r(u_0)$ при всех $t \in [t_0, t_0+\eta]$. Поскольку, $u_0 \in \overline{B}_r(u_0)$, то $u_n(t) \in \overline{B}_r(u_0)$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, $t \in [t_0, t_0+\eta]$. Аналогично, применяя свойства метрики Хаусдорфа, получим

$$d_H(u_{n+1}(t), u_n(t)) \le \int\limits_{t_0}^{t} |\psi(\tau, S[u_n(\tau)]) - \psi(\tau, S[u_{n-1}(\tau)])|\,d\tau\, d_H(u_0, 0) \\ \le LL_1 d_H(Au_0, 0) \int\limits_{t_0}^{t} d_H(u_n(\tau), u_{n-1}(\tau))\,d\tau.$$

Из этих неравенств последовательно выводятся оценки

$$d_H(u_{n+1}(t), u_n(t)) \le \frac{(LL_1 d_H(Au_0, 0)(t - t_0))^n}{n!} r, \ \ t \in [t_0, t_0 + \eta], \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Из последней оценки следует равномерная на замкнутом интервале $[t_0, t_0+\eta]$ сходимость при $n \to \infty$ последовательности $u_n(t)$ к решению $u(t)$ решения уравнения (4.3). Поэтому

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau, S[u(\tau)]) Au_0 d\tau \\ &= u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau, s_0(\tau; t_0, S[u_0], S[u_0, Au_0])) Au_0 d\tau, \\ &\qquad\qquad t \in [t_0, t_0 + \eta]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Покажем справедливость этой формулы при всех $t \in [t_0, t_0 + \omega^+(t_0, u_0))$. Обозначим M — множество тех $\eta > 0$ для которых формула (4.6) справедлива при всех $t \in [t_0, t_0 + \eta]$. Это множество непустое. Пусть $\eta^* = \sup M$ — конечное число или бесконечность. Предположим, от противного, что $\eta^* < \omega^+(t_0, u_0)$. Тогда существует $u(t_0 + \eta^*) = \lim_{t \to t_0 + \eta^* - 0} u(t)$ и

$$u(t_0 + \eta^*) = u(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_0+\eta^*} \psi(\tau, s_0(\tau; t_0, S[u_0], S[u_0, Au_0])) Au_0 d\tau \tag{4.7}$$

По доказанному выше, существует достаточно малое число $\eta_1 > 0$ такое, что при всех $t \in [t_0 + \eta^*, t_0 + \eta^* + \eta_1]$ справедливо представление

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_0 + \eta^*) \\ &+ \int\limits_{t_0}^{t} \psi\Big(\tau, s_0(\tau; t_0 + \eta^*, S[u(t_0 + \eta^*)], S[u(t_0 + \eta^*), Au(t_0 + \eta^*)])\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Au(t_0 + \eta^*) d\tau &= u(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_0+\eta^*} \psi\Big(\tau, s_0(\tau; t_0, S[u_0], S[u_0, Au_0])\Big) Au_0 \, d\tau \\ &+ \int\limits_{t_0}^{t} \psi\Big(\tau, s_0(\tau; t_0 + \eta^*, S[u(t_0)] \end{aligned}$$

$$+2\int\limits_{t_0}^{t_0+\eta^*}\psi(\zeta,s_0(\zeta;t_0,S[u_0],S[u_0,Au_0]))\,d\zeta Au_0,$$

$$S[u_0,Au_0])\Big)d\tau Au_0$$

$$=u(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\psi\Big(\tau,s_0(\tau;t_0,S[u_0],S[u_0,Au_0])\Big)Au_0d\tau.$$

Таким образом, получено противоречие с определением η^*. Поэтому при всех $t\in[t_0,t_0+\omega^+(t_0,u_0))$ получим формулу для решения дифференциального уравнения (4.4)

$$u(t)=u_0+\int\limits_{t_0}^{t}\psi(\tau,s_0(\tau;t_0,S[u_0],S[u_0,Au_0]))d\tau Au_0.$$

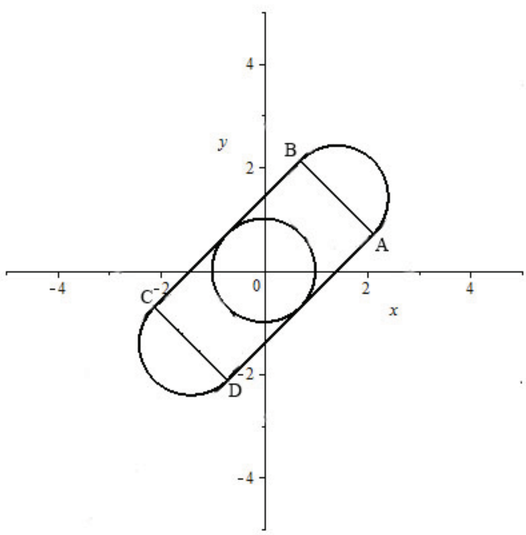

Рис. 1: $u(t)$

Рассмотрим частный случай, когда $u_0=K$ — круг с центром в точке $x=0$, $\psi=1$ и

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Следуя изложенному выше, получим

$$u(t)=u_0+Au_0(t-t_0).$$

Отметим, что множество Au_0 представляет собой отрезок с концами в точках $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. $u(t)$ представлено на рисунке 1, где $AB = 2$, $BC = 4(t - t_0)$. При этом, непосредственно из вида этого решения следует, что его площадь равна $S[u(t)] = \pi + 8(t - t_0)$. Отметим, что к этому же результату приводит интегрирование уравнения (4.4) $S[u(t)] = S[u_0] + 2S[u_0, Au_0](t - t_0)$, поскольку $S[u_0] = S[K] = \pi$, $S[u_0, Au_0] = 4$.

Таким образом, в этом примере, предложенный общий подход позволяет построить общее решение задачи Коши дифференциального уравнения (4.3).

Литература

[1] V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi, *Theory of set differential equations in metric spaces*, London: Cambridge Scientific Publisers, 2006.

[2] Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник, *Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью*, Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007.

[3] А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Дифференциальные уравнения с "четкой" и нечеткой многозначной правой частью: асимптотические методы*, Одесса: Астропринт, 2009.

[4] С. Н. Васильев,*К теории редукции в качественном анализе и управлении динамическими системами* // Оптимальное управление и дифференциальные игры. Тр. ИММ УрО РАН **10** (2004), No. 10, 20–34.

[5] А. Д. Александров, *К теории смешанных объемов выпуклых тел. I. Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел* // Матем. сб., **2(44)** (1937), No. 5, 947–972.

[6] А. Д. Александров, *К теории смешанных объемов выпуклых тел. II. Новые неравенства между смешанными объемами и их прилоэсения* // Матем. сб., **2(44)** (1937), No. 6, 1205–1238.

[7] А. Д. Александров, *К теории смешанных объемов выпуклых тел. III. Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела* // Матем. сб., **3(45)** (1938), No. 1, 27–46.

[8] А. Д. Александров, *К теории смешанных объемов выпуклых тел. IV. Смешанные дискриминанты и смешанные объемы* //Матем. сб., **3(45)** (1938), No. 2, 227–251.

[9] H. Radstrom, *An embedding theorem for spaces of convex sets* // Proc. Amer. Math. Soc., (1952), No. 3, 165–169.

[10] G. Debreu, *Integration of correspondences* // Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2: Contributions to Probability Theory, Part 1, 351–372, University of California Press, Berkeley, Calif., 1967

[11] Е. С. Половинкин, *Теория многозначных отображений*, М.: Изд-во МФТИ, 1983.

[12] М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев, *Позитивные линейные системы: метод положительных операторов*, М.: Наука, 1985.

[13] В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский, С. Н. Васильев, *Метод сравнения в математической теории систем*, Новосибирск: Наука, 1980.

[14] Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа, *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, М.: Мир, 1980.

Сведения об авторах

Евгений Владимирович Очеретнюк

Черкасский государственный технологический университет,
бул. Шевченко, 460,
18006, Черкассы,
Украина
E-Mail: ocheretnyukeugen@ukr.net

Виталий Иванович Слынько

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3,
03057, Киев,
Украина
E-Mail: vitstab@ukr.net