Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 2, 222 – 242

Аппроксимативные свойства методов суммирования интегралов Фурье

Ольга В. Котова, Роальд М. Тригуб

Аннотация. В статье исследуется порядок (скорость) приближения функций на прямой целыми функциями экспоненциального типа не выше σ при $\sigma \to \infty$ (линейные и наилучшие приближения). Найден точный порядок приближения индивидуальных функций на $\mathbb{R}^d$ классическими методами суммирования интегралов Фурье: Гаусса–Вейерштрасса, Бохнера–Рисса, Марцинкевича и неклассическим методом Бернштейна–Стечкина. Для функций на торе подобные теоремы о приближении полиномами получены ранее.

2010 MSC. 42B10, 41A17, 41A25, 30D15.

Ключевые слова и фразы. Целые функции экспоненциального типа, неравенство Бернштейна–Рисса, алгебра абсолютно сходящихся интегралов Фурье, методы суммирования, модуль гладкости, K-функционал, мультипликатор Фурье, полная вариация меры.

Введение

Периодические функции приближают обычно тригонометрическими полиномами, которые являются часто линейными средними рядов Фурье этих функций. В случае непериодических функций на вещественной оси С. Н. Бернштейн предложил вместо полиномов использовать целые функции экспоненциального типа не выше σ (Ц.Ф.Э.Т. $\leq \sigma$) при $\sigma \to \infty$.

Давно известны прямые и обратные теоремы для таких приближений и их применение к теоремам вложения классов функций многих переменных ([1] и, особенно, [2]).

Периодические функции — это частный случай, если иметь в виду приближение в пространстве C.

В настоящей статье некоторые из теорем монографии [3] для периодических функций обобщены на любые функции из L_p, $p \geq 1$,

Статья поступила в редакцию 11.05.2015

ISSN 1810 – 3200.

на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Вместо рядов Фурье — интегралы Фурье.

Еще в 60 годы прошлого века второй из авторов нашел точный порядок приближения индивидуальных функций, а не классов, классическими методами суммирования рядов Фурье ([4,5]). Для этого, особенно в случае функций нескольких переменных ([6], см. также [3]), пришлось ввести специальные модули гладкости и K-функционалы. В настоящее время такие результаты называют “strong converse inequality” (см. [7] и список литературы в этой статье).

Для определения точного порядка приближения имеются два метода (см. [3, с. 362]). Первый из них основан на экстремальных свойствах полиномов (или Ц.Ф.Э.Т. $\leq \sigma$). См. ниже теоремы 1.1–1.5 п. 1. Этот метод применим и к нелинейным методам (операторам) приближения. Второй метод доказательства основан на принципе сравнения мультипликаторов Фурье, т.е. сверток функций с разными мерами. Достаточное условие для такого сравнения указано в [8]. Одновременно в [5] доказано эквивалентное достаточное условие, но только для периодических функций. Позже принцип сравнения был существенно усилен для периодических функций: добавилось, в частности, и необходимое условие в случае компактных операторов. См. ниже теоремы А и Б и [3]. В п. 2 настоящей статьи этим методом доказаны теоремы 2.1–2.6.

Характеристику мультипликаторов Фурье см. в [9, теоремы 3.16 и 3.14 гл. I].

Через μ обозначаем конечную борелевскую комплекснозначную меру на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ ($x = (x_1, \ldots, x_d)$, $(x,y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j$),

$$\widehat{d\mu}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,y)} d\mu(x).$$

Свойства мер μ и $|\mu| = var\mu$ (полная вариации меры) см., напр., в [10, гл. 11].

Вопрос о мультипликаторах из L_1 в L_1 упирается в принадлежность функции-множителя, определяющей мультипликатор, пространству $B(\mathbb{R}^d)$ преобразований Фурье мер

$$B(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,y)} d\mu(y), \quad \|f\|_B = |\mu|(\mathbb{R}^d) < \infty \right\}.$$

В случае $d\mu(y) = g(y)dy$, $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$, будем писать $f \in A(\mathbb{R}^d)$ и $\|f\|_A = \|g\|_1$. Свойства банаховых алгебр B и A см. в недавней обзорной статье [11].

Через $W_{p,\sigma} = W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$ ($W_{\infty,\sigma} = B_\sigma$) обозначим множество Ц.Ф.Э.Т. $\le \sigma$, сужение которых на $\mathbb{R}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$. По теореме Винера–Пэли преобразование Фурье функции из $W_{2,\sigma}$ равно нулю почти всюду вне $[-\sigma, \sigma]$ на $\mathbb{R}$, см. [12]. Обобщение этой теоремы на функции нескольких переменных см., напр., в [3].

Отметим еще, что иногда даже точные неравенства для классов функций на всем пространстве можно получить предельным переходом из периодического случая (см. [3, 5.5.9–5.5.10]).

И наконец,

$$\Delta_h f(x) = f(x) - f(x+h), \quad \dot{\Delta}_h f(x) = f(x-h) - f(x+h),$$

а модуль гладкости в $L_p(\mathbb{R})$ порядка $r \in \mathbb{N}$ и шага $h > 0$ определяют так:

$$\omega_r(f;h)_p = \sup_{0<\delta\le h} \left\|\Delta_\delta^r f(\cdot)\right\|_p.$$

При $\lambda > 0$

$$\omega_r(f;h)_p \le (\lambda+1)^r \omega_r(f;h)_p,$$

а для гладких функций $\omega_r(f;h)_p \le \|f^{(r)}\|_p \cdot h^r$ (см. [1]] или [3]]).

Через $c(\dots)$ обозначаем положительные константы, зависящие только от величин, стоящих в круглых скобках.

Основные результаты работы, а теоремы 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 2.3 и 2.5 являются новыми и для периодических функций, анонсированы в [13].

1. Функции на прямой $\mathbb{R}$. Первый метод

Начнем с общей прямой теоремы для произвольных линейных операторов.

Теорема 1.1. *Пусть G_σ — линейный непрерывный оператор $L_p(\mathbb{R}) \to W_{p,\sigma}$ $(p \ge 1)$. Для того чтобы при данном $r \in \mathbb{N}$ для всех функций $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\sigma > 0$ при некоторой константе c_1 было*

$$\|f - G_\sigma(f)\|_p \le c_1(r)\omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_\sigma \|G_\sigma\|_{L_p\to L_p} < \infty,$$

и при некоторой константе c_2 и любой функции $g \in W_{p,\sigma}$

$$\|g - G_\sigma(g)\|_p \le c_2(r)\frac{1}{\sigma^r}\left\|g^{(r)}\right\|_p.$$

Доказательство. Необходимость очевидна:

$$\|G_\sigma(f)\|_p \le \|f\|_p + c_1(r)\omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p \le \Big(1+2^r c_1(r)\Big)\|f\|_p$$

и нужно учесть, что для $g \in W_{p,\sigma}$

$$\|g - G_\sigma(g)\|_p \le c_1(r)\omega_r\Big(g;\frac{1}{\sigma}\Big)_p \le c_1(r)\frac{1}{\sigma^r}\big\|g^{(r)}\big\|_p.$$

Достаточность. В силу прямой теоремы (см., напр., [1, 5.1.3] или [3, 4.6.8])

$$A_\sigma(f) = \inf_{g\in W_{p,\sigma}} \|f-g\|_p = \|f-g^*\|_p \le c_2(r)\omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p. \tag{1.1}$$

Тогда, используя два условия теоремы, получаем

$$\begin{aligned}\|f - G_\sigma(f)\|_p &\le \|f-g^*\|_p + \|g^* - G_\sigma(g^*)\|_p + \|G_\sigma(f-g^*)\|_p \\ &\le \|f-g^*\|_p + c_2(r)\frac{1}{\sigma^r}\|(g^*)^{(r)}\|_p + \sup_\sigma \|G_\sigma\|_{L_p\to L_p}\cdot\|f-g^*\|_p.\end{aligned}$$

Ко второму слагаемому применяем усиленное М. Риссом неравенство Бернштейна для производной (см., напр., [3, 8.2.4])

$$\frac{1}{\sigma^r}\|(g)^{(r)}\|_p \le \frac{1}{2^r}\|\Delta^r_{\frac{\pi}{\sigma}}(g)\|_p. \tag{1.2}$$

Получаем, учитывая еще, что $\|\Delta_h^r(f)\|_p \le 2^r\|f\|_p$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma^r}\|(g^*)^{(r)}\|_p &\le \frac{1}{2^r}\Big(\big\|\Delta^r_{\frac{\pi}{\sigma}}(g^*-f)\big\|_p + \big\|\Delta^r_{\frac{\pi}{\sigma}}(f)\big\|_p\Big) \\ &\le \|f-g^*\|_p + \frac{1}{2^r}\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{\sigma}\Big)_p.\end{aligned}$$

Применяем неравенство (1.1) к первому слагаемому, а

$$\omega_r\Big(f;\frac{\pi}{\sigma}\Big) \le (\pi+1)^r\omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big).$$

Теорема доказана. □

Теорема 1.2. *Пусть G_σ — линейный непрерывный оператор $L_p(\mathbb{R}) \to W_{p,\sigma}$ $(p \ge 1)$. Для того чтобы при некотором $r \in \mathbb{N}$ для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$ при $\sigma > 0$ было*

$$\|f - G_\sigma(f)\|_p \ge c_3(r)\omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p$$

необходимо, а если $\sup_\sigma \|G_\sigma\|_{L_p\to L_p} < \infty$, *то и достаточно*

$$\|g - G_\sigma(g)\|_p \geq c_4(r)\frac{1}{\sigma^r}\big\|g^{(r)}\big\|_p$$

для любой функции $g \in W_{p,\sigma}$.

Доказательство. Необходимость следует из того же неравенства М. Рисса (1.2):

$$\|g - G_\sigma(g)\|_p \geq c_3(r)\omega_r\Big(g;\frac{1}{\sigma}\Big)_p \geq \frac{c_3(r)}{(\pi+1)^r}\omega_r\Big(g;\frac{\pi}{\sigma}\Big)_p \\ \geq \frac{c_3(r)}{(\pi+1)^r}\|\Delta^r_{\frac{\pi}{\sigma}}(g)\|_p \geq \frac{2^r c_3(r)}{(\pi+1)^r}\cdot\frac{1}{\sigma^r}\|g^{(r)}\|_p.$$

Для доказательства достаточности выбираем g^* из (1.1). Получаем

$$\omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p \leq \omega_r\Big(f-g^*;\frac{1}{\sigma}\Big)_p + \omega_r\Big(g^*;\frac{1}{\sigma}\Big)_p \leq 2^r\|f-g^*\|_p \\ + \frac{1}{\sigma^r}\|(g^*)^r\|_p \leq 2^r\|f-g^*\|_p + \frac{1}{c_4(r)}\|g^* - G_\sigma(g^*)\|_p,$$

где последнее слагаемое не больше

$$\frac{1}{c_4(r)}\Big(\|g^*-f\|_p + \|f - G_\sigma(f)\|_p + \|G_\sigma(f-g^*)\|_p\Big) \\ \leq \frac{1}{c_4(r)}\Big(1 + \sup_\sigma\|G_\sigma\|_{L_p\to L_p}\Big)\|f-g^*\|_p + \frac{1}{c_4(r)}\|f - G_\sigma(f)\|_p.$$

Осталось учесть, что

$$\|f-g^*\|_p \leq \|f - G_\sigma(f)\|_p.$$

Теорема 1.2 доказана. □

Теорема 1.3. *Пусть* $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, *и* $r \in \mathbb{N}$. *Для того чтобы при* $\sigma \to \infty$ *было*

$$A_\sigma(f)_p = \inf_{g\in W_{p,\sigma}}\|f-g\|_p \asymp \omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p$$

(*двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от* f *и* σ) *необходимо и достаточно, чтобы при* $h \to +0$

$$\omega_r(f;h)_p = O\big(\omega_{r+1}(f;h)_p\big).$$

Доказательство. Необходимость сразу следует из прямой теоремы (см. (1.1)).

Действительно, при $h \in (0,1]$ выбираем σ из условия: $\frac{1}{2\sigma} < h \le \frac{1}{\sigma}$, получаем

$$\omega_r(f;h)_p \le \omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p \le c_5 A_\sigma(f)_p \le c_5 c_2 (r+1)\omega_{r+1}\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p$$
$$\le c_5 c_2 (r+1) 2^{r+1}\omega_{r+1}\Big(f;\frac{1}{2\sigma}\Big)_p \le 2^{r+1} c_5 c_2 (r+1)\omega_{r+1}(f;h)_p.$$

Доказательство достаточности в периодическом случае приведено в [14] и основано на общей обратной теореме теории приближений и свойствах модулей гладкости. Но здесь нет разницы между периодическим и непериодическим случаями (см., напр., [3, 4.6]). Так что доказательство не меняется. □

Следующее предложение является дополнением к теоремам 1.1 и 1.2.

Теорема 1.4. *Пусть*

$$S_\sigma(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\Big(x - \frac{t}{\sigma}\Big)\cdot\frac{\sin t}{t}dt,$$

а

$$G_\sigma(f) = S_\sigma(f) - \beta\Delta^r_{\frac{\alpha}{\sigma}} S_\sigma(f), \qquad (\beta \ne 0, \alpha \in (0,2\pi)).$$

Если $p \in (1,2]$, то

$$\|f - G_\sigma(f)\|_p \asymp \omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p,$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от r, α, β и p).

Если же $p = 1$, то указанная оценка приближения сверху, как в теореме 1.1, имеет место только в случае

$$e^{ir\alpha} = (-1)^r, \qquad \beta = (1 - e^{i\alpha})^{-r}.$$

Доказательство. При $p \in (1,2]$ $W_{p,\sigma} \subset W_{2,\sigma}$ (см. ниже лемму). Поэтому $\widehat{g}(y) = 0$ почти всюду вне $[-\sigma,\sigma]$ и по формуле обращения

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{g}(y)e^{iyx}dy.$$

Но тогда

$$S_\sigma(g;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\Big(x-\frac{t}{\sigma}\Big)\cdot\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{g}(y)e^{ixy}dy\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-it\frac{y}{\sigma}}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{g}(y)e^{ixy}dy=g(x),$$

а

$$g-G_\sigma(g)=\beta\Delta^r_{\frac{\alpha}{\sigma}}g.$$

Применяем более общее неравенство, чем неравенство Рисса (1.2) (см., напр., [3, 8.2.4]): при $\alpha\in(0,2\pi)$

$$\frac{1}{\sigma^r}\|g^{(r)}\|_p\le\Big(\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\Big)^r\|\Delta^r_{\frac{\alpha}{\sigma}}(g)\|_p\le\Big(\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\Big)^r\frac{1}{\sigma^r}\|g^{(r)}\|_p.$$

Следовательно, при таких α и $\beta\ne0$

$$\|g-G_\sigma(g)\|_p\asymp\frac{1}{\sigma^r}\|g^{(r)}\|_p.$$

При $p>1$ по теореме Рисса о проекторах (см., напр., [3, 2.4.3])

$$\|S_\sigma(f)\|_p\le c(p)\|f\|_p.$$

В силу теорем 1.1 и 1.2 при $p\in(1,2]$

$$\|f-G_\sigma(f)\|_p\asymp\omega_r\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p.$$

Другой ответ при $p=1$.

Для указанной оценки приближения сверху (см. теорему 1.1) теперь необходима и достаточна ограниченность по σ норм операторов G_σ.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\Big(x-\frac{t}{\sigma}\Big)\cdot\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\Big(x-\frac{t}{\sigma}\Big)dt\int\limits_{-1}^{1}e^{iut}du$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}du\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\Big(x-\frac{t}{\sigma}\Big)e^{itu}dt=\frac{\sigma}{2}\int\limits_{-1}^{1}du\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{i\sigma(x-v)u}dv$$
$$=\frac{\sigma}{2}\int\limits_{-1}^{1}\widehat{f}(\sigma u)e^{i\sigma xu}du=\frac{1}{2}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{f}(y)e^{iyx}dy.$$

Следовательно,

$$G_\sigma(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{f}(y)\Big(e^{iyx}-\beta\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu\binom{r}{\nu}e^{iy\left(x+\frac{\nu\alpha}{\sigma}\right)}\Big)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{f}(y)e^{ixy}\Big(1-\beta\big(1-e^{i\frac{\alpha}{\sigma}y}\big)^r\Big)dy=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(y)\varphi(y)e^{iyx}dy,$$

где функция-множитель

$$\varphi(y)=1-\beta\big(1-e^{i\frac{\alpha}{\sigma}y}\big)^r\ (|y|\le\sigma),\qquad \varphi(y)=0\ (|y|>\sigma),$$

определяющая мультипликатор, должна принадлежать $B(\mathbb{R})$ (см. [9, теорема 3.14]). И, значит, быть непрерывной, т.е. $\varphi(\pm\sigma)=0$. Но тогда финитная функция $\varphi\in Lip\,1$ и по теореме Бернштейна (см., напр., [3] или [11]) принадлежит $A(\mathbb{R})$.

Так что должно быть, и этого достаточно, $\varphi(\pm\sigma)=0$ или

$$1-\beta\big(1-e^{i\alpha}\big)^r=0,\quad 1-\beta\big(1-e^{-i\alpha}\big)^r=0.$$

Исключая из системы уравнений β и учитывая, что

$$\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}}=-e^{i\alpha},$$

получаем

$$(-1)^re^{i\alpha r}=\Big(\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}}\Big)^r=1,\quad \beta=(1-e^{i\alpha})^r,$$

что и требовалось доказать. □

Далее понадобятся некоторые свойства ЦФЭТ $\le\sigma$.

Лемма 1.1. 1) *Если μ — конечная на $\mathbb{R}$ комплекснозначная мера и $\int_{\mathbb{R}}d\mu=1$, а $f\in L_p(\mathbb{R})$ при некотором $p\in[1,+\infty)$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Big\|f(\cdot)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\cdot-\varepsilon t)d\mu(t)\Big\|_p=0.$$

Это соотношение верно и при $p=\infty$, если f ограничена и равномерно непрерывна. Кроме того, всегда предел равномерно сходящейся последовательности равномерно непрерывных функций из L_p при некотором $p\in(0,+\infty)$ принадлежит $C_0(\mathbb{R})$ ($f(\infty)=\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0$).

2) *При* $0 < p < q \le \infty$ $Wp,\sigma \subset W_{q,\infty}$ (*вложение*), *а при* $p \in [1, +\infty]$ *для любой функции* $g \in W_{p,\sigma}$ *при* $h > 0$

$$\big\|g(\cdot + h) - g(\cdot)\big\|_p \le \sigma\|g\|_p h.$$

В частности, любая функция $g \in W_{p,\sigma}$, $p > 0$, *ограничена и равномерно непрерывна.*

Если $g \in W_{p,\sigma}$ *при* $p \in [1, +\infty]$, *то при любой мере* μ *и*

$$G(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(z - t)d\mu(t) \in W_{p,\sigma}.$$

При $p < \infty$ $W_{p,\sigma} \subset C_0(\mathbb{R})$.

Доказательство. 1) Получаем, используя неравенство Минковского,

$$\left\|f(\cdot) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\cdot - \varepsilon t)d\mu(t)\right\|_p = \left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big[f(\cdot) - f(\cdot - \varepsilon t)\big]d\mu(t)\right\|_p$$

$$\le \left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|f(\cdot) - f(\cdot - \varepsilon t)\big| \cdot d|\mu|\right\|_p \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} d|\mu| \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|f(x) - f(x - \varepsilon t)\big|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega\big(f; |\varepsilon t|\big)_p \cdot d|\mu|.$$

Модуль непрерывности в метрике L_p обладает следующими свойствами:

$$\omega(f; h)_p \le 2\|f\|_p, \qquad \lim_{h\to 0} \omega(f; h)_p = 0.$$

Это при $p < \infty$, а при $p = \infty$ эти соотношения справедливы для функций ограниченных и равномерно непрерывных.

В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости предел правой части приведенного выше неравенства равен нулю.

Последнюю часть утверждения 1) доказываем методом от противного.

Не уменьшая общности, после умножения функции на константу, можно предполагать, что существует последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ с условием: при $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x_n)| \ge 1, \qquad x_{n+1} - x_n \ge 1.$$

Но эта предельная функция f равномерно непрерывна. Поэтому существует $\delta \in \big(0, \frac{1}{2}\big]$, при котором $|f(x)| \ge \frac{1}{2}$ при $x \in \bigcup_{n=1}^\infty [x_n - \delta, x_n +$

$\delta] = E_\delta$. В силу равномерной сходимости к f существует функция $f_1 \in L_p(\mathbb{R}) \cap C$ такая, что при $x \in E_\delta$ $|f_1(x)| \geq \frac{1}{4}$. Но тогда при $p < \infty$

$$\|f_1\|_p^p \geq \int\limits_{E_\delta} |f_1(x)|^p dx \geq \frac{1}{4^p} m E_\delta = \infty.$$

Противоречие.

2) По неравенству Никольского разных метрик ([1–3]) при $g \in W_{p,\sigma}$ и $q > p > 0$

$$\|g\|_q \leq c(p,q)\sigma^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|g\|_p,$$

а по неравенству Бернштейна (см. там же)

$$\|g'\|_p \leq \sigma\|g\|_p.$$

Поэтому

$$\omega(g;h)_p \leq \|g'\|_p h \leq \sigma\|g\|_p h.$$

$G \in L_p$ по неравенству Минковского. Проверим, что G — ЦФЭТ $\leq \sigma$.

Так как $g \in B_\sigma = W_{\infty,\sigma}$, то

$$|g(z)| \leq \|g\|_\infty e^{\sigma|Imz|}$$

(см. [12] или [13]). Поэтому $|G(z)| \leq \|g\|_\infty |\mu|(\mathbb{R}) e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}$ и интеграл сходится равномерно в любой полосе $|\operatorname{Im} z| \leq h$.

Следовательно, G непрерывна на плоскости и интеграл по любому простому замкнутому контуру Γ равен

$$\oint\limits_\Gamma G(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu(t) \oint\limits_\Gamma g(z-t)dz.$$

По теореме Коши интеграл по Γ равен нулю, а по теореме Мореры G — целая функция. $G \in W_{p,\sigma}$.

При $p < \infty$ $W_{p,\sigma} \subset C_0$ в силу 1).

Лемма полностью доказана. □

Порядок приближения целыми функциями можно улучшить следующим образом.

Теорема 1.5. *Если для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, и $\sigma > 0$*

$$\big\|f - \Phi_\sigma(f)\big\|_p \leq K_1 \omega_r\Big(f; \frac{1}{\sigma}\Big)_p,$$

где

$$\Phi_\sigma(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\Big(x-\frac{t}{\sigma}\Big)\widehat{\varphi}(t)dt,$$

а $\varphi\in C(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi\subset[-1,1]$, $\varphi(0)=1$, $\widehat{\varphi}\in L_1(\mathbb{R})$, *то при любом* $m\in\mathbb{N}$

$$\big\|f-\Psi_\sigma(f)\big\|_p\le c(mr)K_1^m\omega_{mr}\Big(f;\frac{1}{\sigma}\Big)_p,$$

где Ψ_σ *определяется аналогично* Φ_σ *функцией* $\psi=1-(1-\varphi)^m$.

Доказательство. Отметим, во-первых, что $\widehat{\varphi}\in W_{1,1}$ и по формуле обращения

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(y)e^{ixy}dy.$$

А так как $\varphi\in A(\mathbb{R})$ (определение см. во введении), то и $\psi\in A(\mathbb{R})$. В силу теоремы умножения (см. [9, теоремы 1.15]), считая $f\in L_1(\mathbb{R})$, получаем

$$\Phi_\sigma(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\varphi\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)\widehat{f}(y)e^{ixy}dy.$$

Искомое неравенство доказываем для функций $f\in L_1\cap L_p$, образующих плотное в $L_p(\mathbb{R})$ множество при $p<\infty$.

Для применения теоремы 1 докажем неравенство ($g\in W_{1,\sigma}$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\bigg\|\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\widehat{g}(y)\Big(1-\varphi\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)\Big)^m e^{ixy}dy\bigg\|_p&\le K_1^m\frac{1}{\sigma^{mr}}\|g^{(mr)}\|_p\\ &=K_1^m\frac{1}{2\pi}\bigg\|\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)^{mr}\widehat{g}(y)e^{ixy}dy\bigg\|_p. \qquad (1.3)\end{aligned}$$

(равенство следует из формулы обращения для g).

При $m=1$ это неравенство следует из условия теоремы ($f=g$).

Положим

$$h_k(y)=\widehat{g}(y)\Big(1-\varphi\Big(\frac{y}{\sigma}\Big)\Big)^k\quad(k\in\mathbb{N}).$$

Если $s\in L_1$, то в силу 2) из леммы свертка $g*s\in W_{p,\sigma}$ и

$$\widehat{g}\cdot\widehat{s}=\widehat{g*s}.$$

В качестве s можно взять h_k.

Определим теперь непрерывную функцию l_k следующим образом, напр.,

$$l_k(y) = \left(\frac{y}{\sigma}\right)^k \ (|y| \le \sigma), \qquad l_k(y) = 0 \ (|y| \ge \sigma + 1)$$

и линейно на двух оставшихся интервалах. По той же причине $\widehat{g} \cdot \widehat{l_k}$ является преобразованием Фурье некоторой функции из $W_{1,\sigma}$.

Так что неравенство (1.3) при $m = 1$ можно применять повторно. После m-кратного применения получим неравенство в общем виде, что и требовалось доказать. $\square$

2. Метод мультипликаторов Фурье

Определим теперь точный порядок приближения индивидуальных функций классическими методами суммирования Бохнера–Рисса, Гаусса–Вейерштрасса, Марцинкевича–Рисса и неклассическим методом Бернштейна.

Мультипликатор M, как оператор, перестановочный со сдвигом, определяется следующим образом. Если φ — ограниченная измеримая функция на $\mathbb{R}^d$, то для $f \in L_p \cap L_2(\mathbb{R}^d),\ p \ge 1$,

$$\widehat{Mf} = \varphi \widehat{f}.$$

Если для всех таких функций

$$\|Mf\|_p \le K \|f\|_p,$$

то $\|M\|_{L_p \to L_p} = \inf K$.

При $p < \infty$ этот оператор продолжается по непрерывности единственным образом на все пространство $L_p(\mathbb{R}^d)$. И при $p = \infty$ оператор M можно продолжить на ограниченные и равномерно непрерывные функции так, как сделано в лемме 1.1 (см. 2)).

Оказалось, что любой такой оператор есть свертка функции с обобщенной функцией медленного роста (см. [9, теорема 3.16 гл. I]). В случае $p = 1$ любой мультипликатор есть свертка функции с конечной борелевской комплекснозначной мерой (см. там же 3.14).

Как установлено недавно (см. [15]), не уменьшая общности, можно считать φ ограниченной и непрерывной почти всюду (по мере Лебега). Поэтому некоторые теоремы гл. VIII из [3] применимы в самом общем случае (см., напр., в [3, 7.1.12, 7.1.14]).

Будем изучать сходимость к f при $\varepsilon \to +0$ интегралов

$$M_\varepsilon(f; x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x - \varepsilon y)\, d\mu(y), \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mu = 1.$$

Достаточное условие сходимости в точках Лебега функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, приведенное в [9, 1.25, гл. I], оказалось и необходимым (см. [3, 8.1.3]).

Заметим, что для $f \in L_1(\mathbb{R})$, используя теорему о свертке, получаем

$$\widehat{M_\varepsilon(f)} = \widehat{d\mu\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big)}\widehat{f}.$$

А если $\operatorname{supp}\widehat{\mu} \subset [-1,1]$, то $M_\varepsilon(f) \in W_{1,\frac{1}{\varepsilon}}$.

Приведем теперь принцип сравнения мультипликаторов.

Теорема А ([8]). *Если $Z(\psi)$ — множество нулей функции $\psi \in C(\mathbb{R}^d)$, а $Z(\widehat{d\mu_2}) \subset Z(\widehat{d\mu_1})$ и $\widehat{d\mu_1} = \widehat{d\mu_{1,2}} \cdot \widehat{d\mu_2}$, то для любого $p \geq 1$*

$$\|f * d\mu_1\|_p \leq K\|f * d\mu_2\|_p,$$

где

$$K = \inf_{\frac{0}{0}} \left\|\frac{\widehat{d\mu_1}}{\widehat{d\mu_2}}\right\|_B = \inf|\mu_{1,2}|(\mathbb{R}^d).$$

(*нижняя грань относится к выбору значений $\widehat{d\mu_{1,2}}$ на $Z(\widehat{d\mu_2})$*).

Функцию $\widehat{d\mu_{1,2}} = \frac{\widehat{d\mu_1}}{\widehat{d\mu_2}}$ будем называть переходной.

Приведем еще один принцип сравнения.

Теорема Б. *I. Если ряд Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^d), \mathbb{T} = [-\pi,\pi]$, записать в виде*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}_k e_k, \qquad e_k = e_k(x) = e^{i(k,x)},$$

а $\varphi_2 \in B(\mathbb{R}^d)$ и $g = \frac{1-\varphi_1}{1-\varphi_2} \in B(\mathbb{R}^d)$, то для всех $f \in L_\infty(\mathbb{T}^d)$ и $\varepsilon > 0$

$$\left\|f - \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\varphi_1(\varepsilon k)\widehat{f}_k e_k\right\|_\infty \leq K\left\|f - \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\varphi_2(\varepsilon k)\widehat{f}_k e_k\right\|_\infty,$$

где $K = \|g\|_B$.

II. А если φ_1 ограничена и непрерывна на $\mathbb{R}^d$ почти всюду, начало координат не является предельной точкой для ее точек разрыва, $\varphi_2 \in A(\mathbb{R}^d)$, $\varphi_2(x) \neq 1$ при $x \neq 0$, то и наоборот, из приведенного неравенства следует, что после исправления в точках разрыва переходная функция $g \in B(\mathbb{R}^d)$.

Для периодических функций эта теорема доказана в [6], II — в теореме 2.2.

Замечание 2.1. Если неравенство теоремы Б доказано с использованием условия
$$g = \frac{1-\varphi_1}{1-\varphi_2} \in B(\mathbb{R}^d),$$
то в силу теоремы А имеет место такое же соотношение между приближениями мультипликаторами интегралов Фурье, определяемыми теми же функциями-множителями φ_1 и φ_2. И сразу в метрике $L_p(\mathbb{R}^d)$ для любого $p \geq 1$. Если же неравенство теоремы Б в метрике $L_p(\mathbb{T}^d)$ для $1 < p < \infty$ доказано с помощью теоремы Марцинкевича, напр., то в силу аналога этой теоремы для интегралов Фурье (С. Михлин) подобное соотношение справедливо и для соответствующих интегралов Фурье при тех же p.

А общие связи (в обе стороны) между мультипликаторами рядов и интегралов Фурье см. [9, п. 3 гл. VII].

Для определения скорости сходимости через модули гладкости рассмотрим удобный для применения принципа сравнения линеаризованный модуль гладкости, введенный для периодических функций еще в [4] (см. также [3, с. 362]).

Если $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $h > 0$, то
$$\widetilde{\omega}_r(f;h)_p = \left\| \frac{1}{h} \int\limits_0^h \Delta_u^r f(\cdot)du \right\|_p = \left\| \int\limits_0^1 \Delta_{hu}^r f(\cdot)du \right\|_p$$
(точная верхняя грань по $u \in (0,h]$ заменена интегральным средним).

Теорема 2.1. *Для любого $r \in \mathbb{N}$ и любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, и $h > 0$*
$$c(r)\omega_r(f;h)_p \leq \widetilde{\omega}_r(f;h)_p \leq \omega_r(f;h)_p.$$

Доказательство. Правое неравенство в теореме очевидно (неравенство Минковского).

Для доказательства левого неравенства нужно проверить, что
$$c(r) \sup_{\theta\in(0,1]} \left\|\Delta_{\theta h}^r f(\cdot)\right\|_p \leq \left\| \int\limits_0^1 \Delta_{hu}^r f(\cdot)du \right\|_p.$$

Применяем теорему А. Имеем
$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{\nu=0}^r (-1)^\nu \binom{r}{\nu} f(x+\nu h) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)d\mu_1(t),$$

где (δ — δ-функция Дирака)

$$d\mu_1(t) = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \delta(t - \nu h) dt,$$

$$\widehat{d\mu_1}(y) = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \delta(t - \nu h) dt$$
$$= \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} e^{-i\nu hy} = \left(1 - e^{-ihy}\right)^r,$$

а

$$\int\limits_0^1 \Delta_{\theta h}^r f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t) d\mu_2(t),$$

где $\widehat{d\mu_2}(y) = \int_0^1 \left(1 - e^{-i\theta hy}\right)^r d\theta$.

Нужно проверить, что

$$\sup_{\theta \in (0,1]} \sup_h \left\| \frac{1 - e^{-i\theta hy}}{\int_0^1 \left(1 - e^{-iuhy}\right)^r du} \right\|_B < \infty.$$

Но эта величина не зависит от h, так как при $\lambda \neq 0$

$$\left\| f(\lambda \cdot) \right\|_B = \| f(\cdot) \|_B.$$

Считаем далее $h = 1$.

Знаменатель дроби равен нулю, и это главное, только при $y = 0$ (см. лемму в [3, 8.3.5]), а сама дробь имеет в нуле устранимую особенность.

B — это банахова алгебра с локальным свойством.

Очевидно, что на любом отрезке прямой L_2-норма дроби, как и ее производной, ограничена по y и $\theta \in (0, 1]$. По обобщенной теореме Бернштейна (см., напр., [3, 6.4.3]) эта дробь принадлежит алгебре A в любой окрестности нуля и ее норма в A ограничена по θ (после, напр., линейного продолжения).

Предел знаменателя при $|y| \to \infty$ в силу леммы Римана–Лебега равен единице. Представим дробь вне окрестности нуля в виде произведения

$$\left(1 - e^{-i\theta u}\right)^r \cdot \frac{1}{\int_0^1 \left(1 - e^{-iuy}\right)^r du}.$$

Очевидно, что $1-e^{-i\theta u}\in B(\mathbb{R})$, как и весь первый множитель, с нормой в B, ограниченной по $\theta\in(0,1]$.

А второй множитель после вычитания единицы принадлежит L_2 вне любой окрестности нуля, как и его производная. В силу признака Берлинга, напр., (см., [11, 5.3, с. 20]) этот множитель принадлежит B локально.

Так что искомое неравенство и теорема 2.1 доказаны. □

Приведем еще стандартный пример для сравнения.

Теорема 2.2. *Определим φ_r при четном и нечетном r, соответственно,*

$$\varphi_r(x)=\bigl(1-|x|^r\bigr)_+,\quad \varphi_r(x)=\bigl(1-|x|^{r+1}\bigr)_+ +i\bigl(1-|x|\bigr)_+|x|^r sign\ x.$$

Тогда для любой функции $f\in L_p(\mathbb{R}),p\ge 1,$ и $\varepsilon\in(0,1]$

$$\left\|f(\cdot)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\cdot-\varepsilon t)\widehat{\varphi}_r(t)dt\right\|_p\asymp\omega_r(f;\varepsilon)_p.$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими лишь от r).

Для доказательства применяем теорему А, заменяя ω_r на $\widetilde{\omega}_r$ (см. теорему 2.1 и ее доказательство). А константы не зависят от p, так как норма оператора-мультипликатора в $L_p, p>1$, не больше его нормы в L_1 (см. [9, гл. I, 3.20] или [3]).

В обозначениях теоремы 1.5 средние Гаусса–Вейерштрасса определим следующим образом

$$G_{\varepsilon,\alpha}(f)=\Phi_{\frac{1}{\varepsilon}}(f),\quad \varphi(x)=e^{-|x|^\alpha}\ (\alpha>0)$$

Сходимость при $\varepsilon\to+0$ и $\alpha=1$ и 2 изучена в [9, гл. I, 1.18].

Определим точный порядок приближения (определение Δ_h — во введении).

Теорема 2.3. *При любом $p\in[1,+\infty]$, $\alpha>0$, $\varepsilon>0$ и натуральном $r>\frac{1}{2}(\alpha+d-1)$*

$$\bigl\|f-G_{\varepsilon,\alpha}(f)\bigr\|_p\asymp\left\|\int\limits_{|u|\ge 1}\frac{1}{|u|^{r+\alpha}}\dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}\cdot u}f(\cdot)du\right\|_p$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими лишь от α и r).

Доказательство. Достаточно доказать, что при $R_{\varepsilon,\alpha}(f) = \Phi_{\frac{1}{\varepsilon}}(f)$, $\varphi(x) = (1-|x|^\alpha)_+$, $\alpha > 0$

$$\big\|f - G_{\varepsilon,\alpha}(f)\big\|_p \asymp \big\|f - R_{\varepsilon,\alpha}(f)\big\|_p, \tag{2.1}$$

а точный порядок приближения средними Рисса $R_{\varepsilon,\alpha}$ найден ранее ([16, теорема 1]) в случае рядов Фурье.

В одном из двух случаев неравенства (2.1) переходная функция

$$g(x) = g_0(|x|), \qquad g_0(t) = \frac{1-e^{-|t|^\alpha}}{|t|^\alpha}, \qquad g_0(0) = 1.$$

Радиальным функциям (и квазирадиальным) в обзоре [11] посвящен целый п. 8. Если радиальная функция принадлежит $A(\mathbb{R}^m)$ при $m > d$, то она принадлежит и $A(\mathbb{R}^d)$.

К функции $g-1$ применим при нечетном $m > d$ следующую теорему (см. [3, 6.3.6]).

Теорема B. *Если m — нечетное число, $m \geq 3$, то для того чтобы радиальная функция $f(x) = f_0(|x|)$ принадлежала $A(\mathbb{R}^m)$ необходимо и достаточно, чтобы при целых $\nu \in \left[0, \frac{m-3}{2}\right]$*

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}\Big\{t^{\frac{m}{2}-1} f_0(\sqrt{t})\Big\}_{t=0} = 0$$

и функция

$$\sqrt{t}\frac{d^{\frac{m-1}{2}}}{dt^{\frac{m-1}{2}}}\Big\{t^{\frac{m-1}{2}} f_0(\sqrt{t})\Big\}$$

после замены t на t^2 принадлежала $A(\mathbb{R})$.

Простые вычисления опускаем.

К функции $\frac{1}{g}$ (в другом случае неравенства (2.1)) можно применить эту же теорему B. Но проще воспользоваться $\frac{1}{f}$-теоремой Винера (см., напр., [3, 11]). □

Определим теперь точный порядок приближения средними типа Бохнера–Рисса интегралов Фурье.

Пусть при $r \in \mathbb{N}$, $\delta > \frac{1}{2}(d-1)$ и $\varepsilon > 0$ в обозначениях теоремы 1.5

$$R_{\varepsilon,r,\delta}(f) = \Phi_{\frac{1}{\varepsilon}}(f), \qquad \varphi(x) = (1-|x|^{2r})_+^\delta.$$

В следующей теореме, как и в периодическом случае, используется специальный модуль гладкости и K-функционал.

Теорема 2.4. 1) *При любом* $p \geq 1$ (Δ — *оператор Лапласа*)

$$\left\|f - R_{\varepsilon,r,\delta}(f)\right\|_p \asymp \left\| \int\limits_{|u|\leq 1} \dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon u} f(\cdot) du \right\|_p$$
$$\asymp \inf_{g \in W^r_p(\mathbb{R}^d)} \Big(\|f-g\|_p + \varepsilon^{2r} \|\Delta^r g\|_p \Big).$$

2) *При* $p \in (1, +\infty)$ *для любой* $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *и* $\varepsilon \in (0,1]$

$$\left\|f - R_{\varepsilon,r,\delta}(f)\right\|_p \asymp \sup_{|u|\leq 1} \left\| \dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon u} f(\cdot) \right\|_p.$$

Доказательство. Общая схема одновременного вывода формул с модулем гладкости и K-функционалом приведена в [3, с. 371]. В случае периодических функций и рядов Фурье доказательство теоремы 2.4 имеется в [3, теоремы 8.2.8a, 8.2.9, 8.3.2]).

Для функции $f \in L_2 \cap L_p(\mathbb{R}^d)$

$$\dot{\Delta}^{2r}_h f(x) = \dot{\Delta}^{2r}_h \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^d \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y) e^{i(x,y)} dy$$
$$= \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^d (-2i)^{2r} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y) \sin^{2r}(y,h) e^{i(x,y)} dy.$$

Переходные функции при применении принципа сравнения одни и те же и, значит, можно воспользоваться замечанием (см. выше). $\square$

Рассмотрим теперь в том же смысле следующие средние двойных интегралов Фурье ($d = 2,\ \alpha > 0$)

$$M_{\varepsilon,\alpha}(f) = \Phi_\varepsilon(f), \qquad \varphi(x_1, x_2) = \big(1 - \max\{|x_1|, |x_2|\}\big)^\alpha_+.$$

При $\alpha = 1$ этот метод суммирования двойных рядов Фурье изучал Марцинкевич (это средние арифметические квадратных частных сумм).

Теорема 2.5. *При любом* $\alpha > 0$ *для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{R}^2),\ p \geq 1$, $\varepsilon \in (0,1]$

$$\left\|f - M_{\varepsilon,\alpha}(f)\right\|_p \asymp \left\| \int\limits_1^\infty \frac{1}{u^2} \Big(\dot{\Delta}^2_{\varepsilon u(e^\circ_1 + e^\circ_2)} + \dot{\Delta}^2_{\varepsilon u(e^\circ_1 - e^\circ_2)} \Big) f(\cdot) du \right\|_p,$$

$$\big\|f - M_{\varepsilon,\alpha}(f)\big\|_p \asymp \inf_g \big(\|f-g\|_p + \varepsilon\|d(g)\|_p\big),$$

где e_1° и e_2° — орты осей $\mathbb{R}^2$ и для гладких функций

$$d(f;x) = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(y)\max\{|y_1|,|y_2|\}e^{i(x,y)}dy.$$

Константы зависят лишь от α.

Доказательство. В случае рядов Фурье с помощью принципа сравнения и новой теоремы о принадлежности $A(\mathbb{R}^2)$ в [17] доказано, что порядок приближения целыми функциями $M_{\varepsilon,\alpha}$ не зависит от $\alpha > 0$. А при $\alpha = 1$ первое соотношение доказано О. И. Кузнецовой ([16, теорема 3]). И нужно воспользоваться замечанием.

Второе соотношение (через K-функционал) для рядов Фурье имеется в [17]. Заканчивается доказательство как и ранее. □

И, наконец, рассмотрим интегральный оператор $L_p \to W_{p,\sigma}$

$$B_{r,\varepsilon}(f;x) = \gamma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(f(x) - \Delta_{\varepsilon t}^r f(x)\big)\Big(\frac{\sin\frac{t}{r+2}}{t}\Big)^{r+2}dt, \qquad B_{r,\varepsilon}(1;x) \equiv 1.$$

(Определение $\Delta_h^1 f(\cdot)$ — в конце введения) $d = 1$.

В [18] введены более общие средние, а общая оценка приближения сверху этими средними через ω_r доказана в [19] (см. также [1, теорема 5.1.31]).

Особенность мультипликатора $B_{r,\varepsilon}$ в том, что $\varphi = \varphi_\varepsilon$ (зависит от ε) и, а это главное, $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ не только при $x = 0$.

Поэтому в [20] для определения точного порядка приближения введен специальный модуль гладкости, так как ω_r не подходит. Положим здесь, как и в периодическом случае в [20], при $t \neq 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$

$$\Delta_{h,t}f(x) = \int\limits_0^1 \Big[f(x) - \frac{it}{e^{it}-1}f(x+hu)\Big]du.$$

Теорема 2.6. *Пусть $r \geq 6$, $2 \leq s \leq r-2$ и $s_1 = 2\big[\frac{s+1}{2}\big]$ (целая часть), а $\{x_{k,\varepsilon}\}_{k=1}^q$ — все положительные корни уравнения $\varphi_\varepsilon(x) - 1 = 0$. Тогда существует $\delta(r) > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \delta(r)$ число q постоянное, $q \leq s_1$ и для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$,*

$$\big\|f - B_{r,\varepsilon}(f)\big\|_p \asymp \Big\|\Delta_{\varepsilon,0}^{s_1} \circ \prod_{k=1}^q \Delta_{\varepsilon,x_{k,\varepsilon}} \circ \Delta_{\varepsilon,-x_{k,\varepsilon}} f(\cdot)\Big\|_p$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от f и ε).

Доказательство выводится из случая периодических функций по той же схеме.

Литература

[1] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, М.: Физматгиз, 1960, 624 с.

[2] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М.: Наука, 1977, 456 с.

[3] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of functions*, Kluwer-Springer, 2004, 585 p.

[4] Р. М. Тригуб, *Конструктивные характеристики некоторых классов функций* // Изв. АН СССР, сер. мат., **29** (1965), No. 3, 615–630.

[5] Р. М. Тригуб, *Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье* // Изв. АН СССР, сер. мат., **32** (1968), No. 1, 24–49.

[6] Р. М. Тригуб, *Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе* // Изв. АН СССР, сер. мат., **44** (1980), No. 6, 1378–1409.

[7] B. R. Draganov, *Exact estimates of the rate of approximation of convolution operators* // Journal Appr. Theory, **162** (2010), 952–979.

[8] H. S. Shapiro, *Some Tauberian teorems with applications to approximation theory* // Bull. Amer. Math. Soc., **74** (1968), 499–504.

[9] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, М: Мир, 1974, 332 с.

[10] Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов, *Лекции по вещественному анализу.* Учебник, С.-Петербург: БХВ–Петербург, 2011, 688 с.

[11] E. Liflyand, S. Samko, R. Trigub, *The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview* // Analysis and Math.Physics, Springer, **2** (2012), No. 1, 1–68.

[12] B. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, Transl. Math. Monogr., **150**, AMS, Providence, R.I., 1996, 248 p.

[13] О. В. Котова, Р. М. Тригуб, *Аппроксимативные свойства суммирования интегралов Фурье* // Допов. НАН Украiни, (2015), No. 1, 13–19.

[14] R. K. S. Rathore, *The problem of A. F. Timan on the precise order of decrease of the best approximation* // J. Appr. Theory., **77** (1994)), 153–166.

[15] В. В. Лебедев, А. М. Олевский, *L_p–мультипликаторы Фурье с ограниченными степенями* // Изв. РАН, сер. мат., **70** (2006), No. 3, 129–166.

[16] О. И. Кузнецова, Р. М. Тригуб, *Двусторонние оценки приближения функций средними Рисса и Марцинкевича* // Докл. АН СССР, **251** (1980), No. 1, 34–36.

[17] О. В. Котова, Р. М. Тригуб, *Новое достаточное условие принадлежности алгебре абсолютно сходящихся интегралов Фурье и его применение к вопросам суммируемости двойных рядов Фурье* // Укр. матем. ж., **67** (2015), No. 8.

[18] С. Н. Бернштейн, *О свойствах однородных функциональных классов* // Докл. АН СССР, сер. мат., **47** (1947), No. 2, 111–114.

[19] С. Б. Стечкин, *О порядке наилучших приближений непрерывных функций* // Изв. АН СССР, с.м., **15** (1951), No. 3, 219–242.

[20] Р. М. Тригуб, *Точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина* // Матем. сб., **204** (2013), No. 12, 127–146.

Сведения об авторах

Ольга Викторовна Котова
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры
E-Mail: `butkot83@mail.ru`

Роальд Михайлович Тригуб
Сумской государственный университет
E-Mail: `roald.trigub@gmail.com`