Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 2, 243 – 256

# Властивості псевдоквазінеперервності

Василь В. Нестеренко

(*Представлена М. М. Маламудом*)

**Анотація.** В [17] встановлено, що поняття псевдоквазінеперервності та простої неперервності означають одне і теж ослаблення неперервності. Крім огляду відомих результатів про псевдоквазінеперервність, подано ряд нових властивостей цього поняття.

**2010 MSC.** 54C08, 26B05.

**Ключові слова та фрази.** Псевдоквазінеперервність, квазінеперервність, кліковість, проста неперервність, майже неперервність, точкова розривність.

## Вступ

За останні сто років було введено велику кількість різних ослаблень неперервності. Оскільки вони вводилися різними авторами, то деякі з них означають одну і ту ж властивість відображення, принаймні для деяких типів просторів. Так в [12] Кемпістий увів поняття квазінеперервності, а в [7] Бледзой вивчав еквівалентну властивість. Пізніше Левін в [13] увів поняття напівнеперервності, яке, як показано в [16], еквівалентне квазінеперервності.

У зв'язку з вивченням точок сукупної неперервності відображень $f : X \times Y \to Z$ в [15] виникло поняття псевдо- квазінеперервності знизу многозначного відображення. Там було встановлено, що кожне квазінеперервне знизу многозначне відображення є псевдоквазінеперервним знизу. Аналог поняття псевдоквазінеперервності знизу для однозначних відображень привів до відомого поняття простої неперервності [6].

В цій роботі досліджуються властивості псевдоквазі-неперервності однозначних відображень. Буде проведено огляд результатів, які пов'язані з псевдоквазінеперервінстю (= простою неперервністю). Також будуть вивчені нарізні і сукупні властивості псевдоквазінеперервності відображень від двох змінних.

*Стаття надійшла в редакцію* 24.04.2015

ISSN 1810 – 3200. 

## 1. Основні поняття

Відображення $f : X \to Y$ між двома топологічними просторами $X$ та $Y$ називається *точково розривним*, якщо множина $C(f)$ точок непрервності відображення $f$ є всюди щільна в $X$. Нехай $X$ — топологічний простір, $Y$ — метричний простір. Позначимо через $\omega_f(A)$ коливання функції $f$ на множині $A$. Функція $f : X \to Y$ називається *кліковою в точці* $x$ [18], якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного околу $U$ точки $x$ в $X$ існує відкрита непорожня множина $G$, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_f(G) < \varepsilon$, і просто *кліковою*, якщо вона є такою в кожній точці. Добре відомо [18], що коли простір $X$ берівський, то кожна клікова функція $f : X \to Y$ є точково розривною.

Нехай тепер $Y$ — довільний топологічний простір. Відображення $f$ називається *квазінеперервним у точці* $x \in X$ [12, 14], якщо для кожного околу $V$ точки $y = f(x)$ в $Y$ і для кожного околу $U$ точки $x$ в $X$ існує відкрита непорожня множина $G$, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Якщо відображення $f$ квазінеперервне у кожній точці $x \in X$, то воно називається *квазінеперервним*. Легко бачити, що кожне квазінеперервне відображення зі значеннями в метричному просторі є кліковим. Обернене твердження не вірне.

Добре відомою є наступна характеризація квазінеперервності (див. [19]).

**Теорема 1.1.** *Нехай $X$ і $Y$ — топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ буде квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої непорожньої множини $U$ в $X$ та щільної в $U$ множини $E$ маємо, що $f(U) \subseteq \overline{f(E)}$.*

Відображення $f : X \to Y$ називається *псевдоквазінеперервним*, якщо для довільної відкритої множини $U$ в $X$ та довільної множини $E$ в $X$, такої, що $U \subseteq \overline{E}$ існує відкрита непорожня множина $G$ в $X$, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq \overline{f(E)}$.

З теореми 1.1 легко випливає наступний результат.

**Наслідок 1.1.** *Нехай $X$ і $Y$ — топологічні простори і $f : X \to Y$ — квазінеперервне відображення. Тоді відображення $f$ псевдоквазінеперервне.*

Обернене твердження не вірне.

**Приклад 1.1.** Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ при $x \neq 0$ і $f(0) = 1$, не є квазінеперервною в точці $x = 0$, однак вона псевдоквазінеперервна.

## 2. Зв'язки між різними аналогами точкової розривності

**Теорема 2.1.** *Нехай $X$ — топологічний простір, простір $Y$ задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ — псевдоквазінеперервне відображення. Тоді множина $D(f)$ точок розриву функції $f$ першої категорії.*

*Доведення.* Будемо міркувати від супротивного. Нехай множина $D(f)$ другої категорії в $X$. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база простору $Y$. Через $\mathcal{U}_x$ позначимо систему околів точки $x \in X$.

Для кожного номера $n$ розглянемо множини

$$A_n = \{x \in D(f) : (f(x) \in V_n)(\forall U \in \mathcal{U}_x)(\exists u_x \in U)(f(u_x) \subseteq Y \setminus V_n)\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = D(f)$. Оскільки множина $D(f)$ другої категорії, то існує номер $m$, такий, що множина $A_m$ десь щільна в $X$. Нехай $A_m$ щільна в деякій відкритій непорожній множині $U$, тобто $U \subseteq \overline{A_m}$.

Розглянемо множину $E = \{x \in U : f(x) \in Y \setminus V_m\}$. Покажемо, що множина $E$ щільна в $U$. Візьмемо довільну відкриту множину $U'$ в $X$, таку, що $U' \subseteq U$. Оскільки множина $A_m$ щільна в $U$, то існує точка $x' \in U' \cap A_m \subseteq D(f)$. З визначення множини $A_m$ і того, що $U'$ є околом точки $x'$ випливає, що існує точка $u_{x'} \in U'$, така, що $f(u_{x'}) \in Y \setminus V_m$. Таким чином, $u_{x'} \in U' \cap E$.

З псевдоквазінеперервності відображення $f$ випливає, що існує відкрита непорожня множина $G$ в $X$, така, що $G \subseteq U$ і

$$f(G) \subseteq \overline{f(E)} \subseteq \overline{Y \setminus V_m} = Y \setminus V_m.$$

Візьмемо довільну точку $a \in G \cap A_m$. Оскільки $a \in A_m$, то $f(a) \in V_n$. З іншого ж боку $f(a) \in f(G) \subseteq Y \setminus V_m$. Одержали суперечність. Наше припущення хибне, отже, множина $D(f)$ першої категорії. □

Як наслідок одержуємо наступний результат.

**Теорема 2.2.** *Нехай $X$ — берівський простір, простір $Y$ задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ — псевдоквазінеперервне відображення. Тоді відображення $f$ точково розривне.*

**Наслідок 2.1.** *Нехай $X$ — берівський простір, $Y$ — метричний сепарабельний простір і $f : X \to Y$ — псевдоквазінеперервна функція. Тоді функція $f$ клікова.*

*Доведення.* Оскільки точково розривна функція є кліковою, то з теореми 2.2 випливає, що функція $f$ є кліковою. □

В [6, приклад 2] показано, що умова беровості простору $X$ в наслідку 2.1 є істотною.

Позначимо через $Q(f)$ множину точок квазінеперервності відображення $f : X \to Y$. Зрозуміло, що $Q(f) \supseteq C(f)$.

**Наслідок 2.2.** *Нехай $X$ — топологічний простір, простір $Y$ задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ — псевдоквазінеперервне відображення. Тоді множина $X \backslash Q(f)$ першої категорії. Якщо до того ж простір $X$ берівський, то множина $Q(f)$ всюди щільна в $X$.*

Обернене твердження не вірне.

**Приклад 2.1.** Нехай $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел. Визначимо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $C(f) = Q(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, але $f$ не є псевдоквазінеперервною.

Оскільки функція з прикладу 2.1 є функцією першого класу Бера (поточковою границею неперервних функцій), то це означає, що не кожна функція першого класу Бера є псевдоквазінеперервною.

В [17, теорема 3.3] встановлено наступний результат.

**Теорема 2.3.** *Нехай $X$ і $Y$ — топологічні простори, $f : X \to Y$ — відображення і множина $X \setminus Q(f)$ ніде не щільна в $X$. Тоді відображення $f$ псевдоквазінеперервне.*

Обернене твердження не вірне. Це слідує з наступного прикладу, який подано в [6, приклад 1].

**Приклад 2.2.** Нехай $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел. Визначимо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \\ x, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Функція $f$ є псевдоквазінеперервною і $\mathbb{R} \setminus Q(f) = \mathbb{R} \setminus C(f) = \mathbb{Q}$.

Відображення $f$ називається *ледь неперервним у точці* $x \in X$ [9], якщо для кожного околу $V$ точки $f(x)$ в $Y$ існує відкрита непорожня множина $G$ в $X$, така, що $f(G) \subseteq V$. Позначимо через $L(f)$ множину точок ледь неперервності відображення $f$.

**Теорема 2.4.** *Нехай $X$ — берівський простір, простір $Y$ задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ — псевдоквазінеперервне відображення. Тоді множина $X \setminus L(f)$ ніде не щільна в $X$.*

*Доведення.* Припустимо, що множина $E = X \setminus L(f)$ щільна в деякій відкритій непорожній множині $U$ в $X$. З теореми 2.2 випливає, що множина $C(f)$ теж щільна в $U$. Тоді згідно з псевдоквазінеперервністю функції $f$ маємо, що існує відкрита непорожня в $X$ множина $G$, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq \overline{f(C(f))}$. Візьмемо довільну точку $x \in E \cap G$ і будь-який її відкритий окіл $V$ в $Y$. Тоді $V \cap f(C(f)) \neq \varnothing$. Отже, існує точка $x_0 \in C(f)$ та її окіл $U_0$, такі, що $f(x_0) \in V$ і $f(U_0) \subseteq V$. Це суперечить тому, що відображення $f$ не є ледь неперервним в точці $x$. Отже, припущення про десь щільність множини $E$ є хибним. □

Підмножина $A$ простору $X$ називається *$s$-відкритою* [1], якщо $A = U \cup N$, де $U$ — відкрита множина в $X$, а множина $N$ ніде не щільна. Ця умова рівносильна тому, що $int\overline{fr(A)} = \varnothing$, де $fr(A)$ означає межу множини $A$. Відображення $f : X \to Y$ називається *просто неперервним* [1], якщо для довільної відкритої множини $V$ в $Y$ множина $f^{-1}(V) = U \cup N$ є $s$-відкритою.

Наступний результат показує, що псевдоквазінеперервність та проста неперервність означають одну і ту ж властивість відображення. Цей результат встановлено в [17, теорема 3.2]. Через важливість цього результата ми тут подамо його з доведенням.

**Теорема 2.5.** *Нехай $X$ і $Y$ — топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ буде псевдоквазінеперервним тоді і тільки тоді, коли воно просто неперервне.*

*Доведення. Необхідність.* Нехай відображення $f$ псевдоквазінеперервне, але не є просто неперервним. Оскільки відображення $f$ не є просто неперервним, то існує відкрита непорожня множина $V$ в $Y$, така, що множина $fr(f^{-1}(V))$ щільна в деякій відкритій непорожній множині $U$ в $X$. Тоді $fr(f^{-1}(V)) = \overline{fr(f^{-1}(V))} \supseteq U$. Оскільки

$$fr(f^{-1}(V)) = \overline{f^{-1}(V)} \cap \overline{X \setminus f^{-1}(V)},$$

то $\overline{f^{-1}(V)} \supseteq U$ і $\overline{X \setminus f^{-1}(V)} \supseteq U$. З псевдоквазінеперервності $f$ випливає, що існує відкрита непорожня множина $G$ в $X$, така, що $G \subseteq U$ і

$$f(G) \subseteq \overline{f(X \setminus f^{-1}(V))} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

З іншого боку $f(G) \cap V \neq \varnothing$, бо $\overline{f^{-1}(V)} \supseteq U$ і $G \subseteq U$. Одержана суперечність завершує доведення необхідності.

*Достатність.* Нехай відображення $f$ просто неперервне, але не є псевдоквазінеперервним. Тоді існує відкрита непорожня множина $U$ в $X$ і щільна в $U$ множина $E$, така, що для довільної відкритої непорожньої множини $G \subseteq U$ існує точка $x_G \in G$, така, що $x_G \notin \overline{f(E)}$. Розглянемо відкриту множину $V = Y \setminus \overline{f(E)}$ і множину $A = \{x_G : G$ — відкрита множина, яка міститься в $G\}$. Тоді $\overline{A} \supseteq U$ і $A \cap E = \varnothing$. Оскільки відображення $f$ просто неперервне, то множина

$$fr(f^{-1}(V)) = \overline{f^{-1}(V)} \cap \overline{X \setminus f^{-1}(V)}$$

ніде не щільна. Однак $f^{-1}(V) \supseteq A$ і тому $\overline{f^{-1}(V)} \supseteq \overline{A} \supseteq U$. Крім того, $X \setminus f^{-1}(V) \supseteq E$ і $\overline{X \setminus f^{-1}(V)} \supseteq \overline{E} \supseteq U$. Отже, $fr(f^{-1}(V)) \supseteq U \neq \varnothing$, що неможливо, бо множина $fr(f^{-1}(V))$ ніде не щільна. Отже припущення не вірне. □

**Теорема 2.6.** *Якщо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має замкнений графік, то вона псевдоквазінеперервна.*

*Доведення.* Добре відомо [2], що множина $D(f)$ ніде не щільна. Тоді згідно з теоремою 2.3 функція $f$ є псевдоквазінеперервною. □

**Теорема 2.7.** *Існує монотонна функція $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не є псевдоквазінеперервною.*

*Доведення.* Покладемо $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Розглянемо функції $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які визначені так:

$$f(x) = \sum_{r_n \le x} 2^{-n},$$

$$g(x) = \begin{cases} 2^{-n-1}, & x = r_n \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

і $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. В [10] показано, що функція $f$ монотонно зростає і неперервна справа (отже, квазінеперервна). Функцію $h$ можна записати так:

$$h(x) = \begin{cases} \sum\limits_{r_m < x} 2^{-m} + 2^{-n-1}, & x = r_n \in \mathbb{Q}, \\ \sum\limits_{r_m < x} 2^{-m}, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функція $h$ строго зростає і при цьому вона не є квазінеперервною в кожній точці з $\mathbb{Q}$. Розглянемо відкриту множину

$$V = \bigcup_{n=1} \Big( \sum_{r_k < r_n} 2^{-k}, \sum_{r_k \le r_n} 2^{-k} \Big).$$

Тоді множина $h^{-1}(V) = \mathbb{Q}$ не є $s$-відкритою. Отже, $h$ не є псевдоквазінеперервною. □

## 3. Декомпозиція неперервності

Під декомпозицією неперервності розуміють теореми, в яких встановлюється неперервність функції при виконанні кількох інших умов.

Відображення $f : X \to Y$ називається *майже неперервним в точці* $x \in X$ [11], якщо для будь-якого околу $V$ точки $y = f(x)$ в $Y$ існує множина $A$ в $X$, така, що $\overline{A}$ — окіл точки $x$ в $X$ і $f(A) \subseteq V$. Якщо відображення майже неперервне в кожній точці, то воно називається *майже неперервним.*

**Теорема 3.1.** *Нехай $X$ — топологічний простір, $Y$ — регулярний простір. Тоді відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли $f$ майже неперервне і псевдоквазінеперервне.*

*Доведення.* Необхідність очевидна. Доведемо достатність. Будемо міркувати від супротивного. Нехай відображення $f$ не є неперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Оскільки простір $Y$ регулярний, то існує замкнений окіл $V_0$ точки $f(x_0)$ в $Y$, такий, що для довільного околу $U$ точки $x_0$ в $X$ маємо, що $f(U) \nsubseteq V_0$. Оскільки відображення $f$ майже неперервне в точці $x_0$, то існують окіл $U_0$ точки $x_0$ в $X$ і щільна в $U_0$ множина $A_0$, такі, що $f(A_0) \subseteq V_0$. З розривності відображення $f$ в точці $x_0$ випливає, що існує точка $x_1 \in U_0$, така, що $f(x_1) \notin V_0$, тобто $f(x_1) \in Y \setminus V_0$. Оскільки відображення $f$ майже неперервне в точці $x_1$ і множина $Y \setminus V_0$ є околом точки $f(x_1)$, то існує множина $A_1$, така, що $x_1 \in \operatorname{int} \overline{A_1}$, $A_1 \subseteq U_0$ і $f(A_1) \subseteq Y \setminus V_0$. Скористаємося псевдоквазінеперервністю відображення $f$. Оскільки $\operatorname{int} \overline{A_1} \subseteq \overline{A}$, то існує відкрита непорожня множина $G \subseteq \operatorname{int} \overline{A_1} \cap \overline{A}$, така, що $f(G) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{V_0} \subseteq V_0$. Оскільки $G \subseteq \operatorname{int} \overline{A_1}$, то існує точка $a \in G \cap A_1$. З того, що $a \in A_1$ випливає, що $f(a) \in Y \setminus V_0$. Оскільки $f(G) \subseteq V_0$, то одержуємо суперечність. Отже, відображення $f$ неперервне. □

Відображення $f$ називається *майже квазінеперервним у точці* $x \in X$ [5], якщо для кожного околу $V$ точки $y = f(x)$ в $Y$ і для кожного околу $U$ точки $x$ в $X$ існує множина $A$ в $X$, така, що $A \subseteq U$, $\operatorname{int} \overline{A} \neq \varnothing$ і $f(A) \subseteq V$, і просто *майже квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці.

**Теорема 3.2.** *Нехай $X$ і $Y$ — топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли $f$ майже квазінеперервне і псевдоквазінеперервне.*

*Доведення.* Необхідність випливає з теореми 1.1 і очевидного факту про те, що квазінеперервне відображення є майже квазінеперервним.

Встановимо достатність. Розглянемо довільну точку $x \in X$, довільний окіл $U$ точки $x$ та довільний відкритий окіл $V$ точки $f(x)$ в просторі $Y$. Оскільки відображення $f$ майже квазінеперервне в точці $x$, то існує множина $A$ в $X$, така, що $A \subseteq U$, $\operatorname{int} \overline{A} \neq \varnothing$ і $f(A) \subseteq V$. Покладемо $U_0 = \operatorname{int} \overline{A}$. Зрозуміло, що $U_0 \subseteq U$.

Покажемо, що існує відкрита непорожня множина $G$ в $X$, така, що $G \subseteq U_0$ і $f(G) \subseteq V$. Нехай це не так. Тоді існує щільна в $U_0$ множина $E$, така, що $f(E) \subseteq Y \setminus V$. Згідно з псевдоквазінеперервністю відображення $f$ існує відкрита непорожня множина $G_0$ в $X$, така, що $G_0 \subseteq \overline{E}$ і $f(G_0) \subseteq \overline{f(E)}$. Тоді

$$f(G_0) \subseteq \overline{f(E)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Однак $G_0 \cap A \neq \varnothing$ і тому існує точка $a \in G_0 \cap A$. Тоді з одного боку $f(a) \in V$, бо $a \in A$, а з іншого боку $f(a) \in Y \setminus V$, бо $a \in G_0$. Одержали суперечність. Отже, існує відкрита непорожня множина $G$ в $X$, така, що $G \subseteq U_0 \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Це означає, що відображення $f$ квазінеперервне в точці $x$. □

## 4. Арифмитичні і ґраткові операції та збіжність псевдоквазінеперервних функцій

Сума двох псевдоквазінеперервних функцій не зобов'язана бути псевдоквазінеперервною (див. [4, лема 2]. Більше того, сума неперервної і псевдоквазінеперервної функції може не бути псевдоквазінеперервною. Це демонструє наступний приклад.

**Приклад 4.1.** Нехай $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел. Розглянемо дві функції $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які визначаються так: $g(x) = -x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, а

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \\ x, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Функція $g$ неперервна, а тому псевдоквазінеперервна. З прикладу 2.2 випливає, що і функція $f$ теж псевдоквазінеперервна. Однак, функція $h = f + g$ не є псевдоквазінеперервна (див. приклад 2.1).

Добуток двох псевдоквазінеперервних функцій не зобовязаний бути псевдоквазінеперервною функцією (див. [4, лема 3]).

В [3, теорема 1] встановлено, що максимум та мінімум псевдоквазінеперервних функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ є псевдоквазінеперервними.

**Теорема 4.1.** *Нехай простір $X$ задовольняє наступну умову:*

($\star$) *якщо* $(X_n)$ *покриття простору* $X$, *таке, що для* $M \subseteq \mathbb{N}$ *множина* $\bigcup_{n\in M} X_n$ *є* $s$*-відкритою і* $G$ *— відкрита непорожня підмножина* $X$, *то* $G \cap \operatorname{int} X_n \neq \varnothing$ *для деякого* $n \in \mathbb{N}$.

*Тоді* $\max(f, g)$ *і* $\min(f, g)$ *є псевдоквазінеперервними функціями для довільних псевдоквазінеперервних функцій* $f, g : X \to \mathbb{R}$.

В [8, теорема 1] встановлено, що для досконалого берівського простору $X$ і сепарабельного метричного простору $Y$ кожна кліпова функція $f : X \to Y$ є рівномірною границею послідовності псевдоквазінеперервних функцій. Оскільки функція з прикладу 2.1 є кліковою, то звідси випливає, що рівномірна границя послідовності псевдоквазінеперервних функцій не зобов'язана бути псевдоквазінеперервною.

## 5. Композиція та обернене відображення

**Теорема 5.1.** *Нехай* $X$, $Y$ *і* $Z$ *— топологічні простори, відображення* $f : Y \to Z$ *неперервне і відображення* $g : X \to Y$ *псевдоквазінеперервне. Тоді відображення* $h = f \circ g : X \to Z$ *псевдоквазінеперервне.*

*Доведення.* Розглянемо довільну відкриту множину $W$ в $Z$. Оскільки відображення $f$ неперервне, то множина $f^{-1}(W)$ відкрита в $Y$. З псевдоквазінеперервності відображення $g$ випливає, що множина $h^{-1}(W) = g^{-1}(f^{-1}(W))$ є $s$-відкритою. Отже, згідно з теоремою 2.5 відображення $h$ псевдоквазінеперервне. □

**Теорема 5.2.** *Нехай* $X$ *і* $Y$ *— топологічні простори, причому простір* $X$ *локально зв'язний, відображення* $f : \mathbb{R} \to Y$ *псевдоквазінеперервне і відображення* $g : X \to \mathbb{R}$ *неперервне. Тоді відображення* $h = f \circ g : X \to Y$ *псевдоквазінеперервне.*

*Доведення.* Розглянемо довільну відкриту множину $W$ в $Y$. Оскільки відображення $f$ псевдоквазінеперервне, то $f^{-1}(W) = V \cup N$, де множина $V$ відкрита в $\mathbb{R}$, а множина $N$ ніде не щільна в $\mathbb{R}$. Розглянемо множину $g^{-1}(V \cup N)$. Тоді $g^{-1}(V \cup N) = g^{-1}(V) \cup g^{-1}(N)$. Оскільки відображення $g$ неперервне, то $U = g^{-1}(V)$ — відкрита множина.

Покажемо, що $g^{-1}(N) = U_1 \cup M$, де множина $U_1$ відкрита в $X$, а множина $M$ ніде не щільна в $X$. Припустимо, що це не так. Тоді існують відкрита непорожня множина $G$ в $X$ та щільні в $G$ множини $A_1$ і $A_2$, такі, що $g(A_1) \subseteq N$ і $g(A_1) \subseteq \mathbb{R} \setminus N$. Оскільки множина $N$ ніде не щільна, то і множина $\overline{N}$ теж ніде не щільна. З неперервності відображення $g$ випливає, що $g^{-1}(\overline{N})$ — замкнена множина, і тому $g^{-1}(\overline{N}) \supseteq G$. Візьмемо довільну відкриту зв'язну множину $O$ в $X$, таку, що $O \subseteq G$. Оскільки при неперервному відображенні образ зв'язної множини є зв'язна множина, то множина $g(O)$ зв'язна і $g(O) \subseteq \overline{N}$. З того, що множина $\overline{N}$ ніде не щільна в $\mathbb{R}$ і містить зв'язну підмножину випливає, що існує така точка $b \in \overline{N}$, що $g(O) = \{b\}$. Оскільки $O \subseteq G$, то множини $A_1$ і $A_2$ щільні і в $O$. Тоді $\{b\} = g(O \cap A_1) \subseteq N$ і $\{b\} = g(O \cap A_2) \subseteq \mathbb{R} \setminus N$. Одержали суперечність з припущенням. Отже, $g^{-1}(N) = U_1 \cup M$, де множина $U_1$ відкрита в $X$, а множина $M$ ніде не щільна в $X$.

Тоді

$$h^{-1}(W) = g^{-1}(f^{-1}(W)) = g^{-1}(V \cup N) = g^{-1}(V) \cup g^{-1}(N) = U \cup U_1 \cup M,$$

де $U, U_1$ — відкриті множини в $X$, а $M$ — ніде не щільна в $X$. Отже, відображення $h$ псевдоквазінеперервне. $\square$

В [10] наведено приклад квазінеперервної бієкції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої функція $f^{-1}$ не має властивості Бера. Як відомо кожна клікова функція з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (а отже, і кожна псевдоквазінеперервна функція) має властивість Бера. Тому згаданий приклад з [10] показує, що для псевдоквазінеперервної бієкції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обернена функція $f^{-1}$ не зобов'язана бути псевдоквазінеперервною. Крім того, в [10] було встановлено умови для бієкції $f : X \to Y$, при яких функції $f$ і $f^{-1}$ є кліковими. Такий же результат має місце для псевдоквазінеперервності.

**Теорема 5.3.** *Нехай $X$ і $Y$ — топологічні простори, $f : X \to Y$ — біекція, $f$ і $f^{-1}$ — ледь неперервні відображення. Тоді відображення $f$ і $f^{-1}$ псевдоквазінеперервні.*

*Доведення.* Покажемо, що відображення $f$ псевдоквазінеперервне. Припустимо, що це не так. Тоді існує існують відкрита непорожня множина $U$ в $X$ та щільні в $U$ множини $A_1$ і $A_2$, такі, що $f(A_2) \subseteq Y \setminus \overline{f(A_1)}$. Оскільки відображення $f^{-1}$ ледь неперервне, то $V = \operatorname{int} \overline{f(U)} \neq \varnothing$. Можливі дві альтернативи: або $(Y \setminus \overline{f(A_1)}) \cap V \neq \varnothing$, або $V \subseteq \overline{f(A_1)}$.

Припустимо спочатку, що $V_1 = (Y \setminus \overline{f(A_1)}) \cap V$. Оскільки відображення $f$ ледь неперервне, то $G = int \overline{f^{-1}(V_1)} \neq \varnothing$. Крім того, $G \subseteq U$. Оскільки $\overline{A_1} \supseteq U$, то $\overline{A_1} \supseteq G$. Візьмемо довільну точку $a \in A_1 \cap G$. Тоді з одного боку $f(a) \in f(A_1)$, а з іншого боку $f(a) \subseteq f(G) \subseteq (Y \setminus \overline{f(A_1)}) \cap V$ і тому $f(a) \notin f(A_1)$. Одержали суперечність.

Нехай тепер $V \subseteq \overline{f(A_1)}$. Оскільки відображення $f$ ледь неперервне, то $G = \operatorname{int} \overline{f^{-1}(V)} \neq \varnothing$. Крім того, $G \subseteq U$. Оскільки $\overline{A_2} \supseteq U$, то $\overline{A_2} \supseteq G$. Візьмемо довільну точку $a \in A_2 \cap G$. Тоді з одного боку $f(a) \in f(A_2) \subseteq Y \setminus \overline{f(A_1)}$, а з іншого боку $f(a) \subseteq f(G) \subseteq V \subseteq \overline{f(A_1)}$. Одержали суперечність. $\square$

## 6. Нарізні та сукупні властивості

В цьому пункті ми уточнимо результати з [17, теореми 5.1 і 5.2].

Нехай $\mathcal{A}$ — деяка система десь щільних множин в $X \times Y$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *$\mathcal{A}$-псевдоквазінеперервним*, якщо для довільної множини $A \in \mathcal{A}$ існують відкриті непорожні множини $U$ в $X$ та $V$ в $Y$, такі, що $G \times H \subseteq \overline{A}$ і $f(G \times H) \subseteq \overline{f(A)}$. Якщо $\mathcal{A} = \{A \subseteq X \times Y : \operatorname{int} \overline{A} \neq \varnothing\}$, то $\mathcal{A}$-псевдоквазінеперервність означає звичайну псевдоквазінеперервність відображення від двох змінних.

Нехай $M$ — множина другої категорії в $X$ і $V$ — відкрита непорожня множина в $Y$. Нехай для кожного $x \in M$ існує множина $B_x \subseteq Y$, така, що $V \subseteq \overline{B_x}$. Розглянемо множину $A = \bigcup_{x \in M}(\{x\} \times B_x)$. Через $\mathcal{M}$ позначимо систему таких підмножин $A$.

**Теорема 6.1.** *Нехай $X$ та $Y$ — берівські простори, причому простір $Y$ має зліченну псевдобазу і $Z$ — сепарабельний метризовний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ псевдоквазінеперервне тоді і тільки тоді, коли воно є $\mathcal{M}$-псевдоквазінеперервним.*

*Доведення.* Ми будемо використовувати теорему 2.5. Оскільки простір $Z$ метризовний сепарабельний, то він регулярний і задовольняє другу аксіому зліченності. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — псевдобаза простору $Y$, $\{W_k : k \in \mathbb{N}\}$ — база простору $Z$.

Доведення необхідності є очевидним враховуючи той факт, що множина $\bigcup_{x \in M}(\{x\} \times B_x)$ щільна в $\operatorname{int} \overline{M} \times V$.

Достатність будемо доводити методом від супротивного. Нехай відображення $f$ не є сукупно псевдоквазінеперервним. Тоді існують відкриті непорожні множини $U$ і $V$ та множина $E \subseteq X \times Y$ щільна в $U \times V$, такі, що для довільних відкритих непорожніх множин $G$ в $X$ та $H$ в $Y$, таких, що $G \times H \subseteq U \times V$ маємо, що $f(G \times H) \not\subseteq \overline{f(E)}$.

Розглянемо множину

$$A = \{x \in U : (\exists B_x \subseteq V, V \setminus B_x \text{ — першої категорії})$$

$$(\forall y \in B_x)(f(x,y) \notin \overline{f(E)})\}$$

і покажемо, що вона другої категорії. Припустимо, що це не так, нехай множина в $A$ першої категорії. Тоді $U \setminus A$ — множина другої категорії, бо простір $X$ берівський. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$A_n = \{x \in U \setminus A : (\exists D_x \subseteq V, \overline{D_x} \supseteq V_n)(\forall y \in D_x)(f(x,y) \in \overline{f(E)})\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq U \setminus A$. Оскільки множина $U \setminus A$ другої категорії, то існує номер $k$, такий, що множина $A_k$ другої категорії. З

$\mathcal{M}$-псевдоквазінеперервності випливає, що існують відкриті непорожні множини $G$ в $X$ та $H$ в $Y$, такі, що

$$G \times H \subseteq \operatorname{int} \overline{A_k} \times V_k \subseteq U \times V$$

і

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f\Big(\bigcup_{x \in A_k} (\{x\} \times D_x)\Big)} \subseteq \overline{\overline{f(E)}} = \overline{f(E)}.$$

Одержали суперечність. Отже, множина $A$ другої категорії.

Оскільки простір $Y$ берівський, то для кожного $x \in A$ множина $B_x$ другої категорії. Для кожного $x \in A$ існують номери $n_x$ і $m_x$, такі, що для кожного $y \in B_x \cap V_{n_x}$ маємо, що $f(x, y) \in W_{m_x}$ і $\overline{W_{m_x}} \cap f(E) = \varnothing$. Розглянемо множини

$$A_{n,m} = \{x \in A : n_x = n, m_x = m\}.$$

Зрозуміло, що $A = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} A_{n,m}$. Оскільки множина $A$ другої категорії, то існують номери $n_0$ та $m_0$, такі, що множина $A_{n_0,m_0}$ другої категорії.

Тепер знову скориставшись $\mathcal{M}$-псевдоквазінеперервністю маємо, що існують відкриті непорожні множини $G$ в $X$ та $H$ в $Y$, такі, що

$$G \times H \subseteq \operatorname{int} \overline{A_{n_0,m_0}} \times V_{n_0} \subseteq U \times V$$

і

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f\Big(\bigcup_{x \in A_{n_0,m_0}} (\{x\} \times (B_x \cap V_{n_0}))\Big)}.$$

Тому

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f\Big(\bigcup_{x \in A_{n_0,m_0}} (\{x\} \times (B_x \cap V_{n_0}))\Big)} \subseteq \overline{W_{m_0}}.$$

Оскільки $\overline{W_{m_0}} \cap f(E) = \varnothing$, то $f(G \times H) \cap f(E) = \varnothing$. Але це суперечить тому, що $E$ щільна в $U \times V$. Отже, наше припущення не вірне і тому відображення $f$ псевдоквазінеперервне. □

Нехай $\mathcal{B} = \{A \times V : \operatorname{int} \overline{A} \neq \varnothing, V = \operatorname{int} V \neq \varnothing\}$ — система підмножин в $X \times Y$.

**Теорема 6.2.** *Нехай $X$ та $Y$ — берівські простори, причому простір $Y$ має зліченну псевдобазу і $Z$ — сепарабельний метризовний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ є $\mathcal{B}$-псевдоквазінеперервним і $E = \{x \in X : f^x$ — псевдоквазінеперервне$\}$ — залишкова множина в $X$. Тоді відображення $f$ псевдоквазінеперервне.*

*Доведення.* Скористаємося теоремою 6.1. Візьмемо довільні відкриті непорожні множини $U$ в $X$ та $V$ в $Y$, довільну множину $M$ другої категорії в $X$, таку, що $M \subseteq U$ і для кожної точки $x \in M$ розглянемо множини $B_x$ в $Y$, такі, що $V \subseteq \overline{B_x}$. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — псевдобаза простору $Y$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$A_n = \{x \in M \cap E : f^x(V_n) \subseteq \overline{f^x(B_x)}\}.$$

Зауважимо, що множина $M \cap E$ другої категорії. Оскільки для кожної точки $x \in M$ відображення $f^x$ псевдоквазінеперервне, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = M \cap E$. З того що множина $M \cap E$ другої категорії випливає, що існує номер $m$ такий, що множина $A_m$ десь щільна. Нехай множина $A_m$ щільна в деякій відкритій непорожній множині $U_0$, тобто $U_0 \subseteq \overline{A_m}$. З $\mathcal{B}$-псевдоквазінеперервності випливає, що існують відкриті непорожні множини $G$ в $X$ та $H$ в $Y$, такі, що $G \times H \subseteq U_0 \times V_m$ і $f(G \times H) \subseteq \overline{f(A_m \times V_m)}$. Тоді $G \times H \subseteq U_0 \times V_m \subseteq U \times V$ і

$$\begin{aligned} f(G\times H) &\subseteq \overline{f(A_m \times V_m)} \subseteq \overline{f\Big(\bigcup_{x\in A_m} (\{x\} \times V_m)\Big)} = \overline{\bigcup_{x\in A_m} f(\{x\} \times V_m)} \\ &= \overline{\bigcup_{x\in A_m} f^x(V_m)} \subseteq \overline{\bigcup_{x\in A_m} \overline{f^x(B_x)}} \subseteq \overline{\overline{\bigcup_{x\in A_m} f^x(B_x)}} = \overline{\bigcup_{x\in A_m} f^x(B_x)} \\ &= \overline{f\Big(\bigcup_{x\in A_m} (\{x\} \times B_x)\Big)} \subseteq \overline{f\Big(\bigcup_{x\in M} (\{x\} \times B_x)\Big)}. \end{aligned}$$

Тоді згідно з теоремою 6.1 відображення $f$ псевдоквазінеперервне за сукупністю змінних. □

## Література


[1] N. Biswas, *On some mappings in topological spaces* // Bull. Cal. Math. Soc., **61** (1969), 127–135.

[2] J. Doboš, *On the set of points of discontinuity for functions with closed graphs* // Čas. Pěst. Mat., **110** (1985), 60–68.

[3] J. Borsík, *Maxima and minima of simply continuous and quasicontinuous functions* // Math. Slovaca, **46** (1996), 261–268.

[4] J. Borsík, *Products of simply continuous and quasicontinuous functions* // Math. Slovaca, **45** (1995), 445–452.

[5] J. Borsík, J. Doboš, *On decomposition of quasicontinuity* // Real Anal. Exch., **16** (1991), 292–305.

[6] J. Borsík, J. Doboš, *On simple continuity points* // Real Anal. Exch., **16** (1991), No. 2, 552–558.

[7] W. W. Bledsoe, *Neighbourly functions* // Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952), 114–115.

[8] J. Ewert, *Note on limits of simply continuous and cliquish functions* // Internat. J. Math. Math. Sci., **17** (1994), 447–450.

[9] Z. Frolik, *Remarks concerning the invariance of Baire spaces under mappings* // Czech. Math. J. II, **86** (1961), 38–385.

[10] Z. Grande, T. Natkaniec, *On quasi-continuous bijections* // Acta Math. Univ. Comenianae, **60** (1991), No. 1, 31–34.

[11] T. Husain, *Almost continuous mappings* // Prace Math., **10** (1966), 1–7.

[12] S. Kempisty, *Sur les fonctions quasicontinues* // Fund. Math., **19** (1932), 184–197.

[13] N. Levine, *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces* // Amer. Math. Monthly, **70** (1963), 36–43.

[14] S. Marcus, *Sur les fonctions quasicontinues an sens de S. Kempisty* // Colloq. Math., **8** (1961), 47–53.

[15] V. K. Maslyuchenko, V.V. Nesterenko, *A new generalization of Calbrix-Troallic's theorem* // Topology Appl., **164** (2014), 162–169.

[16] A. Neubrunnová, *On certain generalizations of the notion of continuity* // Mat. Cas., **23** (1973), No. 4, 374–380.

[17] V. Nesterenko, *Separate and joint properties of some analogues of pointwise discontinuity* // Tatra Mt. Math. Publ., **58** (2014), 155–167.

[18] H. P. Thielman, *Types of functions* // Amer. Math. Monthly, **60** (1953), 156–161.

[19] В. К. Маслюченко, *Нарізно неперервні відображення і простори Кете*: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01, Чернівці, 1999, 345 с.

## Відомості про авторів

**Василь В. Нестеренко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
*E-Mail:* `math.analysis.chnu@gmail.com`