Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 3, 311 – 325

Граничное поведение Q-гомеоморфизмов на финслеровых пространствах

Елена С. Афанасьева

(Представлена В. Я. Гутлянским)

Аннотация. В работе изучается граничное поведение Q-гомеоморфизмов на финслеровых многообразиях. Формулируются условия на функцию $Q(x)$ и границы областей, при которых всякий Q-гомеоморфизм допускает непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу.

2010 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. Финслеровы многообразия, модули, Q-гомеоморфизмы.

1. Введение

Финслеровы пространства были введены как обобщение римановых многообразий на случай, когда метрика зависит не только от координат, но и от направления. Известно, что изучение финслеровой геометрии началось еще в 1854 году с известной работы Римана "О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии", в которой были введены метрики, в том числе и финслерова. Сама геометрия Финслера не получила должного развития, так как в своей диссертации (1918) Финслер не использовал методы тензорного анализа, а лишь методы вариации, которые были поставлены на первое место. И только в 1947 году, после того, как Рашевский вставил в свою книгу главу о финслеровых многообразиях, наступил этап возрождения и интенсивного развития для геометрии Финслера. Известно, что финслерова геометрия имеет приложения к теории относительности [1,2], физике [3,4], механике [5], математической биологии [6], а также теории оптимального управления [7]. Многочисленные примеры финслеровых многообразий можно найти в работе [8].

Статья поступила в редакцию 17.07.2015

Напомним некоторые определения. Говорят, что *область* в топологическом пространстве T — открытое линейно связное множество. Область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ связно, ср. [15, с. 232]. Аналогично, говорят, что область D *локально линейно связна в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ линейно связно.

Напомним также, что *n-мерное топологическое многообразие* $\mathbb{M}^n$ — это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$. *Картой на многообразии* $\mathbb{M}^n$ называется пара (U, φ), где U — открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$, а φ — гомеоморфное отображение подмножества U на открытое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$, с помощью которого каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие набор из n чисел, ее *локальных координат*. Полный набор всех карт многообразия называется его *атласом*.

Многообразие класса C^1 — многообразие с картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны (C^1) образом, см., напр. [10, 11].

Пусть всюду далее D — область в финслеровом пространстве $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geq 2$, $T\mathbb{M}^n = \cup\, T_x\mathbb{M}^n$ — касательное расслоение к $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $\forall x \in \mathbb{M}^n$. Будем понимать под *финслеровым многообразием* $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geq 2$ — многообразие класса C^1, с заданной на нем финслеровой структурой $\Phi(x, \xi)$, где $\Phi(x, \xi) : T\mathbb{M}^n \to \mathbb{R}^+$ — функция дважды дифференцируемая по ξ при любом $x \in \mathbb{M}^n$, имеющая непрерывные на $T\mathbb{M}^n$ частные производные по ξ до второго порядка включительно и удовлетворяющая условиям:

1) $\forall\, a > 0$ выполнено $\Phi(x, a\xi) = a\Phi(x, \xi)$ и $\Phi(x, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$;

2) $\forall\, \xi, \eta \in TM$ квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} g(x, \xi)\eta_i\eta_j$ положительно определена и ее элементы $g_{ij}(x, \xi)$ — непрерывные функции по x и по ξ, где

$$g_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi^2(x, \xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.1}$$

— матрица Гессе, ср. [12].

Элемент длины в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geq 2$, определяем как дифференциал дуги для бесконечно малого измеримого участка кривой $\gamma \in D$

следующим образом

$$ds_{\Phi}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x,\xi)d\eta_i d\eta_j,$$

см., напр., [13]. Под *геодезическим расстоянием* $d_{\Phi}(x,y)$ понимаем инфимум длин кусочно-гладких кривых, соединяющих точки x и y в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geq 2$. В соответствии с этим, если $\gamma : [a,b] \to \mathbb{M}^n$ –– кусочно-гладкая кривая и $x(t)$ –– ее параметрическое задание, то в дальнейшем предполагаем, что кривые ориентируемы естественным образом прохождением параметра от a к b.

В финслеровой геометрии используют различные определения объема: объем по Холмсу–Томпсону, Левнеру, Буземану и т.д. В нашей статье мы будем придерживаться определения объема по Буземану (Буземану–Хаусдорфу), т.е. элемент *объема* на финслеровом многообразии понимаем следующим образом:

$$d\sigma_{\Phi}(x) = \sqrt{det\ g_{i,j}(x,\xi)}\ dx^1 \dots dx^n,$$

ср. [14]. Известно, что объем в финслеровом пространстве совпадает с его хаусдорфовой мерой, индуцированной метрикой $d_{\Phi}(x,y)$, если $\Phi(x,\xi)$ обратимая функция, т.е. $\Phi(x,\xi) = \Phi(x,-\xi)$ см., напр., [15].

2. О продолжении на границу обратных отображений

Пусть дано некоторое семейство Γ кривых в области D. *Модуль* семейства Γ задаем равенством

$$M(\Gamma) = \inf \int\limits_{D} \rho^n(x)\, d\sigma_{\Phi}(x)\,, \tag{2.1}$$

где инфимум берется по всем борелевским неотрицательным функциям ρ таким, что для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ выполнено следующее равенство

$$\int\limits_{\gamma} \rho\Phi(x,dx) = \int\limits_{\gamma} \rho ds \geq 1.$$

Функции ρ, удовлетворяющие этому условию, называются *допустимыми* для Γ, ср. [12].

Пусть далее D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geq 2$, соответственно, и пусть $Q : \mathbb{M}^n \to (0,\infty)$ — измеримая функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ называется *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M\,(f\Gamma)\ \le \int\limits_D Q(x)\cdot\rho^n(x)d\sigma_\Phi(x)$$

выполняется для любого семейства кривых Γ в D и любой допустимой борелевой функции ρ семейства Γ. Эта концепция является естественным далекоидущим обобщением геометрического определения квазиконформного отображения по Вяйсяля, см. [16].

Следующее утверждение впервые было получено на гладких римановых многообразиях в работе [17]. Его доказательство в финслеровых пространствах требует некоторой модификации.

Лемма 2.1. *Хаусдорфова размерность областей на финслеровых многообразиях $(\mathbb{M}^n,\Phi)$ относительно геодезического расстояния совпадает с топологической размерностью n. Кроме того, финслеровы многообразия локально n-регулярны по Альфорсу.*

Доказательство. Напомним, согласно [15], что под $d_\Phi(z,y)=\inf\limits_\gamma s_\gamma$ понимаем геодезическое расстояние, где инфимум берется по всем кусочно-гладким кривым γ, соединяющим z и y в $(\mathbb{M}^n,\Phi)$, s_γ — длина кривой γ. Здесь

$$s_\gamma=\int\sqrt{g_{ij}(x(s_*))\ \frac{dx^i}{ds_*}\frac{dx^j}{ds_*}}\ ds_*,$$

где s_* — естественный параметр длины кривой γ, см. [18], и в любых локальных координатах $|\frac{dx}{ds_*}|=1$. Пусть $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$, где $\eta^i=\frac{dx^i}{ds_*}$. Для того, чтобы оценить геодезическое расстояние $d_\Phi(z,y)$ через евклидово расстояние $r(z,y)$ в локальных координатах, рассмотрим функцию

$$\varphi_{x_0}(\eta)=g_{ij}(x_0)\ \eta^i\eta^j, \tag{2.2}$$

заданную на единичной сфере $|\eta|=1$ в $\mathbb{R}^n$, где $x_0\in(\mathbb{M}^n,\Phi)$ — фиксированная точка. По определению, g_{ij} положительно определены и непрерывны, см. (1.1). Так как непрерывная на компакте $|\eta|=1,\ \eta\in\mathbb{R}^n$, функция $\varphi_{x_0}(\eta)$ достигает на нем своего максимума и минимума,

$$0<m_{x_0}<\varphi_{x_0}(\eta)<M_{x_0}<\infty\ , \tag{2.3}$$

где m_{x_0} и M_{x_0} — константы, зависящие от x_0.

Более того, ввиду непрерывной зависимости $\varphi_x(\eta)$ по совокупности переменных x и η, (2.3) имеет место не только в точке x_0, но и во всех точках x некоторой окрестности x_0.

Таким образом, локально имеем двухстороннюю оценку геодезического расстояния между точками финслерового пространства через евклидово расстояние в соответствующей системе координат

$$m \cdot r(z,y) \le d_\Phi(z,y) \le M \cdot r(z,y)\ , \tag{2.4}$$

где $0 < m \le M < \infty$.

С другой стороны, из тех же соображений имеем локальную двухстороннюю оценку объема $\sigma_\Phi(B) = \int\limits_B \sqrt{det\ g_{ij}}\ dx^1 \dots dx^n$ геодезических шаров $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{M}^n : d_\Phi(x, x_0) < R\}$ через их евклидов объем $W(B)$

$$\widetilde{m} \cdot W(B) \le \sigma_\Phi(B) \le \widetilde{M} \cdot W(B), \tag{2.5}$$

поскольку $det\ g_{ij}$ положителен и непрерывен, см. [14].

Комбинируя (2.3) и (2.5), получаем, что локально

$$c \cdot R^n \le \sigma_\Phi(B) \le C \cdot R^n,$$

где R — геодезический радиус шаров B.

Таким образом, финслеровы пространства являются локально n-регулярными по Альфорсу, а значит их хаусдорфова размерность совпадает с их топологической размерностью n, см. [19, с. 62]. □

Из леммы 2.1, в частности, получаем локальное условие удвоения меры.

Следствие 2.1. *Для любой точки x_0 финслерового многообразия $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ найдутся $r_0 > 0$ и $c \in (1, \infty)$, такие что*

$$\sigma_\Phi(B(x_0, 2r)) \le c\sigma_\Phi(B(x_0, r)) \qquad \forall\ r \le r_0. \tag{2.6}$$

В дальнейшем, для множеств A, B и C из $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \ge 2$, символом $\Delta(A, B; C)$ обозначаем множество всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{M}^n$, соединяющих A и B в C, т.е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$ для всех $t \in (a, b)$.

Пусть далее D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \ge 2$, соответственно. Будем говорить, что граница области D — *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$, такая что

$$M(\Delta(E, F; D)) \ge P \tag{2.7}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V.

Будем также говорить, что граница области D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0, найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$, такие что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geq \delta$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V.

Граница области D называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы, ср. [20].

Следующее предложение доказывается аналогично ранее приведенному для общих метрических пространств с мерами предложению 3.1 в [20].

Предложение 2.1. *Если граница области D — слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$, то ∂D сильно достижима в точке x_0.*

Напомним далее, что

$$\mathrm{E}_0 = C(x_0, f) := \{y \in \mathbb{M}^n_* : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k),\ x_k \to x_0, x_k \in D\}$$

обозначает *предельное множество* отображения f в точке x_0.

По лемме 4 из [21] и лемме 2.1 получаем следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству леммы 5 в [22].

Лемма 2.2. *Пусть $f : D \to D'$ — Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Если область D локально линейно связна в точках x_1 и $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, а D' имеет слабо плоскую границу, то $C(x_1, f) \cap C(x_2, f) = \emptyset$.*

По лемме 2.2 получаем, в частности, следующее простое, но очень важное заключение.

Теорема 2.1. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geq 2$, соответственно, D локально линейно связна во всех своих граничных точках и $\overline{D}$ — компакт, область D' имеет слабо плоскую границу, а $f : D \to D'$ — Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Тогда обратный гомеоморфизм $g = f^{-1} : D' \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$.*

3. О непрерывном продолжении на границу

Условия на функцию Q в финслеровых пространствах для непрерывного продолжения прямых отображений на границу носят более сложный характер.

По лемме 3 в [21] и лемме 2.1, в частности, получаем следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть D локально линейно связна в $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ — компакт, а $f : D \to D'$ — Q-гомеоморфизм, такой что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества $C\,(x_0, f)$, $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x) \cdot \psi^n_{x_0,\varepsilon}(d_\Phi(x, x_0))\, d\sigma_\Phi(x) = o(I^n_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \qquad (3.1)$$

при $\varepsilon \to 0$ для некоторого достаточно малого $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) := \sup\limits_{x\in D} d_\Phi(x, x_0)$, $D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in D : \varepsilon < d_\Phi(x, x_0) < \varepsilon_0\}$ и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ — семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0, \infty)$, таких что

$$0 < I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)\colon = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \qquad (3.2)$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$.

Доказательство. Рассуждая от противного, покажем, что предельное множество $E_0 = C(x_0, f)$ состоит из единственной точки. Отметим, что $E_0 \neq \emptyset$ ввиду компактности $\overline{D'}$, см., напр., замечание 3, п. 41 в [15]. Граница $\partial D'$ сильно достижима в некоторой точке $y_0 \in E_0$ (по условию леммы). Предположим, что существует хотя бы еще одна точка $y^* \in E_0$. Пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < d'_{\Phi_*}(y_0, y^*)$.

В силу локальной линейной связности области D в точке x_0, найдется последовательность окрестностей V_m точки x_0 такая, что $D_m = D \cap V_m$ — области и $diam(V_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда найдутся точки y_m и $y^*_m \in F_m = fD_m$ близкие к y_0 и y^*, соответственно, для которых $d'_{\Phi_*}(y_0, y_m) < r_0$ и $d'_{\Phi_*}(y_0, y^*_m) > r_0$, которые можно соединить кривыми C_m в областях F_m, $m = 1, 2, \ldots$. По построению $C_m \cap \partial B(y_0, r_0) \neq \emptyset$, ввиду связности C_m.

По условию сильной достижимости точки y_0 найдется компакт $C_0 \subset D'$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(C_0, C_m, D')) \geq \delta \qquad (3.3)$$

для достаточно больших m, поскольку $\mathrm{dist}\,(y_0, C_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Заметим, что $K_0 = f^{-1}(C_0)$ является компактом как непрерывный образ компакта. Таким образом, $\varepsilon_0 = \mathrm{dist}\,(x_0, K_0) > 0$ в D.

Пусть $\psi^*_{x_0,\varepsilon}$ — борелевская функция, такая что $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t)=\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ для п.в. $t\in(0,\infty)$, и $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t)=0$ для остальных t, которая существует по теореме Лузина, см., напр., 2.3.5 в [7].

Заметим, что $I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)>0$ при малых ε ввиду (3.1) и функция

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi^*_{x_0,\varepsilon}(d_\Phi(x,x_0))/I_{x_0}(\varepsilon), & x\in D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0),\\ 0, & x\in\mathbb{M}^n\backslash D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0),\end{cases}$$

допустима для Γ_ε по предложению 2.4 в [21], где Γ_ε — семейство всех кривых в D, соединяющих геодезический шар $B_\varepsilon=\{x\in\mathbb{M}^n : d_\Phi(x,x_0)<\varepsilon\}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, с компактом K_0.

Следовательно,

$$M(f\Gamma_\varepsilon) \le \int\limits_D Q(x)\cdot\rho_\varepsilon^n(d(x,x_0))\,d\sigma_\Phi(x)$$

$$\le \frac{1}{I^n_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)}\int\limits_D Q(x)\cdot\psi^n_{x_0,\varepsilon}(d(x,x_0))\,d\sigma_\Phi(x)\to 0 \qquad (3.4)$$

при $\varepsilon\to 0$ ввиду (3.2).

С другой стороны, для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ при больших m имеет место включение $D_m\subset B_\varepsilon$, и потому $C_m\subset fB_\varepsilon$, и, таким образом,

$$M(f\Gamma_\varepsilon)\ge M(\Delta(C_0,C_m;D'))\,.$$

Следовательно, получаем противоречие между (3.4) и (3.3), т.е., предположение о существовании второй точки $y^*\in E_0$ было неверным. $\Box$

Следствие 3.1. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\varepsilon<d_\Phi(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(d_\Phi(x,x_0))\,d\sigma_\Phi(x) < \infty\,, \qquad (3.5)$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$ такая, что

$$0<I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt < \infty \qquad \forall\ \varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0)\ ,$$

и $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, то Q-гомеоморфизм $f: D\to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в $(\mathbb{M}^n_*,\Phi^*)$.

Теорема 3.1. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geq 2$, соответственно, D локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ — компакт и граница D' сильно достижима. Если измеримая функция $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x) d\sigma_\Phi(x)}{d_\Phi(x, x_0)^n} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \tag{3.6}$$

при $\varepsilon \to 0$, где

$$D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in D : \varepsilon < d_\Phi(x, x_0) < \varepsilon_0\}$$

для $\varepsilon_0 < d(x_0) = \sup\limits_{x \in D} d_\Phi(x, x_0)$, то любой Q-гомеоморфизм $f : D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$.

Следствие 3.2. *В частности, заключение теоремы 3.1 остается в силе, если сходится сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x) d\sigma_\Phi(x)}{d_\Phi(x, x_0)^n} \tag{3.7}$$

в окрестности точки x_0 в смысле главного значения.

Здесь как и в следствии 3.1 подразумевается, что Q продолжена нулем вне D.

Пусть $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ — финслерово многообразие, $n \geq 2$. Будем говорить, что функция $\varphi : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in \mathbb{M}^n$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \frac{1}{\sigma_\Phi(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon| \, d\sigma_\Phi(x) < \infty \quad \forall \, x_0 \in \mathbb{M}^n, \tag{3.8}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\sigma_\Phi(B(x_0, \varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) \, d\sigma_\Phi(x) \tag{3.9}$$

— среднее значение функции $\varphi(x)$ по геодезическому шару $B(x_0, \varepsilon)$ относительно меры объема σ_Φ. Пишем также $\varphi \in FMO$, если $\varphi \in FMO(x_0)$ для всех $x_0 \in \mathbb{M}^n$.

Частные случаи следующей леммы были сначала доказаны для BMO функций и внутренних точек области D в $\mathbb{R}^2$ (а также в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$), затем — для FMO функций и граничных точек области D в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ с условием удвоения меры, см. историю вопроса более подробно в главе 13 монографии [20].

Лемма 3.2. *Пусть D — область в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $x_0 \in \overline{D}$ и*

$$\sigma_\Phi(D \cap B(x_0, 2r)) \le \gamma \cdot \log^{n-2} \frac{1}{r} \cdot \sigma_\Phi(D \cap B(x_0, r)) \ \forall\, r \in (0, r_0)\,. \quad (3.10)$$

Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi : D \to \mathbb{R}$ класса $FMO(x_0)$

$$\int\limits_{D \cap A(\varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\, d\sigma_\Phi(x)}{\left(d_\Phi(x, x_0) \log \frac{1}{d_\Phi(x, x_0)}\right)^n} = O\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (3.11)$$

при $\varepsilon \to 0$ и некотором $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, где $\delta_0 = \min(e^{-e}, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x \in D} d_\Phi(x, x_0)$,

$$A(\varepsilon, \varepsilon_0) \,=\, \{x \in X : \varepsilon < d_\Phi(x, x_0) < \varepsilon_0\}.$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$ такое, что функция φ интегрируема в $D_0 = D \cap B_0$ относительно меры σ_Φ, где $B_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$ — геодезический шар,

$$\delta = \sup_{r \in (0, \varepsilon_0)} \ \fint_{D(r)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_r| \ d\sigma_\Phi(x) \ < \infty\,,$$

$D(r) = D \cap B(r)$, $B(r) = B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n : d_\Phi(x, x_0) < r\}$.

Далее, пусть $\varepsilon_1 < 2^{-1}\varepsilon_0$, $\varepsilon_k = 2^{-k}\varepsilon_0$, $A_k = \{x \in \mathbb{M}^n : \varepsilon_{k+1} \le d_\Phi(x, x_0) < \varepsilon_k\}$, $B_k = B(\varepsilon_k)$ и пусть φ_k — среднее значение функции $\varphi(x)$ в $D_k = D \cap B_k, k = 0, 1, 2\ldots$ относительно меры σ_Φ. Выберем натуральное число N такое, что $\varepsilon \in [\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_N)$ и обозначим $\varkappa(t) = (t \log_2 1/t)^{-n}$. Тогда $D \cap A(\varepsilon, \varepsilon_0) \subset \Delta(\varepsilon) := \bigcup\limits_{k=0}^{N} \Delta_k$, где $\Delta_k = D \cap A_k$ и

$$\eta(\varepsilon) = \int\limits_{\Delta(\varepsilon)} \varphi(x) \ \varkappa(d_\Phi(x, x_0)) \ d\sigma_\Phi(x) \ \le \ |S_1| \ + \ S_2,$$

$$S_1(\varepsilon) \ = \ \sum_{k=1}^{N} \ \int\limits_{\Delta_k} (\varphi(x) - \varphi_k) \ \varkappa(d_\Phi(x, x_0)) \ d\sigma_\Phi(x) \ ,$$

$$S_2(\varepsilon) \ = \ \sum_{k=1}^{N} \ \varphi_k \int\limits_{\Delta_k} \ \varkappa(d_\Phi(x, x_0)) \ d\sigma_\Phi(x) \ .$$

Так как $D_k \subset D(2d_\Phi(x, x_0))$ для $x \in \Delta_k$, то по лемме 2.1 и следствию 2.1 $\sigma_\Phi(D_k) \le \sigma_\Phi(D(2d_\Phi(x, x_0))) \le C \cdot 2^n \cdot d_\Phi(x, x_0)^n$, т.е.

$$\frac{1}{d_\Phi(x, x_0)^n} \le C \cdot 2^n \frac{1}{\sigma_\Phi(D_k)}.$$

Кроме того, $\frac{1}{(\log_2 \frac{1}{d_\Phi(x,x_0)})^n} \leq \frac{1}{k^n}$ для $x \in \Delta_k$ и, таким образом,

$$|S_1| \ \leq \ \delta C \cdot 2^n \sum_{k=1}^{N} \ \frac{1}{k^n} \leq \ 2\delta C \cdot 2^n \,,$$

поскольку при $n \geq 2$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} < \int_1^\infty \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{n-1} \leq 1.$$

Далее,

$$\int\limits_{\Delta_k} \varkappa(d_\Phi(x,x_0)) \ d\sigma_\Phi(x) \ \leq \ \frac{1}{k^n} \int\limits_{A_k} \frac{d\sigma_\Phi(x)}{d_\Phi(x,x_0)^n}$$

$$\leq \ \frac{C \cdot 2^n}{k^n} \cdot \frac{\sigma_\Phi(G_k) - \sigma_\Phi(G_{k+1})}{\sigma_\Phi(G_k)} \leq \frac{C2^n}{k^n} \,.$$

Кроме того, по условию (3.10)

$$\sigma_\Phi(D_{k-1}) = \sigma_\Phi(B(2\varepsilon_k) \cap D)) \leq \gamma \cdot \log_2^{n-2} \frac{1}{\varepsilon_k} \cdot \sigma_\Phi(D_k) \,,$$

а потому

$$|\varphi_k - \varphi_{k-1}| \ = \ \frac{1}{\sigma_\Phi(D_k)} \left| \int\limits_{D_k} (\varphi(x) - \varphi_{k-1}) \ d\sigma_\Phi(x) \right|$$

$$\leq \ \frac{\gamma \cdot \log_2^{n-2} \frac{1}{\varepsilon_k}}{\sigma_\Phi(D_{k-1})} \int\limits_{D_{k-1}} |(\varphi(x) - \varphi_{k-1})| \ d\sigma_\Phi(x) \ \leq \ \delta \cdot \gamma \cdot \log_2^{n-2} \frac{1}{\varepsilon_k}$$

и, по убыванию ε_k,

$$\varphi_k \ = \ |\varphi_k| \ \leq \ \varphi_1 \ + \ \sum_{l=1}^{k} \ |\varphi_l - \varphi_{l-1}| \ \leq \ \varphi_1 \ + k\delta\gamma \cdot \log_2^{n-2} \frac{1}{\varepsilon_k}.$$

Следовательно, поскольку при $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \leq 1 + \int\limits_1^\infty \frac{dt}{t^n} \ = \ 1 + \frac{1}{n-1} \ \leq \ 2 \,,$$

имеем следующие оценки

$$S_2 \;=\; |S_2| \;\leq\; C2^n\sum_{k=1}^{N}\frac{\varphi_k}{k^n}\leq\; C2^n\sum_{k=1}^{N}\frac{\varphi_1\;+k\delta\gamma\cdot\log_2^{n-2}\frac{1}{\varepsilon_k}}{k^n}$$

$$\leq C2^n\left(2\varphi_1+\delta\gamma\sum_{k=1}^{N}\frac{(k+\log_2\varepsilon_0^{-1})^{n-2}}{k^{n-1}}\right)$$

$$= C2^n\left(2\varphi_1+\delta\gamma\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\frac{(k+\log_2\varepsilon_0^{-1})^{n-2}}{k^{n-2}}\right)$$

$$\leq C2^n\left(2\varphi_1+\delta\gamma(1+\log_2\varepsilon_0^{-1})^{n-2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right)$$

и

$$\eta(\varepsilon)\leq 2^{n+1}C(\delta+\varphi_1)+2^nC\delta\gamma(1+\log_2\varepsilon_0^{-1})^{n-2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\,.$$

Так как

$$\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}<\int\limits_{1}^{N}\frac{dt}{t}=\log N<\log_2 N$$

и для $\varepsilon_0\in(0,2^{-1})$ и $\varepsilon<\varepsilon_N$

$$N\;<\;N\;+\;\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)\;=\;\log_2\,\frac{1}{\varepsilon_N}\;<\;\log_2\,\frac{1}{\varepsilon}\,,$$

то при $\varepsilon_0\in(0,\delta_0)$, $\delta_0=min(e^{-e},d_0)$ и $\varepsilon\to 0$

$$\eta(\varepsilon)\leq 2^{n+1}C(\delta+\varphi_1)+2^nC\delta\gamma(1+\log_2\varepsilon_0^{-1})^{n-2}\left(1+\log_2\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$=O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

$\Box$

Теорема 3.2. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n,\Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*,\Phi_*)$, $n\geq 2$, соответственно, D локально линейно связна в точке $x_0\in\partial D$, $\partial D'$ сильно достижима, а замыкание $\overline{D'}$ компактно. Если $Q\in FMO(x_0)$, то любой Q-гомеоморфизм $f:D\to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*,\Phi_*)$.*

Следствие 3.3. *Пусть D локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ сильно достижима, а $\overline{D'}$ компактно. Если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{\sigma_\Phi(B(x_0,\varepsilon))}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\ d\sigma_\Phi(x) < \infty,$$

то любой Q-гомеоморфизм $f : D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$.

Теорема 3.3. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geq 2$, соответственно, D локально линейно связна на границе, $\partial D'$ сильно достижима, $\overline{D'}$ компактно. Если Q принадлежит FMO, то любой Q-гомеоморфизм $f : D \to D'$ допускает непрерывное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

4. Гомеоморфное продолжение на границу

Комбинируя результаты подразделов 2 и 3, получаем следующие теоремы.

Лемма 4.1. *Пусть D локально связна на границе, $\partial D'$ — слабо плоская, а $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ компактны. Если функция $Q \in L^1(D)$ удовлетворяет условию (3.1) в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то любой Q-гомеоморфизм $f : D \to D'$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Теорема 4.1. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geq 2$, соответственно, D и D' имеют слабо плоские границы, а $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ — компакты и пусть $Q : \mathbb{M}^n \to (0, \infty)$ — функция класса $L^1(D)$ с*

$$\int\limits_{D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)d\sigma_\Phi(x)}{d_\Phi(x,x_0)^n} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \tag{4.1}$$

в каждой точке $x_0 \in \partial D$, где

$$D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in D : \varepsilon < d_\Phi(x,x_0) < \varepsilon_0\},$$

$\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < d(x_0) = \sup\limits_{x\in D} d_\Phi(x,x_0)$. Тогда любой Q-гомеоморфизм $f : D \to D'$ допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Следствие 4.1. *В частности, заключение теоремы 4.1 имеет место, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)d\sigma_\Phi(x)}{d_\Phi(x,x_0)^n} \tag{4.2}$$

сходится в смысле главного значения во всех граничных точках.

Теорема 4.2. *Пусть D и D' — области в $(\mathbb{M}^n, \Phi)$ и $(\mathbb{M}^n_*, \Phi_*)$, $n \geq 2$, соответственно, D локально линейно связна на границе, $\partial D'$ — слабо плоская, замыкания $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ компактны. Если Q принадлежит классу FMO, то любой Q-гомеоморфизм $f : D \to D'$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Таким образом результаты статьи распространяют (и усиливают) хорошо известные теоремы М. Вуоринена, Дж. Вяйсяля, Ф. Геринга, О. Мартио, Р. Някки, У. Сребро, Э. Якубова и др. о квазиконформных отображениях в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, на Q-гомеоморфизмы в финслеровы пространства.

Литература

[1] G. S. Asanov, *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Fields, Fundamental Theories of Physics*, Springer: Springer Science and Business Media, 2012, 370 p.

[2] Y. Takano, *Gravitational field in Finsler spaces* // Lett. Nuov. Cim., **10** (1974), No. 17, 747–750.

[3] Г. И. Гарасько,С. С. Кокарев, В. Н. Тришин, В. Балан, Н. Бринзей, С. В. Сипаров, В. М. Чернов, В. А. Панчелюга, *Основы финслеровой геометрии и ее приложения в физике*, М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010, 412 с.

[4] R. S. Ingarden, *On physical applications of Finsler geometry* // Cont. Math., **196** (1996), 213–223.

[5] J. D. Clayton, *On Finsler Geometry and Applications in Mechanics: Review and New Perspectives* // Advances in Mathematical Physics, **2015** (2015), 11.

[6] P. L. Antonelli, *Preface for "Applications of Finsler differential geometry to biology, engineering, and physics"* // Cont. Math., **196** (1996), 199–202.

[7] B. Robert, Gardner and George R. Wilkens *Preface for "Applications of Finsler geometry to control theory"* // Contemp. Math., **196**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 227–229.

[8] P. L. Antonelli, *Handbook of Finsler geometry*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[9] К. Куратовский, *Топология. Т. 2*, М.: Мир, 1969, 623 с.

[10] Э. Картан, *Риманова геометрия в ортогональном репере*, М.: Изд. МГУ, 1960, 307 с.

[11] Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин, *Дифференциальная геометрия*, М.: Изд-во МГУ, 1990, 384 с.

[12] Ю. В. Дымченко, *Соотношение между ёмкостью конденсатора и модулем семейства разделяющих поверхностей в финслеровых пространствах* // Зап. научн. сем. ПОМИ, **418** (2013), 74–89.

[13] S. F. Rutz, F. M. Paiva, *Gravity in Finsler spaces. Finslerian Geometries: A Meeting of Minds*, Dordrecht: Kluwer, 2000, 233–244.

[14] H. Rund, *The differential geometry of Finsler spaces*, Verlag: Springer, 1959, 284 p.

[15] X. Cheng, Z. Shen, *Finsler Geometry: An Approach via Randers Spaces*, Berlin Heidelberg: Springer, 2012.

[16] J. Väisälä, *Lectures on $n-$Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math. **229**. Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.

[17] Е. С. Афанасьева, *Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов на римановых многообразиях* // Укр. мат. журн, **63** (2011), No. 10, 1299–1313.

[18] M. Hohmann, *Observer dependent geometries* // arXiv:1403.4005v1 [math-ph], 17 Mar 2014.

[19] J. Heinonen *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, New York: Springer, 2001, 140 p.

[20] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monographs in Mathematics, New York: Springer, 2009.

[21] В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Слабо плоские пространства и границы в теории отображений* // Укр. мат. вестник, **4** (2007), No. 2, 199–234.

[22] Е. С. Смоловая, *Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах* // Укр. мат. журн, **62** (2010), No. 5, 682–689.

[23] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, М.: Наука, 1987, 760 с.

Сведения об авторах

Елена Сергеевна Афанасьева

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
E-Mail: es.afanasjeva@yandex.ru
smolka21@yandex.ru