

Аппроксимация в L^p линейными комбинациями индикаторов шаров

ОКСАНА А. ОЧАКОВСКАЯ

(Представлена В. Я. Гутлянским)

Аннотация. Рассматривается аппроксимация функций на подмножествах \mathbb{R}^n в пространстве L^p , $2 \leq p < \infty$ линейными комбинациями индикаторов шаров. Рассмотрен случай, когда радиусы шаров пропорциональны положительным нулям функции Бесселя.

Ключевые слова и фразы. Аппроксимационная теорема Винера, аппроксимация сдвигами.

1. Введение

Классическая теорема Винера о замыкании сдвигов утверждает, что множество всех линейных комбинаций сдвигов функций $f_m \in L^1(\mathbb{R}^1)$, $m = 1, 2, \dots$ плотно в $L^1(\mathbb{R}^1)$ тогда и только тогда, когда не существует точки $x \in \mathbb{R}^1$, в которой преобразования Фурье всех функций f_m равны нулю (см., например, [1–3]). Винер получил также необходимые и достаточные условия для замкнутости линейной оболочки сдвигов заданных функций из $L^2(\mathbb{R}^1)$. В дальнейшем были получены аналоги этих результатов Винера на некомпактных группах (см. [2]). Изучались также L^p -аналоги теорем Винера при $p \geq 1$. В ряде работ (см., например, [4–6] и библиографию в этих работах) изучались случаи, когда заданные функции f_m имеют компактные носители, а их сдвиги сосредоточены на различных подмножествах евклидовых пространств. В данной работе мы рассматриваем аппроксимацию функций из L^p , $2 \leq p < +\infty$, линейными комбинациями индикаторов шаров, радиусы которых пропорциональны положительным нулям функции Бесселя. Изучается также возможность подобной аппроксимации сдвигами некоторых финитных радиальных функций.

Статья поступила в редакцию 16.06.2015

2. Формулировки основных результатов

Как обычно, обозначим через $\mathcal{E}'(H)$ пространство распределений с компактным носителем на полупространстве $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Пусть также J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν , $N_\lambda = \{t > 0 : J_{n/2}(\lambda t) = 0\}$ и Δ — оператор Лапласа в \mathbb{R}^n .

Теорема 1. Пусть $f \in L^p(H)$ при некотором $p \in [2, +\infty)$. Пусть также функция f представима в виде

$$f = \Delta u + \lambda^2 u \quad (1)$$

для некоторых $u \in \mathcal{E}'(H)$, $\lambda > 0$. Тогда f является пределом сходящейся в $L^p(H)$ последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров с радиусами $r \in N_\lambda$, содержащихся в H .

В качестве следствий приведем следующие результаты, показывающие, что класс функций $f \in L^p(H)$, удовлетворяющих условию теоремы 1, является достаточно широким.

Следствие 1. Пусть $p \in [2, +\infty)$ и функция $f \in L^p(H)$ имеет компактный носитель, содержащийся в H . Пусть также множество нулей преобразования Фурье функции f содержит сферу в \mathbb{R}^n радиуса $\lambda > 0$ с центром в нуле. Тогда для этой функции выполнено утверждение теоремы 1.

Далее, положим $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ и $\overline{B_R}$ — замыкание B_R . Символом $u * v$ обозначим свертку функций $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 2. Пусть $p \in [2, +\infty)$ и функция $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель. Пусть также вещественнозначная радиальная функция $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) носитель v содержится в шаре $\overline{B_R}$ для некоторого $R > 0$;
- 2) v непрерывна в нуле;
- 3) не существует функции $w \in C(\mathbb{R}^n)$, совпадающей с v почти всюду.

Тогда, если носитель функции $f = u * v$ содержится в H , то для этой функции выполнено утверждение теоремы 1.

Следствие 3. Пусть $p \in [2, +\infty)$ и вещественная радиальная функция $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям 1)-3) из следствия 2. Пусть также $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ и $h_n > R$. Тогда для функции $v(x - h)$ выполнено утверждение теоремы 1.

Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через χ_A индикатор этого множества. Если $h \in \mathbb{R}^n$, положим

$$A + h = \{x \in \mathbb{R}^n : x - h \in A\}.$$

Следствие 4. Пусть A — непустое, измеримое, инвариантное относительно вращений подмножество \mathbb{R}^n , содержащееся в шаре $\overline{B_R}$ и функция χ_A непрерывна в нуле. Пусть также $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ и $h_n > R$. Тогда при любом $p \in [2, +\infty)$ существует $\lambda > 0$ такое, что функция χ_{A+h} является пределом последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, сходящейся в $L^p(H)$.

Далее нам потребуется следующее определение (см. [4, раздел 3.2.3]).

Область $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ называется r -областью, если выполнены следующие условия:

а) каждая точка из \mathcal{O} лежит в некотором замкнутом шаре радиуса r , содержащемся в \mathcal{O} ;

б) множество центров всех замкнутых шаров радиуса r , содержащихся в \mathcal{O} , является связным.

Пусть $\lambda > 0$ и $r \in N_\lambda$. Рассмотрим функцию $g_{\lambda,r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, определённую равенством

$$g_{\lambda,r}(x) = \begin{cases} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda|x|)r^{(n-2)/2}}{|x|^{(n-2)/2}J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)} - 1, & |x| < r, \\ 0, & |x| \geq r. \end{cases}$$

Можно показать, что $g_{\lambda,r} \in C(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta g_{\lambda,r} + \lambda^2 g_{\lambda,r} = \chi_r, \quad (2)$$

где χ_r — индикатор шара B_r и дифференцирование в (2) понимается в смысле распределений.

Теорема 2. Пусть $\lambda > 0$ фиксировано и множество $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ содержит H и является ζ -областью при некотором $\zeta \in N_\lambda$. Тогда множество всевозможных линейных комбинаций функций вида $g_{\lambda,r}(x - h)$, где $r \in N_\lambda$ и $\text{supp } g_{\lambda,r}(x - h) \subset \mathcal{O}$, является плотным в $L^p(\mathcal{O})$ при любом $p \in [2, +\infty)$.

3. Вспомогательные утверждения

Сначала напомним некоторые обозначения.

Пусть $\mathcal{Z}_+(J_{n/2}) = \{\nu_1, \nu_2, \dots\}$ — возрастающая последовательность всех нулей функции Бесселя $J_{n/2}$, лежащих на $(0, +\infty)$.

Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|x'| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$. Пусть также (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в \mathbb{R}^{n-1} и $dx' = dx_1 \cdots dx_{n-1}$ — лебегова мера в \mathbb{R}^{n-1} .

Для $\mu > 0$ рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \varphi(t, r, \mu) = \begin{cases} (r^2 - t^2)^{\frac{n-1}{4}} J_{\frac{n-1}{2}}(\mu\sqrt{r^2 - t^2}), & |t| < r, \\ 0, & |t| \geq r. \end{cases}$$

Положим

$$\varphi_{k,\mu}(t) = \varphi(t, \nu_k, \mu), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. Пусть $M_r = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_n| \leq r\}$, $u \in L^p(M_r)$ для некоторого $p \in [1, 2]$ и

$$v(t) = \int_{B_r} u(x' + t, x_n) dx, \quad t \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3}$$

Тогда $v \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ и

$$\widehat{v}(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{(n-1)/2} \int_{-r}^r \widehat{u}(\lambda, x_n) \varphi(x_n, r, |\lambda|) dx_n \tag{4}$$

для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$, где \widehat{u} — преобразование Фурье функции $u(x', x_n)$ относительно переменной x' .

Доказательство. Из определения функции v и неравенства Гёльдера имеем оценки

$$|v(t)| \leq \int_{B_r} |u(x' + t, x_n)| dx \leq c_1 \left(\int_{B_r} |u(x' + t, x_n)|^p dx \right)^{1/p}, \quad t \in \mathbb{R}^{n-1},$$

где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от t . Из этих неравенств получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(t)|^p dt &\leq c_1 \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x' + t, x_n)|^p dt dx \\ &= c_1 \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(t, x_n)|^p dt dx \\ &= c_1 \int_{-r}^r dx_n \int_{|x'| \leq \sqrt{r^2 - x_n^2}} dx' \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(t, x_n)|^p dt \leq c_2 \|u\|_{L^p(M_r)}^p \end{aligned} \tag{5}$$

для некоторой положительной постоянной c_2 , не зависящей от функции u . Таким образом, получили, что $v \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

Докажем равенство (4). Прежде всего, установим, что

$$\widehat{v}(\lambda) = \int_{B_r} e^{i(\lambda, x')} \widehat{u}(\lambda, x_n) dx. \quad (6)$$

Сначала рассмотрим случай $p = 1$. Из определения преобразования Фурье и определения v получаем

$$\widehat{v}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda, t)} v(t) dt = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda, t)} \int_{B_r} u(x' + t, x_n) dx dt.$$

Отсюда и из теоремы Фубини следует, что

$$\widehat{v}(\lambda) = \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda, t)} u(x' + t, x_n) dx dt. \quad (7)$$

Из последнего равенства с помощью замены переменной во внутреннем интеграле получаем (6).

Предположим теперь, что $p = 2$. Для $R > 0$ рассмотрим функцию

$$v_R(t) = \int_{B_r} u_R(x' + t, x_n) dx, \quad t \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (8)$$

где

$$u_R(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & |x'| \leq R \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из определения u_R имеем

$$\|u_R - u\|_{L^2(M_r)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Кроме того, используя неравенство (5) для функции $u_R - u$ вместо u , получаем

$$\|v_R - v\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq c_2 \|u_R - u\|_{L^2(M_r)}. \quad (10)$$

Соотношения (9) и (10) показывают, что $v_R \rightarrow v$ при $R \rightarrow +\infty$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

Поскольку $u_R \in L(M_r)$, по доказанному выше имеем равенство

$$\widehat{v}_R(\lambda) = \int_{B_r} e^{i(\lambda, x')} \widehat{u}_R(\lambda, x_n) dx \quad (11)$$

для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$. Далее, пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$. Из (11) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \widehat{v}_R(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda &= \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda,x')} \varphi(\lambda)\widehat{u}_R(\lambda, x_n)dx d\lambda \\ &= \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda,x')} \varphi(\lambda)\widehat{u}(\lambda, x_n)dx d\lambda \\ &+ \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda,x')} \varphi(\lambda)(\widehat{u}_R(\lambda, x_n) - \widehat{u}(\lambda, x_n))dx d\lambda. \end{aligned} \tag{12}$$

Обозначим через K носитель функции φ . Тогда модуль последнего слагаемого в правой части равенства (12) не превосходит величины

$$\int_{B_r} \int_K |\varphi(\lambda)| |(\widehat{u}_R(\lambda, x_n) - \widehat{u}(\lambda, x_n))| dx d\lambda. \tag{13}$$

Применяя к интегралу в (6) неравенство Коши–Буняковского, получаем, что он не превосходит величины

$$c_3 \left(\int_{M_r} |\widehat{u}_R(\lambda, x_n) - \widehat{u}(\lambda, x_n)|^2 dx_n d\lambda \right)^{1/2}, \tag{14}$$

где c_3 — положительная постоянная, не зависящая от R . По теореме Планшереля

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{u}_R(\lambda, x_n) - \widehat{u}(\lambda, x_n)|^2 d\lambda = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_R(x', x_n) - u(x', x_n)|^2 dx', \tag{15}$$

то есть, выражение в (14) равно

$$c_3 \left((2\pi)^n \int_{M_r} |u_R(\lambda, x_n) - u(\lambda, x_n)|^2 dx_n d\lambda \right)^{1/2}. \tag{16}$$

Учитывая условие (9) и произвольность функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, отсюда и из (12) заключаем, что \widehat{v}_R при $R \rightarrow \infty$ сходится в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$ распределений в \mathbb{R}^{n-1} к функции

$$\int_{B_r} e^{i(\lambda,x')} \widehat{u}(\lambda, x_n) dx d\lambda.$$

С другой стороны, по теореме Планшереля имеем

$$\|\widehat{v}_R - \widehat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = (2\pi)^{n/2} \|v_R - v\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Из этого равенства вытекает, что \widehat{v}_R сходится при $R \rightarrow \infty$ к функции \widehat{v} в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Сопоставляя это с тем, что было получено

выше, приходим к равенству (6). Пусть теперь $1 < p < 2$. В этом случае функция u представима в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in L^1(M_r)$, $u_2 \in L^2(M_r)$. При этом

$$\widehat{u}(\lambda, x_n) = \widehat{u}_1(\lambda, x_n) + \widehat{u}_2(\lambda, x_n). \quad (17)$$

Определим функции v_1 и v_2 с помощью равенств (3) при $u = u_1$, u_2 соответственно. Тогда по уже доказанному $v_1 \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$, $v_2 \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ и $\widehat{v} = \widehat{v}_1 + \widehat{v}_2$. Отсюда и из соотношения (17) получаем равенство (6) в общем случае. Далее, записывая интеграл в (6) в виде повторного, находим

$$\widehat{v}(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|} \right)^{(n-1)/2} \int_{-r}^r \widehat{u}(\lambda, x_n) \int e^{i(\lambda, x')} dx' dx_n \quad (18)$$

где внутренний интеграл вычисляется по шару

$$\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq r^2 - x_n^2\}.$$

Используя формулу для преобразования Фурье индикатора шара (см. [7, теорема 4.15]), отсюда получаем утверждение леммы. \square

Лемма 2. Пусть $f \in L^p(H)$ для некоторого $p \in [1, 2]$ и

$$\int_{B_r} f(x+w) dx = 0 \quad (19)$$

для всех $r \in \mathcal{Z}_+(J_{n/2})$, $w \in \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > r\}$. Тогда существует функция $u \in C^\infty(H)$ такая, что $\Delta u + u = 0$ и $f = u$ в H почти всюду.

Доказательство. Пусть ψ — произвольная функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в шаре B_1 . Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_H f(u)\psi(x+u) du, \quad x \in H_1 = \{x \in \mathbb{R}^1, x_n > 1\}. \quad (20)$$

Пусть $r \in \mathcal{Z}_+(J_{n/2})$, $z = (t_1, \dots, t_{n-1}, y)$, где $t \in (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $y > r + 1$. Из равенств (19) и (20) имеем

$$\begin{aligned} & \int_H \int_{B_r} f(u)\psi(x+z+u) du dx \\ &= \int_{B_r} F(x_1 + t_1, \dots, x_{n-1} + t_{n-1}, x_n + y) dx = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

для всех $t \in (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $y > r + 1$. Предположим, что $\mu \geq 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$ связаны соотношением $\mu = |\lambda|$. Для краткости будем обозначать через $g_\lambda(x_n)$ преобразование Фурье функции $F(x', x_n)$ по переменной x' . Используя лемму 1, из равенства (21) получаем

$$\int_{-\nu_k}^{\nu_k} g_\lambda(x_n + y) \varphi_{k,\mu}(x_n) dx_n = 0, \tag{22}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$, $y > \nu_k + 1$ и почти всех $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$. Повторяя теперь рассуждения из доказательства теоремы 1 в работе [8], приходим к требуемому утверждению. \square

4. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Поскольку носитель распределения не увеличивается при действии на это распределение дифференциального оператора, из равенства (1) следует, что $\text{supp } f \subset H$. Выберем ненулевую функцию $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, для которой $\text{supp } v \subset H$, где $v = f * \phi$. В силу определения свертки это можно сделать, выбирая функцию ϕ с носителем, содержащимся в шаре достаточно малого радиуса с центром в нуле. Полагая $w = u * \phi$, из равенства (1) делаем вывод, что

$$\begin{aligned} \Delta w + \lambda^2 w &= v. \\ \Delta w + \lambda^2 w &= v. \end{aligned} \tag{23}$$

Покажем теперь, что всякий линейный непрерывный функционал Ψ на $L^p(H)$, аннулирующий индикаторы всех шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, аннулирует v . По теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в пространстве $L^p(H)$ любой такой функционал имеет вид

$$\Psi(g) = \int_H g(x) f(x) dx, \quad g \in L^p(H), \tag{24}$$

где $f \in L^q(H)$, $q = p/(p - 1)$. Поскольку Ψ аннулирует индикаторы всех шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, из (24) имеем

$$\int_B f(x) dx = 0 \tag{25}$$

для любого шара B с радиусом $r \in N_\lambda$, содержащегося в H . В силу эллиптичности оператора Δ и леммы 2 из условия (25) следует, что f почти всюду совпадает с вещественно-аналитической функцией на H , удовлетворяющей уравнению

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0 \text{ в } H. \tag{26}$$

Используя соотношения (23), (24) и (26), получаем

$$\begin{aligned}\Psi(v) &= \int_H f(x)v(x)dx = \int_H f(x)(\Delta w + \lambda^2 w)(x)dx \\ &= \int_H w(x)(\Delta f + \lambda^2 f)(x)dx = 0,\end{aligned}$$

как и утверждалось. Таким образом, свертка $\chi_A * \phi$ является пределом последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, сходящейся в пространстве $L^p(H)$. Но функция χ_A является пределом некоторой последовательности сверток $\{\chi_A * \phi_m\}_{m=1}^\infty$, сходящейся в $L^p(H)$. Поэтому из произвольности ϕ следует требуемое утверждение. \square

Доказательство следствия 1. Докажем, что f представима в виде (1) для некоторого $u \in \mathcal{E}'(H)$. Из [9, теорема 7.3.2] следует, что при указанном условии уравнение (1) разрешимо в пространстве $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть K — выпуклая оболочка носителя функции f , тогда K содержится в H . Из (1) следует, что $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ на открытом множестве $\mathbb{R}^n \setminus K$ для любого решения $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ уравнения (1). Из эллиптичности оператора Δ получаем, что u вещественно аналитична на $\mathbb{R}^n \setminus K$. Таким образом, носитель u содержится в H и требуемое утверждение доказано. \square

Доказательство следствия 2. Из определения функции f следует, что $f \in L^p(H)$ (см. [7, теорема 1.3]). Докажем, что множество нулей преобразования Фурье функции f содержит сферу в \mathbb{R}^n радиуса $\lambda > 0$ с центром в нуле. Из радиальности и интегрируемости функции v следует, что \widehat{v} также радиальная функция, непрерывная на \mathbb{R}^n . Отсюда и из определения преобразования Фурье вытекает, что

$$\widehat{v}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(y)e^{-i(y,x)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} v(-y)e^{-i(y,x)} dy = \overline{\widehat{v}(x)},$$

то есть функция \widehat{v} вещественнозначна. Предположим, что \widehat{v} не обращается в нуль в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда \widehat{v} сохраняет знак в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Следовательно, либо $\widehat{v} \geq 0$, либо $\widehat{v} \leq 0$ в \mathbb{R}^n . В силу условия 2) отсюда вытекает (см. [4, теорема 1.6.2]), что $\widehat{v} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Это означает, что для почти всех x имеет место формула обращения

$$v(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{v}(y)e^{i(y,x)} dy$$

(см. [4, теорема 1.6.2]). Из этой формулы следует, что $v = w$ почти всюду для некоторой функции $w \in C(\mathbb{R}^n)$. Это противоречит условию 3), поэтому $\widehat{v}(y) = 0$ для некоторого $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Полагая $\lambda = |y|$,

отсюда и из радиальности \widehat{v} заключаем, что $\widehat{v} = 0$ на сфере $|y| = \lambda$ в \mathbb{R}^n . В силу равенства $\widehat{f} = \widehat{uv}$ делаем вывод, что функция f удовлетворяет условиям следствия 1 и требуемое утверждение доказано. \square

Доказательство следствия 3. Из условия и доказательства следствия 2 вытекает, что функция $f(x) = v(x-h)$ удовлетворяет условиям следствия 1. Отсюда и из следствия 1 имеем требуемое утверждение. \square

Доказательство следствия 4. Из условия следует, что функция $v = \chi_A$ удовлетворяет условиям следствия 3 при любом $p \in [2, +\infty)$. Отсюда и из следствия 3 получаем требуемое утверждение. \square

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать, что всякий линейный непрерывный функционал Ψ на $L^p(\mathcal{O})$, аннулирующий все функции $g_{\lambda,r}(x-h)$ указанного вида, аннулирует все пространство $L^p(\mathcal{O})$. По теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в пространстве $L^p(H)$ любой такой функционал имеет вид

$$\Psi(g) = \int_{\mathcal{O}} g(x)f(x)dx, \quad g \in L^p(\mathcal{O}), \quad (27)$$

где $f \in L^q(\mathcal{O})$, $q = p/(p-1)$. Поскольку Ψ аннулирует указанные выше функции, получаем, что

$$f * g_{\lambda,r} = 0 \quad (28)$$

на области определения. Отсюда и из (2) вытекает, что

$$f * (\Delta g_{\lambda,r} + \lambda^2 g_{\lambda,r}) = f * \chi_r = 0 \quad (29)$$

для всех $r \in N_\lambda$. Из последнего равенства и леммы 2 заключаем, что в полупространстве H функция f совпадает почти всюду с вещественно аналитической функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0. \quad (30)$$

С другой стороны, из (28) вытекает, что

$$(\Delta f + \lambda^2 f) * g_{\lambda,r} = 0. \quad (31)$$

Тогда из теоремы единственности для решений уравнения свертки (см. [4, теорема 3.2.1]) получаем, что равенство (30) выполнено в смысле распределений на всем \mathcal{O} . В силу эллиптичности оператора

Δ отсюда следует, что f совпадает почти всюду в \mathcal{O} с вещественно аналитической функцией. Кроме того, имеет место равенство

$$(f * g_{\lambda,r})(x) = 2^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \widetilde{g_{\lambda,r}}(\lambda) f(x), \quad (32)$$

где функция $\widetilde{g_{\lambda,r}}$ задается равенством

$$\widetilde{g_{\lambda,r}}(z) = \int_{B_r} g_{\lambda,r}(x) \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(z|x|) dx \quad (33)$$

и $\mathbf{I}_\nu(z) = J_\nu(z) z^{-\nu}$ (см. [4, формула (1.7.9)]). Из определения $\widetilde{g_{\lambda,r}}$ и $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}$ имеем

$$\widetilde{g_{\lambda,r}}(\lambda) = \frac{1}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \int_{B_r} \left(\mathbf{I}_{\frac{n}{2}} - 1(\lambda|x|) \right)^2 dx - \int_{B_r} \mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|) dx. \quad (34)$$

Поскольку функция $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)$ принадлежит классу $V_r(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [4, лемма 2.1.1]), второй интеграл в правой части равенства (34) равен нулю. Учитывая, что первый интеграл в (34) положителен, отсюда заключаем, что $\widetilde{g_{\lambda,r}}(\lambda) \neq 0$. Теперь равенства (32) и (28) показывают, что $f = 0$ в \mathcal{O} . Таким образом, $\Psi(g) = 0$ для всех $g \in L^p(\mathcal{O})$ и теорема 2 доказана. \square

Литература

- [1] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, М.: Наука, 1965, 346 с.
- [2] R. E. Edwards, *Fourier series a modern introduction*, New York: Springer, 1982, 514 p.
- [3] L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, New Jersey: Princeton, 1953, 321 p.
- [4] V. V. Volchkov, *Integral Geometry and Convolution Equations*, Dordrecht: Kluwer, 2003, 454 p.
- [5] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*, London: Springer, 2009, 671 p.
- [6] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Basel: Birkhäuser, 2013, 592 p.
- [7] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, М.: Мир, 1974, 523 с.
- [8] О. А. Очаковская, *Теоремы о шаровых средних для решений уравнения Гельмгольца на неограниченных областях // Изв. РАН. Сер. матем.*, **76** (2012), No. 2, 161–170.

-
- [9] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 1.*, М.: Мир, 1986, 462 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Оксана
Александровна
Очаковская**

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
E-Mail: oshakovskaja@yandex.ua