Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 3, 408 – 420

Конструктивные разреженные тригонометрические приближения для функций обобщенной смешанной гладкости

Сергей А. Стасюк

(*Представлена В.Я. Гутлянским*)

Аннотация. Получены как порядковые оценки (в случае приближения в равномерной метрике), так и точные по порядку оценки (в случае приближения в интегральной метрике) для наилучшего m-членного тригонометрического приближения периодических функций обобщенной смешанной гладкости из классов, близких классам типа Никольского–Бесова. При этом каждая из верхних оценок реализуется конструктивным методом, основанным на жадных алгоритмах.

2010 MSC. 41A10, 41A25, 41A30, 41A46, 41A63.

Ключевые слова и фразы. Нелинейное приближение, разреженное приближение, обобщенная смешанная гладкость, порядковые оценки.

1. Введение

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с получением как порядковых оценок (в случае приближения в равномерной метрике), так и точных по порядку оценок (в случае приближения в интегральной метрике) для наилучших m-членных тригонометрических приближений классов периодических функций нескольких переменных, которые близки к функциональным классам типа Никольского–Бесова с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности специального вида. Отметим, что полученные оценки сверху реализуются конструктивными методами, основанными на жадных алгоритмах, т. е. являются конструктивными оценками сверху для наилучших m-членных тригонометрических приближений упомянутых классов типа Никольского–Бесова обобщенной смешанной гладкости.

Статья поступила в редакцию 16.08.2016
Работа выполнена при частичной поддержке FP7-People-2011-IRSES (проект № 295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences)).

ISSN 1810 – 3200.

Пусть $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, $\mathbb{T}^d := \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, — пространство функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$, 2π-периодических по каждой переменной и суммируемых в степени p, $1 \le p < \infty$ (соответственно существенно ограниченных при $p = \infty$), на $\mathbb{T}^d$, с такой нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} := \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|.$$

Пусть $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — заданная функция типа смешанного модуля непрерывности порядка l, т.е. функция, определенная и непрерывная при $t_j \ge 0$, $j = 1, \dots, d$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Omega(\mathbf{t}) > 0$, $t_j > 0$, $j = 1, \dots, d$; $\Omega(\mathbf{t}) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;

2) $\Omega(\mathbf{t})$ возрастает по каждой переменной;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le C \prod_{j=1}^d m_j^l \Omega(\mathbf{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$.

Предполагаем, что функция $\Omega(\mathbf{t})$ дополнительно удовлетворяет условиям (S^α), (S_γ), которые называют условиями Бари–Стечкина [1] и которые опишем в терминах двух понятий, предложенных С. Н. Бернштейном [2].

Неотрицательная функция $\phi(\tau)$, $\tau \in (0, \infty)$ почти возрастает (убывает), если существует постоянная $C_1 > 0$ ($C_2 > 0$) такая, что $\phi(\tau_1) \le C_1 \phi(\tau_2)$ ($\phi(\tau_1) \ge C_2 \phi(\tau_2)$) для любых τ_1, τ_2, $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Функция одной переменной $\varphi(\tau) \ge 0$ удовлетворяет условию (S^α), если существует $\alpha > 0$ такое, что функция $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ почти возрастает при $\tau > 0$.

Функция $\varphi(\tau) \ge 0$ удовлетворяет условию (S_γ), если существует γ, $0 < \gamma < l$, такое, что функция $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ почти убывает при $\tau > 0$.

Будем говорить, что функция $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ удовлетворяет условиям (S^α) и (S_γ), если она удовлетворяет этим условиям по каждой переменной t_j при фиксированных значениях остальных переменных.

Множество функций Ω, для которых выполняются сформулированные выше условия 1–3, а также условия Бари–Стечкина (S^α) и (S_γ), будем обозначать через $\Phi_{\alpha,\gamma}$.

Заметим, что более детально со свойствами смешанных модулей непрерывности можно ознакомиться в обзоре [3].

Для $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,\gamma}$ пространство $MB^\Omega_{p,\theta}$ определяется следующим образом (см. [4] ($\theta = \infty$) и [5] ($1 \le \theta < \infty$)):

$$MB^\Omega_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \ ||f||_{MB^\Omega_{p,\theta}} < \infty \right\}, \tag{1.1}$$

где

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} := \left(\sum_{\mathbf{s}} \left(\Omega(2^{-\mathbf{s}})\right)^{-\theta} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \ \ 1 \leq \theta < \infty, \tag{1.2}$$

$$||f||_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} := ||f||_{MH^{\Omega}_p} := \sup_{\mathbf{s}} \frac{||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p}{\Omega(2^{-\mathbf{s}})} \ , \tag{1.3}$$

а $\Omega(2^{-\mathbf{s}}) := \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$, $\delta_{\mathbf{s}}(f) := \delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) := (f * \mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})})(\mathbf{x})$, $\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})} := \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) := k_1 x_1 + \cdots + k_d x_d$, $\rho(\mathbf{s}) := \big\{\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) : \ 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, s_j \in \mathbb{Z}_+, k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, d\big\}$ (символом “$*$” обозначена операция свёртки двух функций, т. е. $(\varphi * g)(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-d} \displaystyle\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ для $\varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d)$).

Заметим, что при $\theta = \infty$ $MB^{\Omega}_{p,\infty} \equiv MH^{\Omega}_p$. Шкала пространств $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ является естественным обобщением шкалы функциональных пространств (смешанной гладкости) Никольского–Бесова $MB^r_{p,\theta}$ (см., например, [6, 7]) и $MB^{\Omega}_{p,\theta} \equiv MB^r_{p,\theta}$ при $\Omega(\mathbf{t}) = t_1^{r_1} \ldots t_d^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = 1, \ldots, d$. Заметим, что при предельном значении параметра θ, т.е. при $\theta = \infty$, $MB^r_{p,\theta} \equiv MH^r_p$ — пространства С.М. Никольского, а при конечном значении параметра θ, т.е. при $1 \leq \theta < \infty$, $MB^r_{p,\theta}$ — пространства О.В. Бесова. Иногда функциональные пространства $MB^r_{p,\theta}$, $1 \leq \theta \leq \infty$, называют пространствами Никольского–Бесова–Аманова (см., например, [8, 9]).

Единичные шары пространств $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ будем обозначать $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ и называть их классами. С аппроксимативной точки зрения классы $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ с мажорантой $\Omega \in \Phi_{\alpha,\gamma}$ наиболее общего вида исследовались в ограниченном числе работ (см., например, [10–12, 14, 15], а также [16] для непериодических функций), в отличие от случая, когда Ω имеет вид (1.4).

Итак, далее будем рассматривать пространства $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ в случае, когда гладкостная функция Ω имеет вид

$$\Omega(\mathbf{t}) = \omega(t_1 \ldots t_d), \tag{1.4}$$

где $\omega(\tau)$, $\omega \in \Phi_{\alpha,\gamma}$, — функция одной переменной типа модуля непрерывности порядка l, $l \in \mathbb{N}$. Для пространств $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ с функцией Ω, определяемой с помощью (1.4), будем использовать обозначение $MB^{\omega}_{p,\theta}$ вместо $MB^{\Omega}_{p,\theta}$.

Наряду с пространствами $MB^{\omega}_{p,\theta}$ рассмотрим близкие к ним пространства $MH^{\omega}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,\gamma}$, которые определяются таким образом:

$$MH^{\omega}_{p,\theta} := \Big\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \ ||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} < \infty \Big\}, \tag{1.5}$$

где

$$||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} := \sup_{j} \left(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \Big(\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1})\Big)^{-\theta} \; ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \qquad (1.6)$$

а $||\mathbf{s}||_1 := s_1 + \cdots + s_d$.

При $\theta = \infty$ полагаем $MH^{\omega}_{p,\infty} \equiv MH^{\omega}_{p}$, а $||f||_{MH^{\omega}_{p,\infty}} := ||f||_{MH^{\omega}_{p}}$ (см. (1.3)).

Для определенных выше функциональних пространств, исходя из определений (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), (1.6), виполняются такие вложения:

$$MB^{\omega}_{p,\theta} \subset MH^{\omega}_{p,\theta} \subset MH^{\omega}_{p}, \quad 1 \le \theta < \infty, \qquad (1.7)$$

$MH^{\omega}_{p,\theta_1} \subset MH^{\omega}_{p,\theta_2}, \quad 1 \le \theta_1 < \theta_2 < \infty$.

Через $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta}$ и $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta}$ обозначим единичные шары пространств $MB^{\omega}_{p,\theta}$ и $MH^{\omega}_{p,\theta}$ соответственно, т.е.

$$\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta} := \Big\{ f \in MB^{\omega}_{p,\theta} : \; ||f||_{MB^{\omega}_{p,\theta}} \le 1 \Big\}, \qquad (1.8)$$

$$\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta} := \Big\{ f \in MH^{\omega}_{p,\theta} : \; ||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} \le 1 \Big\}. \qquad (1.9)$$

В случае $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 0$, имеем $\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta} \equiv \mathbf{MB}^{r}_{p,\theta}$, $\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta} \equiv \mathbf{MH}^{r}_{p,\theta}$. Классы $\mathbf{MH}^{r}_{p,\theta}$ введены В.Н. Темляковым [17]. Вопросы, связанные с нахождением порядковых оценок нелинейного приближения классов $\mathbf{MH}^{r}_{p,\theta}$ изучались в [17–20] (для m-членного приближения по тригонометрической системе) и в [21] (для m-членного приближения по тензорной системе Хаара).

Пусть Θ_m — произвольный набор из m точек с целочисловой решетки $\mathbb{Z}^d$. Для

$$P(\Theta_m, \mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{n}_{\mathbf{k}}, \mathbf{x})}, \quad c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C},$$

и $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ рассмотрим величину

$$\sigma_m(f)_q := \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m, \cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_m, \cdot)||_q, \qquad (1.10)$$

которая называется наилучшим m-членным тригонометрическим приближением функции f в метрике пространства $L_q(\mathbb{T}^d)$ и является одним из видов разреженного тригонометрического приближения.

Для функционального класса $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ положим

$$\sigma_m(F)_q := \sup_{f \in F} \sigma_m(f)_q. \qquad (1.11)$$

Детальнее с историей исследования величин (1.10) и (1.11) можно ознакомиться, например, из монографии [22], обзора [19], и работ [17, 18, 23]. Касательно исследования поведения величины $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ с целью установления для нее порядковых оценок (при определенных соотношениях между параметрами) отметим работы [20, 24–26].

Приведём ещё необходимые определения и утверждения.

Пусть

$$\Pi(\mathbf{N},d) := \{(a_1,\dots,a_d)\in\mathbb{R}^d : |a_j|\le N_j,\ N_j\in\mathbb{Z}_+,\ j=1,\dots,d\},$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{N},d) := \left\{t :\ t=\sum_{\mathbf{k}\in\Pi(\mathbf{N},d)} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\right\},$$

тогда

$$\dim\mathcal{T}(\mathbf{N},d)=\prod_{j=1}^{d}(2N_j+1)=:\vartheta(\mathbf{N}). \tag{1.12}$$

Далее, обозначим

$$||f||_A := \sum_{\mathbf{k}} \hat{f}(\mathbf{k}),\quad \mathcal{T}^d := \{e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d},\quad \overline{m}:=\max\{1,m\}.$$

Теорема А [17]. *Существуют конструктивные методы аппроксимации типа жадных $G^q_m(\cdot)$, приводящие к m-членным многочленам по системе $\mathcal{T}^d$ со следующими свойствами: при $2\le q<\infty$*

$$||f-G^q_m(f)||_q \le C_1(d)(\overline{m})^{-1/2}q^{1/2}||f||_A, \tag{1.13}$$

$||G^q_m(f)||_A\le C_2(d)||f||_A$, *а при $q=\infty$ и $f\in\mathcal{T}(\mathbf{N},d)$*

$$||f-G^\infty_m(f)||_\infty \le C_3(d)(\overline{m})^{-1/2}(\ln\vartheta(\mathbf{N}))^{1/2}||f||_A, \tag{1.14}$$

$||G^q_m(f)||_A\le C_4(d)||f||_A$.

Заметим, что для двух положительных величин A и B запись $A\asymp B$ означает, что существует положительная величина C такая, что $C^{-1}A\le B\le CA$. В случае $B\ge C^{-1}A$ или $B\le CA$ будем писать $B\gg A$ или $B\ll A$ соответственно. Для величин C_j, $j\in\mathbb{N}$, которые будут встречаться в работе явным или неявным образом, существенным является то, что они не зависят от одного, обозначенного контекстом параметра. В некоторых случаях для величин C_j, $j\in\mathbb{N}$, существенным будет являться то, что они не будут зависеть от нескольких параметров, обозначенных контекстом.

Теорема Б [24, 25]. *Пусть* $1 < p < q \le \infty$, $q > 2$, $1 \le \theta \le \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,\gamma}$, $\alpha > \max\{1/p; 1/2\}$, *тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega\Big(\frac{\log^{d-1} m}{m}\Big)\Big(\frac{m}{\log^{d-1} m}\Big)^{(1/p-1/2)_+}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \tag{1.15}$$

для $2 < q < \infty$, *а*

$$\omega\Big(\frac{\log^{d-1} m}{m}\Big)\Big(\frac{m}{\log^{d-1} m}\Big)^{(1/p-1/2)_+}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \ll \sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_\infty \ll \omega\Big(\frac{\log^{d-1} m}{m}\Big)\Big(\frac{m}{\log^{d-1} m}\Big)^{(1/p-1/2)_+}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+ + 1/2}, \tag{1.16}$$

где $a_+ := \max\{a; 0\}$.

Заметим, что (1.15) и (1.16) установлены в [24] и [25] соответственно.

Установление оценок сверху в (1.15) (1.15) и (1.16) (1.16) базировалось на использовании следующих двух лемм неконструктивного характера (более детально об этом еще будет идти речь в следующем разделе).

Лема А. [27]. *Пусть* $2 < q < \infty$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* $Q(\Theta_N, x)$ *и для любого* $M < N$ *найдется тригонометрический полином* $P(\Theta_M, x)$, *такой что*

$$||Q(\Theta_N,\cdot) - P(\Theta_M,\cdot)||_q \ll \sqrt{NM^{-1}}||Q(\Theta_N,\cdot)||_2,$$

и при этом $\Theta_M \subset \Theta_N$.

Лема Б. [28]. *Для любого тригонометрического полинома* $Q(\Theta_N, x)$ *степени не превосходящей* K *и для любого* $M < N$ *существует тригонометрический полином* $P(\Theta_M, x)$, *такой что*

$$||Q(\Theta_N,\cdot) - P(\Theta_M,\cdot)||_\infty \ll \sqrt{NM^{-1}\log K}||Q(\Theta_N,\cdot)||_2,$$

и при этом $\Theta_M \subset \Theta_N$.

В завершение этого раздела приведем определение еще одного функционального класса, исследуемого в данной работе с аппроксимационной точки зрения и с точки зрения некоторых вложений.

При $f \in L_1$ положим

$$f_j := \sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \delta_{\mathbf{s}}(f), \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

и рассмотрим класс функций

$$\mathbf{MW}_A^{\lambda,b} := \{f : ||f_j||_A \le \lambda(2^{-j})j^{(d-1)b}\},$$

где $\lambda \in \Phi_{\alpha,\gamma}$, $b \in \mathbb{R}$. Заметим, что в случае $\lambda(\tau) = \tau^r$, $r > 0$, классы $\mathbf{MW}_A^{\lambda,b}$ совпадают с классами $\mathbf{MW}_A^{r,b}$, предложенными для рассмотрения В.Н. Темляковым [17].

В следующем, втором, разделе будут приведены полученные результаты и комментарии к ним. Дальнейший, последний, т.е. третий раздел будет содержать доказательства результатов, сформулированных во втором разделе. В завершение текущего раздела отметим, что полученные в данной работе для более широких (за исключением случая, когда $\theta = \infty$) классов оценки их наилучшего m-членного тригонометрического приближения по сути те же, что и в теореме Б. Но отличительной особенностью является то, что оценки сверху при этом реализуются конструктивными методами и в то же время являются конструктивными оценками сверху, которые базируются на жадных алгоритмах, в (1.15) и (1.16).

2. Основные результаты и комментарии к ним

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть $2 \le q \le \infty$, $\lambda \in \Phi_{\alpha,\gamma}$ с некоторым $\alpha > \mu > 0$, тогда имеется конструктивный метод $A_m(\cdot, q, \mu)$, опирающийся на жадные алгоритмы, который для $f \in \mathbf{MW}_A^{\lambda,b}$ приводит к оценке*

$$||f - A_m(f, q, \mu)||_q \ll \lambda\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right) m^{-1/2} (\log m)^{(d-1)b}, \quad 2 \le q < \infty, \tag{2.1}$$

$$||f - A_m(f, \infty, \mu)||_\infty \ll \lambda\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right) m^{-1/2} (\log m)^{(d-1)b+1/2}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Пусть $1 < p < q \le \infty$, $q > 2$, $1 \le \theta \le \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,\gamma}$, $\alpha > \max\{1/p; 1/2\}$, тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}_{p,\theta}^\omega)_q \asymp \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+} (\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \tag{2.3}$$

для $2 < q < \infty$*, а*

$$\omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \ll \sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_\infty \ll \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)+1/2}. \quad (2.4)$$

Оценки сверху обеспечиваются конструктивным методом $A(\cdot, q, \mu)$*, основанным на жадных алгоритмах.*

В завершение сформулированных результатов приведём некоторые комментарии.

Замечание 1. В случаях $\lambda(\tau) = \tau^r$, $r > \mu > 0$ и $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > \max\{1/p; 1/2\}$ лемма 2.1 для классов $\mathbf{MW}^{r,b}_A$ и теорема 2.1 для классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ установлены В.Н. Темляковым [17].

Замечание 2. Сравнивая результаты теоремы 2.1 с результатами теоремы Б, вследствие вложения (1.7) можем записать

$$\omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \ll \sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q \le \sigma_m(\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta})_q \ll \omega\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)\left(\frac{m}{\log^{d-1} m}\right)^{(1/p-1/2)_+}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)+[1-1/q]/2}, \quad (2.5)$$

где $2 < q \le \infty$, а $[a]$ — целая часть числа a.

Из (2.5) делаем вывод о совпадении точных по порядку оценок величины $\sigma_m(F)_q$ на классах $F = \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ и $F = \mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ при $2 < q < \infty$.

В случае $q = \infty$ верхняя и нижняя оценки в (2.5) уже не совпадают по порядку (отличаются на $(\log m)^{1/2}$). Кроме этого, при $1 \le \theta < 2$ удалось достичь улучшения оценки сверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_\infty$ (см. (2.5)) в сравнении с установленной ранее оценкой (1.16).

Замечание 3. Теорема 2.1 дополняет теорему Б в том смысле (см. (2.5)), что для $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ дает оценки сверху, которые являются конструктивными, в то время, как полученные в теореме Б оценки сверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^{\omega}_{p,\theta})_q$ не являлись конструктивными, поскольку построение приближающего m-членного тригонометрического полинома для реализации оценок сверху в (1.15) и (1.16) базировалось на применении неконструктивных лемм А и Б, соответственно.

3. Доказательства результатов

3.1. Доказательство леммы 2.1.

Пусть
$$m \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{3.1}$$
и $f \in \mathbf{MW}_A^{\lambda,b}$. Докажем сначала (2.2). По теореме A для $q = \infty$, учитывая (1.12), имеем

$$||f_j - G_{m_j}^{\infty}(f_j)||_\infty \ll (\overline{m}_j)^{-1/2}(\ln 2^j)^{1/2}||f_j||_A$$
$$\ll (\overline{m}_j)^{-1/2} j^{1/2}\lambda(2^{-j}) j^{(d-1)b}. \tag{3.2}$$

Положим

$$m_j := [2^{n-\mu(j-n)} j^{d-1}], \quad j = n, n+1, \dots, \tag{3.3}$$

$$A_m(f, q, \mu) := S_{Q_n}(f) + \sum_{j>n} G_{m_j}^q(f_j), \quad 2 \le q \le \infty, \tag{3.4}$$

где $S_{Q_n}(f) := (f * \mathcal{D}_{Q_n})(\mathbf{x})$, $\mathcal{D}_{Q_n} := \sum_{\mathbf{k}\in Q_n} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$, $Q_n := \sum_{||\mathbf{s}||_1 \le n} \rho(\mathbf{s})$.

Убедимся, что приближающий полином $A_m(f, q, \mu)$ в действительности содержит по порядку не более, чем m гармоник. Вследствие $\sharp Q_n \asymp 2^n n^{d-1}$, (3.3) и (3.1) имеем

$$\dim A_m(f, q, \mu) = \sharp Q_n + \sum_{j>n} m_j$$

$$\ll 2^n n^{d-1} + 2^{n+\mu n} \sum_{j>n} 2^{-\mu j} j^{d-1} \ll 2^n n^{d-1} \asymp m.$$

Учитывая (3.4), (3.2), (3.3), $\lambda \in \Phi_{\alpha,\gamma}$, $\alpha > \mu > 0$, а также (3.1), получим
$$||f - A_m(f, \infty, \mu)||_\infty \le \sum_{j>n} ||f_j - G_{m_j}^{\infty}(f_j)||_\infty$$

$$\ll \sum_{j>n} (\overline{m}_j)^{-1/2} \lambda(2^{-j}) j^{(d-1)b+1/2}$$

$$\le 2^{-(n+\mu n)/2} \sum_{j>n} \frac{\lambda(2^{-j})}{2^{-\alpha j}} 2^{-(\alpha-\mu/2)j} j^{(d-1)(b-1/2)+1/2}$$

$$\ll 2^{-(n+\mu n)/2} \frac{\lambda(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{j>n} 2^{-(\alpha-\mu/2)j} j^{(d-1)(b-1/2)+1/2}$$

$$\asymp \lambda(2^{-n})2^{-n/2}n^{(d-1)(b-1/2)+1/2} \asymp \lambda\left(\frac{\log^{d-1} m}{m}\right)m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)b+1/2}.$$

Доказательство (2.1) аналогично доказательству (2.2) и, по сути, содержит те же шаги. Отличие состоит лишь в том, что вместо (1.14), использованного для оценки m_j-членного приближения к $f_j \in L_\infty$, мы воспользуемся (1.13) для оценки m_j-членного приближения к $f_j \in L_q$, $2 \le q < \infty$.

Лемма 2.1 доказана. □

3.2. Доказательство теоремы 2.1.

Доказательство. Для начала покажем, что при $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\lambda(\tau) = \omega(\tau)\tau^{-1/p}$, $\omega \in \Phi_{\alpha,\gamma}$ с $\alpha > 1/p$ имеет место вложение

$$\mathbf{MH}^{\omega}_{p,\theta} \subset \mathbf{MW}^{\lambda,1-1/\theta}_{A}. \tag{3.5}$$

Вследствие элементарных преобразований, учитывая (1.3), (1.8) и соотношение

$$\sum_{||s||_1=j} 1 \asymp j^{d-1}, \tag{3.6}$$

для $\theta = \infty$ имеем

$$\begin{aligned} ||f_j||_A &\le \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} ||\delta_{\mathbf{s}}(f_j)||_A \ll \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} 2^{||\mathbf{s}||_1/p}||\delta_{\mathbf{s}}(f_j)||_p \\ &= \omega(2^{-j})2^{j/p} \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} (\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}))^{-1}||\delta_{\mathbf{s}}(f_j)||_p \le \omega(2^{-j})2^{j/p}\,||f||_{MH^{\omega}_p} \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} 1 \\ &\le \omega(2^{-j})2^{j/p} \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} 1 \asymp \omega(2^{-j})2^{j/p}j^{d-1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Далее, аналогично, учитывая (1.6) и (1.9), для $\theta = 1$ получаем

$$\begin{aligned} ||f_j||_A &\ll \omega(2^{-j})2^{j/p} \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} (\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}))^{-1}||\delta_{\mathbf{s}}(f_j)||_p \\ &\le \omega(2^{-j})2^{j/p}\,||f||_{MH^{\omega}_{p,1}} \le \omega(2^{-j})2^{j/p}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для $1 < \theta < \infty$ вследствие неравенства Гельдера, а также (1.6), (1.9) и (3.6) имеем

$$||f_l||_A \ll \omega(2^{-j})2^{j/p} \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} (\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}))^{-1}||\delta_{\mathbf{s}}(f_j)||_p$$

$$\leq \omega(2^{-j})2^{j/p}\bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j}((\omega(2^{-||\mathbf{s}||_1}))^{-1}||\delta_{\mathbf{s}}(f_j)||_p)^{\theta}\bigg)^{1/\theta}\bigg(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j}1\bigg)^{1/\theta'}$$

$$\ll \omega(2^{-j})2^{j/p}\,||f||_{MH^{\omega}_{p,\theta}} j^{(d-1)/\theta'} \leq \omega(2^{-j})2^{j/p} j^{(d-1)(1-1/\theta)}, \qquad (3.9)$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

Из (3.7), (3.8), (3.9) делаем вывод о выполнении вложения (3.5).

Далее, в случаях $1 < p \leq 2 < q < \infty$ и $1 < p \leq 2$, $q = \infty$, применяя лемму 1 с $\lambda(\tau) = \omega(\tau)\tau^{-1/p}$, $b = 1 - 1/\theta$, вследствие вложения (3.5), для $f \in MH^{\omega}_{p,\theta}$ получаем соответственно

$$\sigma_m(f)_q \leq ||f - A_m(f,q,\mu)||_q \ll \lambda\bigg(\frac{\log^{d-1} m}{m}\bigg) m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)b}$$

$$= \omega\bigg(\frac{\log^{d-1} m}{m}\bigg)\bigg(\frac{m}{\log^{d-1} m}\bigg)^{1/p-1/2}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \qquad (3.10)$$

и

$$\sigma_m(f)_\infty \leq ||f - A_m(f,q,\mu)||_\infty \ll \omega\bigg(\frac{\log^{d-1} m}{m}\bigg)\bigg(\frac{\log^{d-1} m}{m}\bigg)^{-1/p} \times m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)+1/2}$$

$$= \omega\bigg(\frac{\log^{d-1} m}{m}\bigg)\bigg(\frac{m}{\log^{d-1} m}\bigg)^{1/p-1/2}(\log m)^{(d-1)(1/2-1/\theta)+1/2}. \qquad (3.11)$$

Оценки сверху в случаях $2 < p < q < \infty$ и $2 < p < \infty$, $q = \infty$ получаем вследствие вложения $MH^{\omega}_{p,\theta} \subset MH^{\omega}_{2,\theta}$, $p > 2$, и доказанных выше оценок (3.10) и (3.11) при $p = 2$.

Оценки снизу в (2.3) и (2.4) получаем (см. (2.5)) вследствие применения теоремы Б с учетом вложения (1.7).

Теорема 2.1 доказана.

$\square$

Данная работа была завершена во время пребывания в Centre de Recerca Matemàtica (г. Барселона, Испания) в рамках научно-исследовательской программы по конструктивной теории приближений и гармоническому анализу.

Литература

[1] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. мат. о-ва, **2** (1952), 489–523.

[2] С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений: в 4 т., Т. 2, Конструктивная теория функций (1931–1953), М., Изд-во АН СССР, 1954.

[3] M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov, *Mixed moduli of smoothness in L_p: a survey* // Surveys in Approximation Theory, **8** (2013), 1–57.

[4] Н. Н. Пустовойтов, *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности* // Anal. Math., **20** (1994), No. 1, 35–48.

[5] Y. Sun, H. Wang, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова, **219** (1997), 356–377.

[6] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. МИАН СССР, **178** (1986), 1–112.

[7] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения* // Тр. МИАН СССР, **187** (1989), 143–161.

[8] Т.И. Аманов, *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, Алма-Ата, Наука, 1976.

[9] Г. А. Акишев, *Оценки колмогоровских поперечников классов Никольского–Бесова–Аманова в пространстве Лоренца* // Тр. ИММ УрО РАН, **21** (2015), No. 4, 3–13.

[10] Н. Н. Пустовойтов, *Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности* // Мат. заметки, **65** (1999), No. 1, 107–117.

[11] С. А. Стасюк, *Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$* // Матем. заметки, **87** (2010), No. 1, 108–121.

[12] С. А. Стасюк, *Приближение суммами Фурье и колмогоровские поперечники классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций нескольких переменных* // Тр. ИММ УрО РАН, **20** (2014), No. 1, 247—257.

[13] С. А. Стасюк. *Приближение классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ суммами Валле Пуссена в равномерной метрике* // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, Київ, Ін-т математики НАН України, **11** (2014), No. 4, 308–317.

[14] Н. В. Дерев'янко, *Наближення класів H^{Ω}_{p} періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q* // Укр. мат. журн., **66** (2014), No. 5, 634–644.

[15] Ш. А. Балгимбаева, Т. И. Смирнов, *Оценки поперечников Фурье классов периодических функций со смешанным модулем гладкости* // Тр. ИММ УрО РАН, **21** (2015), No. 4, 78–94.

[16] S. A. Stasyuk, S. Ya. Yanchenko, *Approximation of functions from Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness* // Anal. Math., **41** (2015), No. 4, 311–334.

[17] В. Н. Темляков, *Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости* // Матем. сб., **206** (2015), No. 11, 131—160.

[18] V. N. Temlyakov, *Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness*, arXiv: 1503.00282v1 [math.NA] 1 Mar 2015, 1–30.

[19] D. Dũng, V. N. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic Cross Approximation*, 2016, arXiv: 1601.03978v1 [math.NA] 15 Jan 2016, 1–154.

[20] С. А. Стасюк, *Найкраще m-членне тригонометричне наближення періодичних функцій малої мішаної гладкості з класів типу Нікольського–Бєсова* // Укр. мат. журн., **68** (2016), No. 7, 983–1003.

[21] С. А. Стасюк, *Приближение некоторых гладкостных классов периодических функций многих переменных полиномами по тензорной системе Хаара* // Тр. ИММ УрО РАН, **21** (2015), No. 4, 251—260.

[22] А. С. Романюк, *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*, Київ, Інститут математики НАН України, 2012, Т. 92, Праці Інституту математики НАН України, 353 с.

[23] S. A. Stasyuk, *Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii–Besov classes for small smoothness* // J. Approx. Theory, **177** (2014), 1–16.

[24] С. А. Стасюк, *Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$* // Укр. мат. журн., **54** (2002), No. 3, 381–394.

[25] С. А. Стасюк, *Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці* // Укр. мат. журн., **54** (2002), No. 11, 1551–1559.

[26] А. Ф. Конограй, С. А. Стасюк, *Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q* // Укр. мат. журн., **60** (2008), No. 9, 1206–1224.

[27] Э. С. Белинский, *Приближение плавающей системой экспонент на класах периодических функций с ограниченной смешанной производной* // Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Ярославль, Яросл. ун-т, 1988, 16–33.

[28] E. S. Belinskii, *Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics and estimates of ε-entropy* // Anal. Math., **15** (1989), No. 2, 67–74.

Сведения об авторах

Сергей Андреевич Стасюк
Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: stasyuk@imath.kiev.ua