Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 3, 421 – 448

Многочлены с целыми коэффициентами и полиномы Чебышева

Роальд М. Тригуб

Аннотация. Статья посвящена популяризации одной из тем на границе между анализом и теорией чисел, связанной с целочисленными полиномами.

2010 MSC. 11Rxx, 11R04, 12D10, 41A17, 41A29.

Ключевые слова и фразы. Экстремальные свойства многочленов, трансфинитный диаметр, основная теорема о симметричных многочленах, целочисленный полином, теорема Минковского о выпуклых телах, степень алгебраического числа, критерий Эйзенштейна, асимптотический закон распределения простых чисел, аппроксимация функций целочисленными полиномами и полиномами с натуральными коэффициентами, наилучшее приближение константы.

Введение

Пусть
$$q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$$
ненулевой многочлен с целыми коэффициентами (целочисленный полином от z степени не выше n). Здесь c_k $(0 \le k \le n)$ — комплексные числа, а $Re\ c_k$ и $Im\ c_k$ $(0 \le k \le n)$ — целые и $\sum\limits_{k=0}^{n} |c_k|^2 > 0$.

Нули (корни) таких полиномов с вещественными целыми коэффициентами называют алгебраическими числами, а при старшем коэффициенте $c_n = 1$ — целыми алгебраическими числами. Степень алгебраического числа, по определению, равна наименьшей степени такого полинома, нулем которого он является. Другие нули этого полинома называются его алгебраически сопряженными.

Как связан максимум модуля q_n на компакте с его нулями на этом компакте?

Статья поступила в редакцию 15.09.2016

ISSN 1810 – 3200.

Если $|q_n(z_k)| < 1$, где $\{z_k\}_1^m$ — целые алгебраические числа вместе со всеми (алгебраически) сопряженными, то $q_n(z_k) = 0$ $(1 \le k \le m)$.

Действительно,

$$\prod_{k=1}^{m} q(z_k)$$

число целое в силу основной теоремы о симметрических многочленах (см., напр., [1], **11.2**) и по модулю меньше единицы, т.е. равно нулю, а тогда и $q(z_k) = 0$ $(1 \le k \le m)$.

Кронекер доказал, что если z_1 — целое алгебраическое число, а $z_2, \ldots, z_m$ — его сопряженные, то существует полином q_n такой, что $q_n(z_1) \neq 0$, а $q_n(z_k) = 0$ $(2 \le k \le m)$. А если $\{x_k\}_1^m$ — целые алгебраические числа вместе с сопряженными лежат на $[-a, a]$ $(0 < a < 2)$, то $x_k = 2\cos 2\pi y_k$, y_k — рациональные. См., напр., [2].

Д. Гильберт, используя теорему Минковского о выпуклых телах в $\mathbb{R}^n$, указал оценку сверху для малых по модулю q_n на отрезке вещественной оси $\mathbb{R}$ в зависимости от длины отрезка и степени n, конечно. См. ниже в разделе 2.

М. Фекете (1954) нашел критерий, т.е. необходимое и достаточное условие, равномерного приближения непрерывной функции полиномами q_n на отрезке. В этом критерии есть ограничение на длину отрезка и арифметические условия на функцию (см. в разделе 3).

А. О. Гельфонд и Л. Г. Шнирельман связали вопрос о малых по модулю q_n на $[0, 1]$ с распределением простых чисел (см. в разделе 2).

E. Hewitt и H. Zuckerman (1959) доказали, что следующие два множества совпадают (длина отрезка меньше четырех).

I. Множество всех целых алгебраических чисел, лежащих на отрезке вместе с сопряженными.

II. Множество точек отрезка, являющиеся нулями любого полинома q с максимумом модуля на отрезке меньше единицы.

На вопрос С. Н. Бернштейна на I Всесоюзном съезде математиков СССР в Харькове о наилучшем приближении константы полиномами q_n на отрезке вещественной оси, не содержащем целых чисел, сразу откликнулись Р. О. Кузьмин и Л. В. Канторович.

При изучении этого и других вопросов аппроксимации функций в зависимости от степени полиномов q_n понадобились экстремальные свойства полиномов, а именно, полиномов Чебышева (см. раздел 1), как и арифметические свойства их коэффициентов (см. раздел 3). Публикации о приближении целочисленными полиномами до 1960 г. имели еще Г. Сегё и А. О. Гельфонд (см. обзорную статью автора [3] (1971)).

А теорему о равномерной аппроксимации полиномами q_n см. также в [4].

Отметим еще, что I. Schur рассмотрел задачу о возможном росте при $n \to \infty$ модуля коэффициента q_n при старшей степени x^n в предположении, что все нули q_n простые и лежат на $[-1,1]$. См. уточнение в [5].

В разделе 1 настоящей статьи приведены нужные экстремальные свойства полиномов (Чебышева и др.).

В разделе 2 изучается вопрос о малых максимумах модулей q_n.

В разделе 3 приведены некоторые результаты о приближении функций многочленами с целыми и натуральными коэффициентами.

1. Трансфинитный диаметр и полиномы Чебышева

Через p_n будем обозначать полином степени не выше n с любыми коэффициентами.

Пусть E — бесконечное множество комплексных чисел, являющееся компактом в $\mathbb{C}$ и $p_n^* = p_n^*(E)$ — полином со старшим коэффициентом единица такой, что

$$\left\|p_n^*\right\|_\infty = \left\|p_n^*\right\|_{C(E)} = \max_E \left|p_n^*(z)\right| = \min_{\{c_k\}} \max_{z\in E} \left|z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k\right|$$

(такой полином существует при любом n в силу компактности шара в конечномерном пространстве).

М. Фекете (1923) ввел и изучил понятие трансфинитного диаметра $d(E)$:

$$d(E) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\|p_n^*\right\|_\infty}.$$

Существование предела вытекает из следующей леммы (Фекете): *если положительная последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию: $x_{n+m} \le x_n \cdot x_m$ (m и $n \in \mathbb{N}$), то существует предел $\sqrt[n]{x_n}$ при $n \to \infty$.*

Действительно, при $x_n = \left\|p_n^*\right\|$

$$x_{n+m} = \left\|p_{n+m}^*\right\|_\infty \le \left\|p_n^* \cdot p_m^*\right\|_\infty \le \left\|p_n^*\right\|_\infty \cdot \left\|p_m^*\right\|_\infty = x_n \cdot x_m.$$

При этом в определении $d(E)$ можно брать только полиномы со всеми нулями в E.

Очевидно, что для любого $c \in \mathbb{C}$ $d(E+c) = d(E)$, а $d(cE) = |c|d(E)$.

Примеры

Трансфинитный диаметр круга (или просто окружности) равен радиусу, эллипса — полусумме его полуосей, прямолинейного отрезка — четверти его длины, компакта из двух отрезков $[-\beta,-\alpha]\cup[\alpha,\beta]$ $(0<\alpha<\beta)$ — $\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2-\alpha^2}$, лемнискаты $\left|z^m+...\right|\le L$ — $\sqrt[m]{L}$.

Полином

$$T_n=\frac{p_n^*}{\left\|p_n^*\right\|_\infty}$$

называют полиномом Чебышева компакта E.

Среди всех полиномов степени n с данной нормой (единица) он имеет наибольший модуль старшего коэффициента, а этот коэффициент положительный.

Определим полином Чебышева для $E=[-1,1]$ при $n\ge 1$ $(T_0\equiv 1)$. На вещественной оси рассматривают полином p_n (и q_n) с вещественными коэффициентами.

Среди всех полиномов степени $n\ge 1$ со старшим коэффициентом как у T_n, полином Чебышева имеет наименьшую норму (область значений в $[-1,1]$). При этом область значений совпадает с $[-1,1]$, так как в противном случае добавлением к T_n малого числа по модулю можно уменьшить sup-норму, не меняя старшего коэффициента.

Легко видеть, что именно в концах отрезка его модуль равен единице, так как $d(a,b)=\frac{b-a}{2}d(-1,1)$. Таких точек, в которых T_n принимает значения ± 1 с чередующимися знаками должно быть не менее $n+1$ (чебышевский альтернанс).

Действительно, предположим, что имеется только $m\le n$ точек $x_1<x_2<...<x_m$ таких, что при $k\in[1,m]$

$$T_n(x_k)=(-1)^{m-k}\|T_n\|_\infty=(-1)^{m-k}.$$

Тогда при достаточно малом $\delta>0$

$$\max_{[-1,1]}\left|T_n(x)-\delta(x-x_1)...(x-x_{m-1})\right|<\left\|T_n\right\|_\infty=1,$$

а степень полинома и его старший коэффициент не изменились. Противоречие.

И такой полином единственный, так как если $\tilde{T}_n$ — полином с той же нормой и старшим коэффициентом, то у их разности (полином степени $\le n-1$) не менее n нулей и $T_n\equiv\tilde{T}_n$. Для доказательства нужно учесть, что если в двух соседних точках альтернанса одного из них они не совпадают (разность принимает значения разных знаков), то они совпадают в некоторой промежуточной точке. Если же $T_n=\tilde{T}_n$ во внутренней точке альтернанса, то в ней и $T_n'=\tilde{T}_n'$ (локальные экстремумы).

Зная о существовании альтернанса из $(n+1)$-й точки, составляют и решают для определения T_n дифференциальное уравнение

$$\big(1-x^2\big)(y')^2 = n^2\big(1-y^2\big).$$

Здесь определим T_n составляя и решая функциональное уравнение.

Как видно из графика, $T_1(x) = x$, а $T_2(x) = 2x^2 - 1$.

Обозначим нули T_n через $\{\xi_k\}_1^n$: $x_k < \xi_k < x_{k+1}$ $(1 \le k \le n)$.

Тогда полином $2T_n^2(x) - 1$ степени $2n$ с нормой единица имеет $2n+1$ точек альтернанса:

$$x_1, \quad \xi_1, \quad x_2, \quad \xi_2, \quad ..., \quad \xi_n, \quad x_{n+1}.$$

Следовательно, $2T_n^2(x) - 1 \equiv T_{2n}(x)$.

Но и полином $T_n(2x^2-1)$ обладает таким же свойством. Альтернанс ($2n+1$ точек) следующий:

$$-\sqrt{\frac{1+x_{n+1}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{1+x_n}{2}}, \quad ..., \quad \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}, \quad \sqrt{\frac{1+x_{n+1}}{2}}.$$

Так что и $T_n(2x^2-1) \equiv T_{2n}(x)$. Следовательно,

$$2T_n^2(x) - 1 \equiv T_n(2x^2-1).$$

Уже видно, что старший коэффициент T_n равен 2^{n-1}.

Для решения возникшего функционального уравнения $f(2x^2 - 1) = 2f^2(x) - 1$ на $[-1,1]$ сделаем замену $x = \cos t$:

$$2F^2(t) - 1 = F(2t), \qquad F(t) = f(\cos t).$$

Считая, что $F \in C^\infty$ в некоторой окрестности нуля, можно последовательным дифференцированием найти все значения $F^{(k)}(0)$ $(k \ge 0)$.

$F(0) = 1$ или $F(0) = -\frac{1}{2}$, $F'(0) = 0$ (в двух случаях), $F''(0) = \lambda \in \mathbb{R}$ (произвольное) или $F''(0) = 0$. Далее производные определяются однозначно.

Получаем в первом случае $F(t) = \cos\lambda t$ или $F(t) = \mathrm{ch}\lambda t$ $(\lambda > 0)$, а во втором $F(t) \equiv -\frac{1}{2}$.

Но нас интересует решение с нормой единица и периодом 2π. Так что $F(t) = \cos nt$ и $\cos t = x$.

$$T_n(x) = T_n(x;-1,1) = \cos n \arccos x \qquad (x \in [-1,1])$$

или при $x = \cos t$ ($t \in [0, \pi]$), используя формулы Эйлера,

$$T_n(x) = \cos nt = \frac{1}{2}\big(e^{int} + e^{-int}\big) = \frac{1}{2}\Big[(\cos t + i\sin t)^n + (\cos t - i\sin t)^n\Big]$$
$$= \frac{1}{2}\Big[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n\Big]$$
$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} \big(x^2-1\big)^k x^{n-2k} \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

При четном n — это четный полином, а при n нечетном — нечетный.

Точки альтернанса $x_k = \cos\frac{n-k+1}{n}\pi$ $(1 \le k \le n+1)$, а нули $\xi_k = \sin\frac{2k-1}{2n}$ $(1 \le k \le n)$.

Заметим, что, как доказано в [6], существует единственное непрерывное и 2π-периодическое решение уравнения $F(2t) = 2F^2(t) - 1$, определяющее функцию $F(t) = \cos t$.

Приведем еще несколько формул для T_n при $n \ge 1$.

$$T_n\big(T_m(x)\big) = T_{nm}(x), \qquad T_n\Big(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(x^n + \frac{1}{x^n}\Big),$$
$$T_{n+2k}(x) + T_n(x) = 2T_k(x)T_{n+k}(x), \tag{2}$$
$$\big(1-x^2\big)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) \equiv 0,$$
$$\big(1-x^2\big)T_n^{(k+1)}(x) - (2k-1)xT_n^{(k)}(x) + \big(n^2-(k-1)^2\big)T_n^{(k-1)}(x) \equiv 0,$$

Следующие два соотношения легко получить из этого дифференциального уравнения при $x = 1$ и $x = 0$.

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2\big(n^2-1\big)...\big(n^2-(k-1)^2\big)}{(2k-1)!!},$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}. \tag{3}$$

Таким образом,

$$T_n(x) = T_n(x; -1, 1) = 2^{n-1}x^n + ...$$

$$T_n(x; a, b) = T_n\Big(\frac{2x-a-b}{b-a}; -1, 1\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{b-a}\Big)^n x^n + ...,$$

$$T_n(x) = T_n\Big(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}; a, b\Big), \qquad d(a,b) = \frac{b-a}{4}. \tag{4}$$

Понадобятся еще некоторые экстремальные свойства полиномов Чебышева.

I. Среди всех полиномов степени не выше n и максимумом модуля на $[-1,1]$ равным 1, полином Чебышева имеет наибольшие модули коэффициентов.

Точнее: пусть $k\in[0,n]$ и $n(k)=n$ или $n-1$ при $n(k)-k\equiv 0(\mathrm{mod}2)$. Тогда для любого полинома p_n

$$\left|p_n^{(k)}(0)\right|\le \left|T_{n(k)}^{(k)}(0)\right|\cdot\max_{[-1,1]}\left|p_n(x)\right|.$$

Или (см. (4))

$$\left|p_n^{(k)}\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\right|\le\Big(\frac{2}{b-a}\Big)^k\left|T_{n(k)}^{(k)}(0)\right|\cdot\max_{[a,b]}\left|p_n(x)\right|.$$

II. Среди тех же полиномов, что и в I, полиномы Чебышева, как и их производные, вне $(-1,1)$ растут по модулю быстрее всех.

Точнее: для любого полинома p_n и $k\in[0,n]$ при $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

$$\left|p_n^{(k)}(x)\right|\le\left|T_n^{(k)}(x)\right|\cdot\max_{[-1,1]}\left|p_n(x)\right|.$$

Или при $x\in\mathbb{R}\setminus(a,b)$

$$\left|p_n^{(k)}(x)\right|\le\Big(\frac{2}{b-a}\Big)^k\left|T_n^{(k)}\Big(\frac{2x-a-b}{b-a}\Big)\right|\cdot\max_{[a,b]}\left|p_n(x)\right|.$$

Доказательство проведем методом от противного, основываясь на альтернансе из $(n+1)$-й точки, теореме Ролля и количестве нулей ненулевого полинома.

Начнем с доказательства свойства II.

Доказательство. Считая, что $\max\limits_{[-1,1]}\left|p_n(x)\right|=1$, предположим, что существует $x_0\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$:

$$\left|p_n^{(k)}(x_0)\right|>\left|T_n^{(k)}(x_0)\right|.$$

Тогда при некотором $\delta\in(-1,1)$

$$P_n(x)=T_n(x)-\delta p_n(x),\qquad P_n^{(k)}(x_0)=0.$$

В точках альтернанса $\{x_k\}_1^{n+1}$

$$P_n(x_k)(-1)^{n+1-k}>0.$$

Следовательно, полином P_n имеет на $(-1,1)$ n нулей. По теореме Ролля у $P_n^{(k)}$ на $(-1,1)$ не менее $n-k$ нулей. А вместе с x_0 число нулей больше степени $n-k$ ненулевого полинома. Противоречие. $\square$

Доказательство. I. Введем полином (четный или нечетный)

$$p_{n(k)}(x) = \frac{1}{2}\big(p_n(x) + (-1)^k p_n(-x)\big).$$

Очевидно, что

$$p_{n(k)}^{(k)}(0) = p_n^{(k)}(0), \qquad \max_{[-1,1]} \big|p_{n(k)}(x)\big| \le \max_{[-1,1]} \big|p_n(x)\big|.$$

Поэтому достаточно доказать неравенство:

$$\big|p_{n(k)}^{(k)}(0)\big| \le \big|T_{n(k)}^{(k)}(0)\big| \cdot \max_{[-1,1]} \big|p_{n(k)}(x)\big|.$$

Предположим, что для некоторого полинома p_n

$$\max_{[-1,1]} \big|p_{n(k)}(x)\big| = 1, \qquad \big|p_{n(k)}^{(k)}(0)\big| > \big|T_{n(k)}^{(k)}(0)\big|.$$

Тогда при некотором $\delta \in (-1,1)$ и $m \in [1, n+1]$

$$P_{n(k)} = T_{n(k)} - \delta p_{n(k)}, \quad P_{n(k)}(x_m)(-1)^{n(k)+1-m} > 0, \quad P_{n(k)}^{(k)}(0) = 0.$$

В силу определения полинома Чебышева модуль старшего коэффициента $p_{n(k)}$ не больше старшего коэффициента $T_{n(k)}$. Следовательно, степень $P_{n(k)}$ равна $n(k)$.

Из-за альтернанса полином $P_{n(k)}$ имеет ровно $n(k)$ нулей, а в силу теоремы Ролля $P_{n(k)}^{(k-1)}$ имеет ровно $n(k)-k+1$ нулей (и такова же его степень). Но это нечетный полином и $P_{n(k)}^{(k-1)}(0) = 0$. Но еще $P_{n(k)}^{(k)}(0) = 0$ и число нулей больше степени.

Противоречие доказывает I. □

Г. Пойя доказал, что для любого компакта $E \subset \mathbb{R}$ с мерой Лебега $h > 0$

$$\max_{x \in E} \big|x^n + ...\big| \ge 2\Big(\frac{h}{4}\Big)^n$$

и равенство имеет место лишь в случае отрезка.

А П. Эрдеш высказал гипотезу, что длина графика T_n на $[-1,1]$ наибольшая среди графиков полиномов степени n и максимумом модуля 1 на $[-1,1]$.

Эту гипотезу подтвердили независимо А. Г. Бакан (Киев) и Б. Боянов (София) в 1981–1982 г.г.

Замечание 1 (L_p-нормы)**.** Если в определении трансфинитного диаметра отрезка заменить sup-норму на L_p-норму, то при любом $p \in [1, +\infty)$

$$d(a,b)_p = \lim_{n\to\infty} \Big(\min_{\{c_k\}} \int\limits_a^b \Big| x^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k \Big|^p dx \Big)^{\frac{1}{np}} = d(a,b) = \frac{b-a}{4}.$$

Это следует из следующей цепочки неравенств ($[a,b] = [-1,1]$)

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \|p_n\|_\infty \le \|p_n\|_1 \le 2^{1-\frac{1}{p}} \|p_n\|_p \le 2\|p_n\|_\infty.$$

Третье (последнее) неравенство очевидно, а второе следует из неравенства Гельдера.

Выведем первое неравенство из II при $x = 1$:

$$\big|p_n'(1)\big| \le T_n'(1) \cdot \|p_n\|_\infty = n^2 \|p_n\|_\infty.$$

При фиксированном $x \in [-1,1]$ введем полином от y

$$p_{n,x}(y) = p_n\Big(\frac{1+y}{2}(1 \pm x) - 1\Big).$$

Очевидно, что при $y \in [-1,1]$

$$\frac{1+y}{2}(1 \pm x) - 1 \in [-1,1].$$

Поэтому

$$\frac{1 \pm x}{2} \big|p_n'(\pm x)\big| = \Big| \Big\{ \frac{d}{dy} p_{n,x}(y) \Big\}_{y=1} \Big| \le T_n'(1) \cdot \|p_n\|_\infty.$$

Так что для всех $x \in [-1,1]$ при любом p_n

$$\big|p_n'(x)\big| \le \frac{2}{1+|x|} T_n'(1) \cdot \|p_n\|_\infty \le 2T_n'(1) \cdot \|p_n\|_\infty.$$

Следовательно, для $x \in [-1,1]$

$$|p_n(x)| = \Big| \frac{d}{dx} \int\limits_x^1 p_n(y)dy \Big| \le 2(n+1)^2 \max_{[-1,1]} \Big| \int\limits_x^1 p_n(y)dy \Big| \le 2(n+1)^2 \|p_n\|_1$$

и первое неравенство доказано.

На самом деле, для отрезка $[-1,1]$ при любом $k \in [1,n]$

$$\big\|p_n^{(k)}\big\|_\infty \le T_n^{(k)}(1) \cdot \|p_n\|_\infty.$$

Это классическое неравенство А. А. Маркова ($k = 1$) и В. А. Маркова ($k \geq 2$).

А А. И. Коркин и Е. И. Золотарев доказали, что при $p = 1$

$$\min_{\{c_k\}} \int_a^b \Big| x^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k \Big| dx = 4\Big(\frac{b-a}{4}\Big)^{n+1}$$

и min равен L_1-норме производной полинома Чебышева $T'_{n+1}(x; a, b)$ при соответствующей нормировке.

Полиномам Чебышева посвящена книга [7].

Рассмотрим теперь аналогичную I задачу с заменой sup-нормы на L_2-норму на $[-1, 1]$.

Ответ в задаче о наибольшем старшем коэффициенте в L_2 с весом (Якоби, напр.) дают соответствующие ортогональные полиномы при необходимой нормировке.

Напр.,

$$\min_{\{c_k\}} \int_{-1}^{1} \Big| x^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k \Big|^2 dx = \int_{-1}^{1} \big| p_n^*(x) \big|^2 dx,$$

где p_n^* — полином Лежандра

$$p_n^*(x) = \frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

$$\int_{-1}^{1} \big(p_n^*(x)\big)^2 dx = \Big(\frac{n!}{(2n)!}\Big)^2 (2n)! \int_{-1}^{1} \big(1 - x^2\big) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \asymp 4^n \sqrt{n}$$

(применяем n-кратное интегрирование по частям и формулу Стирлинга).

Отсюда

$$\begin{aligned} &\min_{\{c_k\}} \Big(\int_a^b \Big| x^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k \Big|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad = \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^{n+\frac{1}{2}} \min_{\{b_k\}} \Big(\int_{-1}^{1} \Big| t^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k \Big|^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \asymp n^{\frac{1}{4}} \Big(\frac{b-a}{4}\Big)^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

III. Если $\mu > -\frac{1}{2}$ *и* $\{p_k\}_1^n$ *— различные числа больше* $-\frac{1}{2}$, *то*

$$\min_{\{c_k\}_1^n} \int\limits_0^1 \Big| t^\mu + \sum_{k=1}^n c_k t^{p_k} \Big|^2 dt = \frac{1}{2\mu+1} \prod_{k=1}^n \Big(\frac{p_k - \mu}{p_k + \mu + 1} \Big)^2.$$

Ответ в задаче о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве выражается через определители Грама, а определители Грама в этом случае вычислены (см.[8]).

IV. Если $2m+1$ *и* $s+1 \in \mathbb{N}$, *то при любом* $N \in \mathbb{N}$ *и* $N_1 = \left[\frac{N+1}{2}\right]$

$$\frac{1}{\Big|T_{N(2m+1)}^{(2m+1)}(0)\Big|} \le \min_{\{a_k\}} \max_{[-1,1]} \Big| x^{2m+1} + x^{2m+1+2s} \sum_{k=1}^N a_k x^{2k} \Big|$$

$$\le (2m+1) \min_{\{b_k\}} \int\limits_0^1 \Big| x^{2m} + x^{2m+2s} \sum_{k=1}^N b_k x^{2k} \Big| dx$$

$$\le (2m+1) \min_{\{c_k\}} \int\limits_0^1 \Big| x^m + x^{m+s} \sum_{k=1}^{N_1} c_k x^{2k} \Big|^2 dx \le (2m+1)\gamma_{s,m}(N),$$

где

$$\gamma_{s,m}(N) = \binom{s+2m+1}{2m+1} \binom{N_1+s+2m+1}{2m+1}^{-1}.$$

Доказательство. Первое неравенство в IV следует из I (sup-норма указанного полинома на $[-1,1]$ совпадает с sup-нормой на $[0,1]$ после замены x на $-x$).

Далее очевидно, что

$$\max_{[0,1]} |p(x) - p(0)| \le \int\limits_0^1 \big|p'(x)\big| dx.$$

Очевиден и переход от L_1-нормы к L_2-норме, чтобы применить III:

$$\prod_{k=1}^{N_1} \Big(\frac{2k+s}{2k+s+2m+1} \Big)^2.$$

Но при $k \ge 0$ и $0 \le a < b$

$$\Big(\frac{2k+a}{2k+b} \Big)^2 \le \frac{k+a}{k+b}$$

и

$$\gamma_{s,m}(N)=\prod_{k=1}^{N_1}\frac{k+s}{k+s+2m+1}=\binom{s+2m+1}{2m+1}\binom{N_1+s+2m+1}{2m+1}^{-1}.$$

$\square$

V. В тех же обозначениях, что в IV,

$$\frac{1}{2^{2m+1}T_N^{(2m+1)}(1)}\le\min_{\{a_k\}}\max_{[0,1]}\Big|x^{2m+1}+x^{2m+1+s}\sum_{k=1}^{N}a_kx^k\Big|$$

$$\le(2m+1)\min_{\{b_k\}}\int_0^1\Big|x^{2m}+x^{2m+s}\sum_{k=1}^{N}b_kx^k\Big|dx$$

$$\le(2m+1)\min_{\{c_k\}}\int_0^1\Big|x^{m}+x^{m+s}\sum_{k=1}^{N_1}c_kx^k\Big|^2dx\le(2m+1)\gamma_{s,m}^2(N).$$

Доказательство. Первое неравенство следует из II при $x=1$. А последний min в силу III равен

$$\prod_{k=1}^{N_1}\Big(\frac{k+s}{k+s+2m+1}\Big)^2=\gamma_{s,m}^2(N).$$

$\square$

Замечание 2. При фиксированных m и s, а $N\to\infty$ найден точный порядок убывания наилучшего приближения x^{2m+1} более высокими степенями x в C, L_1 и L_2.

В IV — это $N^{-(2m+1)}$, а в V — $N^{-(4m+2)}$. Существенная разница связана с разным положением нуля: в IV — это внутренняя точка, а в V — граничная.

Кстати, замена $x\mapsto\frac{x}{b}$ $(b>0)$ не изменит порядок этой величины.

2. Целочисленные полиномы с малой нормой

Пусть E — компакт в $\mathbb{C}$, состоящий из бесконечного числа точек, и полином q_n^* такой, что

$$\max_E\big|q_n^*(z)\big|=\min_{q_n\not\equiv0}\max_E|q_n(z)|.$$

По определению

$$q(E)=\lim_{n\to\infty}\max_E\big|q_n^*(z)\big|^{\frac{1}{n}}.$$

Предел существует по той же лемме Фекете (см. в начале раздела 1).

Очевидно, что $d(E) \le q(E)$. Для круга с центром в нуле $q(E) = d(E) = R$. Подробнее о $q(a,b)$ см. ниже.

Полином $q_n \not\equiv 0$ с малой нормой существуют только при $q(E) < 1$.

Проверим, что

$$d(E) < 1 \quad \Rightarrow \quad q(E) < 1$$

и при $d(E) < 1$ существует полином q с нормой меньше единицы и старшим коэффициентом 1.

Если $d(E) < 1$, то существует последовательность полиномов $\{p_n\}$ таких, что при некотором $\rho < 1$

$$\max_E |p_n(z)| = \max_E \left| z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \dots + a_0^{(n)} \right| \le M\rho^n.$$

Через $[a]$ обозначим ближайшее целое к a, $\left|a - [a]\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тогда

$$\max_E \left| p_n(z) - \left(a_{n-1}^{(n)} - \left[a_{n-1}^{(n)}\right] \right) p_{n-1}(z) \right| \le M\rho^n + \frac{1}{\sqrt{2}} M\rho^{n-1}.$$

У этого нового полинома уже первых два коэффициента — целые числа. Продолжая таким же образом, получаем

$$\left| z^n + \left[a_{n-1}^{(n)}\right] z^{n-1} + \dots + [\quad] z^{m+1} + \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu^{(n)} z^\nu \right| \le M\rho^n + \frac{M}{\sqrt{2}} \sum_{k=m+1}^{\infty} \rho^k. \quad (5)$$

Выбираем m так, чтобы при всех $n \ge N$ правая часть была $< \frac{1}{2}$. А так как величины $h_\nu^{(n)} = b_\nu^{(n)} - \left[b_\nu^{(n)}\right]$ ограничены по n, то существуют сходящиеся подпоследовательности и $N_1 \ge N$ и $N_2 \ge N$ такие, что

$$\max_E \left| \sum_{\nu=0}^{m} \left(h_\nu^{(N_1)} - h_\nu^{(N_2)} \right) z^\nu \right| < \frac{1}{2}.$$

А тогда разность двух полиномов из (5) при $n = N_1$ и $n = N_2$, у которых вместо $b_\nu^{(n)}$ стоит $\left[b_\nu^{(n)}\right]$, имеет целые коэффициенты и норму меньше 1.

Далее считаем, что $E = [a,b]$.

Поскольку $d(a,b) = \frac{b-a}{4}$ (см. (4)), то $q(a,b) < 1$ только при $b - a < 4$. А при $b - a \ge 4$ наименее уклоняющимися от нуля является $q_0 \equiv 1$.

Д. Гильберт для оценки сверху $q(a,b)$ в метрике L_2 применил теорему Минковского о выпуклых телах в $\mathbb{R}^n$.

М. Фекете повторил это рассуждение в $C[a,b]$.

Теорема 1 (Гильберт–Фекете). *Для любого отрезка $[a,b]$ существует полином $q_n \not\equiv 0$ такой, что*

$$\max_{[a,b]} |q_n(x)| \le 2(n+1)\Big(\frac{b-a}{4}\Big)^{\frac{n}{2}}.$$

Лемма 1 (Г. Минковский). *В любом замкнутом, выпуклом и симметричным относительно нуля множестве в $\mathbb{R}^n$ с объемом не меньше 2^n содержатся не менее 2^n+1 точек с целыми координатами. В частности, существуют целочисленные ненулевые решения линейной системы неравенств*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_{k,m}x^k\Big| \le b_m \qquad (1 \le m \le n),$$

если

$$\det(a_{k,m})_{k,m=1}^n \ne 0 \qquad \text{и} \qquad \prod_{m=1}^{n} b_m \ge \big|\det(a_{k,m})\big|.$$

См., напр., [9]. См. также [10].

Доказательство теоремы 1. Если q_n разложить по полиномам Чебышева

$$T_m(x;a,b) = \cos m \arccos \frac{2x-a-b}{b-a} = \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{b-a}\Big)^m x^m + ...,$$

а именно,

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{m=0}^{n} a_m T_m(x;a,b),$$

то

$$\max_{[a,b]} |q_n(x)| \le \sum_{m=0}^{n} |a_m|$$

и задача сводится к подбору целых $\{c_k\}_1^n$, чтобы $|a_m|$ $(0 \le m \le n)$ были как можно меньше.

Линейные формы $\{a_m\}$ имеют треугольную матрицу с определителем

$$\Delta = \frac{1}{2}\prod_{m=0}^{n} 2\Big(\frac{b-a}{4}\Big)^m = 2^n\Big(\frac{b-a}{4}\Big)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Поэтому можно подобрать целые $\{c_k\}_1^n$, не все равные нулю, такие, что

$$|a_m| \le \Delta^{\frac{1}{n+1}} \le 2\Big(\frac{b-a}{4}\Big)^{\frac{n}{2}}.$$

Но тогда

$$|q_n(x)| \le \sum_{m=0}^{n} |a_m| \le 2(n+1)\Big(\frac{b-a}{4}\Big)^{\frac{n}{2}}.$$

□

Так что $q(a,b) \le \sqrt{d(a,b)}$.

Как доказано в замечании 1 (раздел 1), в любой метрике $L_p[a,b]$, $p \ge 1$,

$$q(a,b)_p = q(a,b).$$

Для некоторых отрезков можно указать оценку снизу для $q(a,b)$.

Теорема 2. *В случае отрезка* $\left[\frac{1}{m+4}, \frac{1}{m}\right]$ $(m \in \mathbb{N})$

$$q\Big(\frac{1}{m+4}, \frac{1}{m}\Big) \ge \frac{2}{m+2+\sqrt{m^2+4m}}.$$

А при $m \to \infty$

$$q\Big(\frac{1}{m+4}, \frac{1}{m}\Big) = \sqrt{d\Big(\frac{1}{m+4}, \frac{1}{m}\Big)} + O\Big(d\Big(\frac{1}{m+4}, \frac{1}{m}\Big)\Big).$$

Доказательство. Все коэффициенты полинома Чебышева для [-2,2]

$$T_{n+2}(x;-2,2) = 2T_{n+2}\Big(\frac{x}{2}\Big) = x^{n+2} + ...$$

целые. Если учесть, что $T_1(x) = x$, а $T_2(x) = 2x^2 - 1$, то это следует, напр., из рекуррентного соотношения (2):

$$2T_{n+2}\Big(\frac{x}{2}\Big) = x\Big(2T_{n+1}\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big) - 2T_n\Big(\frac{x}{2}\Big).$$

Его нули лежат на $[-2,2]$ вместе с сопряженными.

Пусть $n+2$ — число простое. Убедимся в том, что все нули четного полинома

$$\frac{1}{x}\cdot 2T_{n+2}\Big(\frac{x}{2}\Big)$$

алгебраические числа степени $n+1$.

Коэффициенты этого полинома известны (см. (3)):

$$\frac{1}{x}\cdot 2T_{n+2}\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^k \frac{n+2}{n+2-k}\binom{n+2-k}{k} x^{n+1-2k}.$$

Применим следующий признак Эйзенштейна неприводимости над кольцом целых чисел (см., напр., [1], **6.2**):

если свободный член целочисленного полинома (значение его в нуле) делится на простое число p, но не делится на p^2, а все остальные коэффициенты, кроме старшего, делятся на p, то полином неприводим.

В рассматриваемом случае свободный член равен $(-1)^{\frac{n+1}{2}}(n+2)$, а целый коэффициент при x^{n+1-2k} $(1 \le k \le \frac{n-1}{2})$

$$(-1)^k(n+2)\frac{(n+1-k)!}{k!(n+2-2k)!}$$

делится на $(n+2)$, т.к. все множители в знаменателе меньше $n+2$.

Нули полинома

$$\frac{2}{x-m-2}T_{n+2}\Big(\frac{x-m-2}{2}\Big)$$

обозначим через $\{\eta_k\}_1^{n+1}$. Они лежат на $(m, m+4)$ и имеют степень $n+1$, а

$$\Big|\prod_{k=1}^{n+1}\eta_k\Big| = \frac{2}{m+2}T_{n-2}\Big(\frac{m+2}{2}\Big).$$

Поэтому любой полином q_n обладает тем свойством, что

$$q_n\Big(\frac{1}{\eta_k}\Big) = \frac{Q_n(\eta_k)}{\eta_k^n},$$

где Q_n — целочисленный полином и $Q_n(\eta_k) \ne 0$ $(1 \le k \le n+1)$.

Но тогда в силу теоремы о симметрических полиномах

$$\prod_{k=1}^{n+1} Q_n(\eta_k) \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Поэтому

$$\Big|\prod_{k=1}^{n+1} q_n\Big(\frac{1}{\eta_k}\Big)\Big| \ge \frac{1}{\Big|\prod\limits_{k=1}^{n+1}\eta_k^n\Big|}$$

и в силу (1)

$$\begin{aligned}\frac{2}{m+2}T_{n+2}\Big(\frac{m+2}{2}\Big) &= \Big|\prod_{k=1}^{n+1}\eta_k\Big| \\ &\le \frac{2}{m+2}\Big(\frac{m+2}{2}+\sqrt{\Big(\frac{m+2}{2}\Big)^2-1}\Big)^{n+2}.\end{aligned}$$

Следовательно, для любого q_n

$$\frac{2^{n+1}(m+2)}{(m+2+\sqrt{m^2+4m})^{n+2}} \le \frac{1}{\Big|\prod\limits_{k=1}^{n+1}\eta_k\Big|} \le \Big|\prod_{k=1}^{n+1} q_n\Big(\frac{1}{\eta_k}\Big)\Big|^{\frac{1}{n}}$$
$$\le \max_{\left[\frac{1}{m+4},\frac{1}{m}\right]} |q_n(x)|^{\frac{n+1}{n}}$$

и после возведения в степень $\frac{1}{n+1}$ и перехода к пределу при $n\to\infty$

$$q\Big(\frac{1}{m+4},\frac{1}{m}\Big) \ge \frac{2}{m+2+\sqrt{m^2+4m}}.$$

□

Это рассуждение при $m=1$ принадлежит Д. С. Горшкову (1959).

Отметим еще, что Б. С. Кашин [11] доказал оценку сверху при $b-a>1$, из которой следует, что в этом случае

$$q(a,b) < \sqrt{d(a,b)} = \Big(\frac{b-a}{4}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Изложим теперь интересную идею, высказанную А. О. Гельфондом и Л. Г. Шнирельман.

Пусть q_n — наименее уклоняющийся от нуля на $[0,1]$ ненулевой целочисленный полином.

Если $\varphi(n)$ — наименьшее общее кратное чисел $1,2,...,n$, то

$$\varphi(2n+1)\int_0^1 q_n^2(x)dx \ge 1.$$

При $\varepsilon>0$ и достаточно больших n

$$\int_0^1 q_n^2(x)dx \le \max_{[0,1]}|q_n(x)|^2 \le (q(0,1)+\varepsilon)^{2n}.$$

Если p_1, p_2, ..., p_m — все простые числа, не превосходящие n, а $m=\pi(n)$, то

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m} \le n^m = n^{\pi(n)}.$$

Поэтому

$$(2n+1)^{\pi(2n+1)}(q(0,1)+\varepsilon)^{2n} \ge 1$$

или

$$\pi(2n+1)\ln(2n+1) \geq 2n\ln\Big(\frac{1}{q(0,1)+\varepsilon}\Big)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(2n+1)\ln(2n+1)}{2n+1} \geq \ln\frac{1}{q(0,1)}.$$

Для оценки снизу $q(0,1)$ заметим, что при четном n можно считать q_n симметричным относительно $x=\frac{1}{2}$ (целочисленный полином степени $\frac{n}{2}$ относительно $x(1-x)$). Поэтому $q(0,1)=\sqrt{q\Big(0,\frac{1}{4}\Big)}$.

В силу теоремы 2 при $m=4$

$$q(0,1)=\sqrt{q\Big(0,\frac{1}{4}\Big)} \geq \sqrt{q\Big(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\Big)} \geq \Big(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}-1 > 0,4142.$$

Следовательно, $q(0,1) > 0,368 > \frac{1}{e}$.

Однако, возможно, что пользуясь этим приемом в случае полиномов многих переменных (подобно тому, как поступил K. Roth (1955) в проблеме приближения алгебраических чисел рациональными, см. [9], 127–146) можно получить новое доказательство асимптотического закона распределения простых чисел.

Заметим, что аналогично предыдущему, т.е. заменой переменных, можно доказать, что

$$q(-a,a)=\sqrt{q(0,a)},$$

$$q\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)=\sqrt{q\Big(0,\frac{1}{4}\Big)}=q(0,1)=q^2(-1,1)=q^4(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

(в последнем равенстве — замена $x\mapsto x^2-1$).

В разделе 3 понадобится знание нулей полинома q с максимумом модуля на $[a,b]$ меньше единицы и старшим коэффициентом 1.

При $a=-b$ можно воспользоваться теоремой Кронекера, приведенной во введении.

Назовем теперь давно известные такие полиномы для отрезков $[-1,1]$, $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ и $[-1,2]$, соответственно,

$$x(x^2-1),\quad x(x^2-1)(x^2-2),$$

$$x^2(x^2-1)(x^2-2)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^2-3),\quad x(x^2-1)(x^2-x-1)(x-2).$$

Вернемся к отрезку $[0,1]$.

Если взять полином

$$q_n(x)=\Big\{x^3(1-x)^3(2x-1)(5x^2-5x+1)\Big\}^{[\frac{n}{9}]},$$

максимум модуля которого легко подсчитать, то получим

$$q(0,1) < 0,435.$$

На самом деле [5],

$$0,4213 < q(0,1) < 0,42291334.$$

При этом оценка снизу получена неэлементарным методом.

При $0 \le \alpha < \beta \le 1$ $q(\alpha,\beta) = q(1-\beta, 1-\alpha)$, а оценку сверху при $0 < \alpha < \beta < 1$ см. в следствии из теоремы 3 в разделе 3.

3. Приближение функций целочисленными полиномами

Любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция является пределом равномерно сходящейся последовательности полиномов $\{p_n\}$. Это классическая аппроксимационная теорема Вейерштрасса.

Очевидно, что отрезок можно заменить любым компактом в $\mathbb{R}$, если воспользоваться теоремой Титце–Урысона о продолжении непрерывных функций. Понятно, что коэффициенты p_n можно считать рациональными и двоично–рациональными, т.е. вида $\frac{l}{2^m}$, где $l \in \mathbb{Z}$, а $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, достаточно уметь приближать одночлены $\frac{1}{2}x^k$ или просто $\frac{1}{2}$.

С другой стороны, если хотя бы одну функцию, отличную от полинома, можно аппроксимировать с любой погрешностью, то существует ненулевой целочисленный полином $X(x)$ с нормой меньше 1 (разность двух разных приближающих полиномов больших степеней). Получаем необходимое условие: $d(E) < 1$ или (см. начало 2) существует целочисленный полином с нормой меньше единицы и старшим коэффициентом 1.

Теорема 1. *Если $f \in L_p[a,b]$, $p \in (0,+\infty)$, $b-a < 4$, то существует последовательность $\{q_n\}$ такая, что при $n \to \infty$*

$$\int_a^b |f(x) - q_n(x)|^p dx \to 0.$$

Доказательство. Достаточно приблизить одну функцию $f(x) \equiv \frac{1}{2}$.

Пусть $|X(x)| \le \frac{1}{2}$.

Берем последовательность

$$q_N(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 2^{k-1} X^{2k}(x).$$

Учитывая, что
$$\frac{1}{2} \le 1 - 2X^2(x) \le 1,$$
получаем
$$\int\limits_a^b \left|\frac{1}{2} - q_N(x)\right|^p dx = \int\limits_a^b \frac{1}{2^p}\big(1 - 2X^2(x)\big)^{pn} dx.$$

Число нулей $X(x)$ конечно, поэтому мера множества E_δ точек $x \in [a,b]$, в которых $|X(x)| < \delta$ вместе с δ стремится к нулю.

Тогда
$$\int\limits_a^b \left|\frac{1}{2} - q_N(x)\right|^p dx \le \frac{1}{2^p}\mathrm{meas}E_\delta + \frac{1}{2^p}\int\limits_{[a,b]\setminus E_\delta} \big(1 - 2\delta^2\big)^{pn} dx.$$

Выбираем достаточно малым $\delta > 0$, а затем достаточно большим n. $\square$

То же доказательство, очевидно, годится и для любого компакта $E \subset \mathbb{R}$ с трансфинитным диаметром меньше единицы.

Если же для компакта E существует полином $X(x)$ такой, что для $x \in E$
$$0 < X(x) < 1,$$
то таким же образом получаем теорему о равномерной сходимости вместо сходимости в среднем.

А в случае, если есть $x_1 \in E \cap \mathbb{Z}$, то и $f(x_1) = \lim\limits_{n\to\infty} q_n(x_1) \in \mathbb{Z}$.

Более того, если x_1 — целое алгебраическое число, которое вместе с сопряженными x_2, ..., x_m принадлежит E, а $X_1(x) = \prod\limits_1^m (x - x_k)$, то интерполяционный (лагранжевский) полином, определяемый значениями $f(x_k)$ $(1 \le k \le m)$, должен быть целочисленным, так как он является пределом целочисленных полиномов, а именно, остатков от деления q_n на $X_1(x)$ (в предположении, что $f - q_n \to 0$).

Теорема 2. *Пусть $f \in C[a,b]$, $b - a < 4$ и существует целочисленный полином $X(x)$ со старшим коэффициентом 1 и $\max\limits_{[a,b]}|X(x)| < 1$, все нули которого вместе с сопряженными лежат на $[a,b]$. Для того чтобы существовала последовательность $\{q_n\}$, равномерно сходящаяся на $[a,b]$ к f, необходимо и достаточно, чтобы интерполяционный полином, определяемый значениями функции в нулях $X(x)$ был целочисленным.*

Доказательство. Необходимость уже доказана.

Достаточность. После вычитания из f ее интерполяционного полинома можно считать, что $f(x) = 0$ во всех нулях $X(x)$.

В силу непрерывности f ее можно равномерно приблизить непрерывной функцией, которая равна нулю уже в некоторых малых окрестностях нулей X (обозначим ее той же буквой f).

При $\varepsilon > 0$ выберем s так, чтобы $|X(x)|^s < \varepsilon$ ($s \in \mathbb{N}$).

По теореме Вейерштрасса найдется полином p такой, что

$$\max_{[a,b]} \Big| \frac{f(x)}{X^s(x)} - p(x) \Big| < \varepsilon.$$

Делением представим полином p в виде

$$p(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x) X^k(x),$$

где a_k — полиномы меньшей степени, чем у $X(x)$.

Так что при $x \in [a,b]$

$$\Big| f(x) - X^s(x) \sum_{k=0}^{N} a_k(x) X^k(x) \Big| < \varepsilon^2.$$

Заменяя коэффициенты $a_k(x)$ на ближайшие целые, получим целочисленный полином $[a_k]$, при котором

$$\max_{[a,b]} \big| a_k(x) - [a_k(x)] \big| \le M,$$

где M зависит только от $\max \big\{ |a|, |b| \big\}$ и степени X.

Следовательно,

$$\Big| f(x) - X^s(x) \sum_{k=0}^{N} [a_k(x)] X^k(x) \Big| \le \varepsilon^2 + M |X(x)|^s \cdot \sum_{k \ge 0} |X(x)|^k \le$$
$$\le \varepsilon^2 + M\varepsilon \frac{1}{1 - |X(x)|}.$$

□

Теперь рассмотрим вопрос о наилучшем приближении константы целочисленными полиномами на отрезке, не содержащем целых чисел. Не уменьшая общности, считаем $0 < \alpha < \beta \le 1 - \alpha$.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda \in (0,1)$. *Если* $\alpha \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big)$, *а* $\beta \in (\alpha, 1-\alpha]$, *то*

$$E_n^e(\lambda; \alpha, \beta) = \min_{q_n} \max_{[\alpha,\beta]} |\lambda - q_n(x)| \le 2(n+1)\rho^n,$$

где

$$\rho = \max\Big\{\beta, \frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}\Big\}.$$

При $\beta = 1-\alpha$

$$E_n^e(\lambda; \alpha, 1-\alpha) \le (n+1)\rho_1^n, \quad \rho_1 = \max\Big\{\frac{1}{2}, \frac{1-2\alpha}{1+2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\Big\}.$$

Уменьшить ρ *и* ρ_1 *нельзя в общем случае.*

Доказательство. Пусть полином Чебышева степени m для $[\alpha, \beta]$ равен

$$T_n(x) = \cos m \arccos \frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha} = T_m(0) - xT_m(0)p_{m-1}(x).$$

Тогда при $x \in [\alpha, \beta]$

$$\big|1 - xp_{m-1}(x)\big| \le \Big|\frac{T_m(x)}{T_m(0)}\Big| \le \frac{1}{|T_m(0)|}.$$

Умножая это неравенство на ax^s и меняя степень m, если нужно, получаем приближение этого одночлена более высокими степенями x.

Если

$$\lambda x p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}x^k,$$

то заменяя $a_{1,1}$ на $[a_{1,1}]$, получим

$$\Big|\lambda - [a_{1,1}]x - \sum_{k=2}^{n} a_{2,k}x^k\Big| \le \frac{\lambda}{|T_n(0)|} + \frac{x}{|T_{n-1}(0)|}.$$

Продолжая таким же образом, приходим к неравенству

$$\Big|\lambda - \sum_{k=1}^{n}[a_{k,k}]x^k\Big| \le \frac{1}{|T_n(0)|} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{|T_{n-k}(0)|}.$$

Но $x \le \beta$, а вне $[\alpha, \beta]$ (см. II в разделе 1 и (1))

$$|T_m(0)| \ge \frac{1}{2}\Big(\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} + \sqrt{\Big(\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\Big)^2 - 1}\Big)^m = \frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}\Big)^m.$$

Следовательно,

$$E_n^e(\lambda;\alpha,\beta)\le 2(n+1)\max_{0\le k\le n}\beta^k\Big(\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}\Big)^{n-k}\le 2(n+1)\rho^n.$$

Если $\beta\in(0,1)$, а $\alpha\le\beta\Big(\frac{1-\beta}{1+\beta}\Big)^2$, то $\rho=\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}$ и меньше быть не может, т.к. в силу II (1) ($E_n^e(\lambda)=\max\big|\lambda-q_n^*(x)\big|$).

$$\big|\lambda-[\lambda]\big|\le\big|\lambda-q_n^*(0)\big|\le E_n^e(\lambda)\cdot|T_n(0)|\le E_n^e(\lambda)\Big(\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\Big)^n.$$

При $\alpha>\beta\Big(\frac{1-\beta}{1+\beta}\Big)^2$ $\rho=\beta$ и в случае $\beta=\frac{1}{m}$ (m — натуральное число из $[2,10]$) число ρ может быть меньше лишь для чисел вида $\frac{l}{m^s}$ (l и $s\in\mathbb{N}$), так как при $\lambda\ne\frac{l}{m^s}$

$$E_n^e(\lambda;\alpha,\beta)\ge\inf_{q_n}\Big|\lambda-q_n\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big|=\inf_{k\in\mathbb{Z}}\Big|\lambda-\frac{k}{m^n}\Big|\ge\frac{1}{m^{n+2}}=\beta^{n+2}$$

для следующей бесконечной последовательности n: после n-го знака в m-ичном разложении λ не следуют подряд два 0 или $(m-1)$.

А используя полином

$$q_n(x)=\frac{1}{m}-\frac{1}{m}(1-mx)^n,$$

индукцией по s легко доказать, что при $\beta=\frac{2}{m}-\alpha$

$$E_n^e\Big(\frac{l}{m^s};\alpha,\beta\Big)\le c(s)(1-m\alpha)^n=c(s)\Big(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\Big)^n$$

и эта оценка не может быть усилена при $\alpha=\frac{r}{rm+1}$ ($r\in\mathbb{N}$), во всяком случае.

Случай $\beta=1-\alpha$ в теореме рассмотрим отдельно.

Можно считать, что $q_n(x)=q_n(1-x)$ и приближать целочисленными полиномами от $x(1-x)$.

Применяя еще доказанную уже оценку приближения, получаем

$$E_n^e(\lambda;\alpha,1-\alpha)=E^e_{[\frac{n}{2}]}\Big(\lambda;\alpha(1-\alpha),\frac{1}{4}\Big)\le 2\Big(\Big[\frac{n}{2}\Big]+1\Big)\rho_1^{n-1},$$

где

$$\rho_1=\max\Big\{\frac{1}{4},\frac{\frac{1}{2}-\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{\frac{1}{2}+\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\Big\}^{\frac{1}{2}}=\max\Big\{\frac{1}{2},\frac{1-2\alpha}{1+2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\Big\}.$$

"Переключение" — при $\alpha=\frac{1}{10}$. □

Следствие 1. *При* $\alpha+\beta<1$ $q(\alpha,\beta)\le\rho$, *а при* $\alpha+\beta=1$ $q(\alpha,\beta)\le\rho_1$.

Для доказательства достаточно в теореме 3 взять $\lambda=\frac{1}{2}$ и умножить на 2.

Найден точный порядок наилучшего приближения константы $\lambda\in(0,1)$ в $L_p[a,b]$, $p\in[1,+\infty)$, $b-a<4$.

Если внутри отрезка нет целых чисел, то

$$E_n^e(\lambda;[a,b])_p=\min_{q_n}\|\lambda-q_n\|_p\asymp\frac{1}{n^{\frac{2}{p}}},$$

а если есть хотя бы одно, то

$$E_n^e(\lambda;[a,b])_p\asymp\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}.$$

Точный порядок приближения константы показывает разницу в убывании с ростом n $E_n(f)$ и $E_n^e(f)$ любой функции.

Здесь и далее $E_n(f;[a,b])$ и $E_n^e(f;[a,b])$ — наилучшие приближения f в $C[a,b]$ полиномами p_n с любыми коэффициентами и целочисленными q_n.

Рассмотрим приближение непрерывных функций только на "ближайших" к $[\alpha,\beta]$ отрезках.

Теорема 4. *а) Если* $f\in C[0,1]$ *и* $f(0)$ *и* $f(1)\in\mathbb{Z}$, *то*

$$E_n^e(f;[0,1])\le 2E_n(f;[0,1])+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

б) Если $f\in C[-1,1]$ *и* $f(0)$ *и* $\frac{1}{2}(f(-1)\pm f(1))\in\mathbb{Z}$, *то*

$$E_n^e(f;[-1,1])\le\frac{9}{4}E_n(f;[-1,1])+O\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

и нельзя заменить в обоих случаях O *на* o.

Доказательство. Если $f_1(x)=\frac{1}{2}x(1-x)$, а $f_2(x)=\frac{1}{2}x(1-x^2)$, то в силу V при $m=0$ и IV при $m=0$ (раздел 1), соответственно, при некотором $c>0$

$$E_n^e(f_1;[0,1])\ge\frac{c}{n^2},\qquad E_n^e(f_2;[-1,1])\ge\frac{c}{n}.$$

В доказательстве теоремы ограничимся случаем отрезка $[0,1]$ (для $[-1,1]$ рассуждение аналогичное).

Здесь важно, что имеется полином $X_1(x)=x(1-x)\ge 0$.

Пусть

$$E_n(f;[0,1]) = \max_{[0,1]} \bigl|f(x) - p_n^*(x)\bigr|$$

и интерполяционный полином по двум точкам 0 и 1

$$q_1(f;x) = f(0)(1-x) + f(1)x.$$

Тогда

$$q_1(f - p_n^*;x) \le E_n(f;[0,1])(1 - x + x) = E_n(f;[0,1])$$

и

$$\bigl|f(x) - p_n^*(x) - q_1(f - p_n^*;x)\bigr| \le 2E_n(f;[0,1]).$$

Остается приблизить полином $p_n^* - q_1(p_n^*)$, который делится на X_1, т.е. имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N_1} a_k(x) X_1^k(x),$$

где $\{a_k(x)\}$ — линейные полиномы.

Через N_1 и N_2 обозначаем разные величины порядка n.

Заменяем $a_1(x)$ на $[a_1(x)]$ и применяем V (раздел 1) при $m = 0$ (см. еще замечание 2 в конце раздела 1)

$$\max_{[0,1]} \Bigl|X_1(x) - \sum_{k=2}^{N_2} b_k X_1^k(x)\Bigr| = O\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr).$$

После простых преобразований

$$\sum_{k=2}^{N_1} \bigl(a_1(x) - [a_1(x)]\bigr) b_k X_1^k(x) = \sum_{k=2}^{N_2} c_k(x) X_1^k(x) \bigl(1 - X_1(x)\bigr)^{N_2 - k},$$

где $\{c_k(x)\}$ — некоторые линейные полиномы.

Заменяем $c_k(x)$ на $[c_k(x)]$ и учитываем, что

$$\sum_{k=2}^{N_2} X_1^k(x)\bigl(1 - X_1(x)\bigr)^{N_2-k} \le \sum_{k=N_2-1}^{N_2} X_1^k(x)\bigl(1 - X_1(x)\bigr)^{N_2-k}$$
$$+ \frac{1}{\binom{N_2}{2}} \sum_{k=2}^{N_2-2} \binom{N_2}{k} X_1^k (1 - X_1)^{N_2-k}$$
$$\le 2X_1^{N_2-1}(x) + \frac{1}{\binom{N_2}{2}} (X_1 + 1 - X_1)^{N_2-k} = O\Bigl(\frac{1}{n^2}\Bigr).$$

Таким образом,

$$E_n^e(f;[0,1]) \le 2E_n(f;[0,1]) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

$\square$

Пусть теперь коэффициенты полиномов еще и положительные.

Если на бесконечном множестве точек $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$, образующем компакт E, функция f является пределом последовательности полиномов $\{p_n^+\}$ (с положительными коэффициентами), а $x_1 = \sup E$, то при $|z| \le x_1$

$$\big|p_n^+(z)\big| \le p_n^+(x_1) = O(1).$$

Но тогда по свойствам аналитических функций существует подпоследовательность, которая вместе с производными сходится равномерно в любом круге $|z| \le r < x_1$, а функция f является сужением на E аналитической в круге $|z| < x_1$ функции и непрерывной при $|z| \le x_1$ с условиями

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \ge 0 \qquad (k \ge 0).$$

А если дополнительно коэффициенты целые, то и $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ $(k \ge 0)$ — целые, а тогда и $x_1 \le 1$, если функция — не полином.

Рассмотрим только случай отрезка $[-1,0]$.

Теорема 5. *Если $f \in C[-1,0]$, $f(0) \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Z}$, $f(-1) \in \mathbb{Z}$, то существует последовательность $\{q_n^+\}$ (с коэффициентами из $\mathbb{Z}_+$) такая, что при $n \to \infty$*

$$\max_{[-1,0]} \big|f(x) - q_n^+(x)\big| \to 0.$$

Доказательство. Данная функция f допускает равномерное приближение полиномами q_n, как и $f(-x)$ на $[0,1]$ (см. теорему 2 или 4a). А поменять отрицательные знаки у некоторых одночленов можно с помощью следующего предложения. $\square$

Лемма 2. При любом $n \ge 1$ существует полином q_n^+ такой, что при $x \in [-1,0]$

$$0 \le -x - x^2 q_n^+(x) \le \frac{4}{n^2}.$$

Доказательство. Пусть $2^s \le n < 2^{s+1}$, где $s \in \mathbb{Z}_+$.

Если полином Чебышева

$$T_n(x) = \cos n \arccos x \qquad (x \in [-1,1]),$$

то искомый полином равен

$$\frac{T_{2^s}(1) - T_{2^s}(2x+1)}{2T'_{2^s}(1)} = -x - \ldots$$

Коэффициент при x^k ($k \in [1, 2^s]$) равен $-2^{k-1}\frac{T_{2^s}^{(k)}(1)}{k!T'_{2^s}(1)}$.

Как видно из (1), $\frac{T_n^{(\nu)}(1)}{\nu!} \in \mathbb{N}$ при $0 \le \nu \le n$, $T'_n(1) = n^2$.

Убедимся, что при $k \ge 2$

$$\frac{2}{k!} \cdot \frac{T_{2^s}^{(k)}(1)}{T'_{2^s}(1)} \in \mathbb{N}.$$

При $k = 2$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 = 2(x-1)^2 + 4(x-1) + 1,$$

а далее проводим индукцию по s, исходя из равенства

$$T_{2^{s+1}}(x) = 2T_{2^s}^2(x) - 1.$$

Получаем

$$\frac{1}{2^{2s+1}} \cdot \frac{T_{2^{s+1}}(1)}{k!} = \frac{1}{2^{2s}} \cdot \frac{1}{k!}\big(T_{2^s}(x) \cdot T_{2^s}(x)\big)^{(k)}$$
$$= \frac{1}{4^s}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\frac{1}{k!}T_{2^s}^{(\nu)}(1)T_{2^s}^{(k-\nu)}(1) = \frac{1}{4^s}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{T_{2^s}^{(\nu)}(1)}{\nu!}\cdot\frac{T_{2^s}^{(k-\nu)}(1)}{(k-\nu)!}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{[\frac{1}{2}(k-1)]}\frac{T_{2^s}^{(\nu)}(1)}{\nu!}\Big(\frac{2}{4^s}\cdot\frac{T_{2^s}^{(k-\nu)}(1)}{(k-\nu)!}\Big) + \frac{1+(-1)^k}{2\cdot 4^s}\Big(\frac{T_{2^s}^{[\frac{k}{2}]}(1)}{[\frac{k}{2}]!}\Big)^2.$$

По предположению индукции все слагаемые в сумме — числа целые, а при четном k и

$$\frac{1}{4^s}\Big(\frac{T_{2^s}^{[\frac{k}{2}]}(1)}{[\frac{k}{2}]!}\Big)^2 = \Big(\frac{1}{2^{2s-1}}\cdot\frac{T_{2^s}^{[\frac{k}{2}]}(1)}{[\frac{k}{2}]!}\Big)^2 \cdot 2^{2s-2} \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны,

$$0 \le \frac{T_{2^s}(1) - T_{2^s}(2x+1)}{2T'_{2^s}(1)} \le \frac{1}{T'_{2^s}(1)} = \frac{1}{4^s} \le \frac{4}{n^2}.$$

Лемма 2 и теорема 5 доказаны. □

Более общие теоремы о порядке приближения функций полиномами q_n и q_n^+ на отрезке вещественной оси см. [12].

Отметим еще, что С. Н. Мергелян (1951) описал все компакты в комплексной плоскости, на которых любая непрерывная и аналитическая во внутренних точках функция является равномерным пределом последовательности полиномов $\{p_n\}$ с любыми коэффициентами.

Литература

[1] В. В. Прасолов. *Многочлены, изд. III.*, М.: МЦНМО, 2003.

[2] Г. Полиа, Г. Сеге. *Задачи и теоремы из анализа. ч. II.*, М., Гостехиздат, 1956.

[3] Р. М. Тригуб. *Приближение функций с диофантовыми условиями многочленами с целыми коэффициентами* // Сб. Метрические вопросы теории функций и отображений, в. II., К., Наукова думка, 1971, 267–333.

[4] Le Baron O. Ferquson. *What can be approximated by polinomials with integer coefficients* // Amer. Math. Monthly, **113** (2006), No. 5, 403–414.

[5] Igor E. Pritsker. *Polinomials with integer coefficients and their zeroes* // arXiv:1307.6200v.1 [math.NT], 23 juli 2013, 18 p.

[6] A. N. Sharkovskii. *Characterization of the cosine* // Aeg. Math., **9** (1973), 121–128.

[7] T. I. Rivlin. *Chebyshev Polinomials,* New York, John Wiley, 1990.

[8] Н. И. Ахиезер. *Лекции по теории аппроксимации, изд. II.*, М., 1965.

[9] Дж. В. С. Касселс. *Введение в теорию диофантовых приближений*, М., ИЛ, 1961.

[10] И. Н. Санов. *Новое доказательство теоремы Минковского* // Изв. АН СССР, сер. матем., **16** (1952), No. 2, 101–112.

[11] Б. С. Кашин. *Об алгебраических многочленах с целыми коэффициентами мало уклоняющихся от нуля на отрезке* // Матем. зам., **50** (1991), No. 3, 58–67.

[12] R. M. Trigub. *Approximation of functions by polynomials with various constraints* // Изв. НАН Армении, Математика, **44** (2009), No. 4, 35–52.

Сведения об авторах

Роальд Михайлович Тригуб

Сумский государственный университет,
Суми, Украина
E-Mail: `roald.trigub@gmail.com`