Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 4, 543 – 569

О локальном поведении классов Орлича–Соболева

Евгений А. Севостьянов, Сергей А. Скворцов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Изучаются семейства отображений классов Орлича–Соболева, заданные в области D риманова многообразия $\mathbb{M}^n$, $n \geqslant 3$. Установлено, что указанные семейства являются равностепенно непрерывными (нормальными), как только их внутренняя дилатация порядка $p \in (n-1, n]$ имеет мажоранту класса FMO (конечного среднего колебания) в каждой точке области. Другим достаточным условием возможности непрерывного продолжения указанных отображений является расходимость некоторого интеграла.

2010 MSC. Primary 30C65; Secondary 31A15, 31B15, 31C12.

Ключевые слова и фразы. Модули семейств кривых и поверхностей, нормальные семейства отображений, отображения с ограниченным и конечным искажением, классы Соболева и Орлича–Соболева.

1. Введение

В настоящей работе исследуется некоторый подкласс отображений с конечным искажением, активно изучаемых в последнее время рядом отечественных и зарубежных математиков (см., напр., [1–6] и [7]). Отдельно укажем на недавние публикации, относящиеся к исследованию отображений на римановых многообразиях (см. [8–11]).

В более ранних публикациях первого автора рассмотрены вопросы, связанные с локальным поведением так называемых кольцевых Q-отображений относительно p-модуля в $\mathbb{R}^n$ (см., напр., [12] и [13]). В частности, в этих работах установлены аналоги классических теорем нормальности типа Монтеля, в связи с чем упомянем также недавнюю публикацию Кристи [14]. Отметим, что при $p \neq n$ $(n-1 < p < n)$

Статья поступила в редакцию 08.10.2016

семейства соответствующих отображений равностепенно непрерывны даже в том случае, когда они не выпускают множество положительной p-ёмкости (см. [13] и [14]), что является весьма нетривиальным фактом и неверно при $p = n$. Сказанное демонстрирует простой пример семейства отображений $f_j(z) = e^{jz}$, $z \in \mathbb{C}$, которое состоит из локально конформных отображений и не является равностепенно непрерывным в $\mathbb{C}$. К сожалению, нам не известно, имеют ли место подобные аналоги при $p \neq n$ на многообразиях. Результаты в этом направлении, как правило, содержат существенные дополнительные ограничения на отображённую область. В частности, в наших недавних статьях [9] и [10] рассматриваются такие условия, как ограниченность этой области, её регулярность по Альфорсу и выполнение неравенств типа Пуанкаре. Условия такого же типа фигурируют и в настоящей статье.

Основная цель настоящей работы — применить развитую в [10] технику к классам Орлича–Соболева для установления равностепенной непрерывности семейств отображений между римановыми многообразиями. Точнее, целью статьи является усиление отдельных результатов, полученных в [9] и [10]. Указанное усиление происходит в нескольких направлениях. Во-первых, здесь мы используем более общую интерпретацию коэффициента искажения отображений, а именно, вместо внешней дилатации отображений используется их внутренняя дилатация. По этому поводу отметим, что в [9] основные результаты сформулированы в терминах мажоранты Q для $K_O^{n-1}(x, f)$, где K_O — внешняя дилатация отображения f в точке x (см. [9, теорема 1.1]). Поскольку внутренняя дилатация $K_I(x, f)$ и внешняя дилатация $K_O(x, f)$ связаны неравенством $K_I(x, f) \leqslant K_O^{n-1}(x, f)$, мажорантой для K_O^{n-1} будет также и мажоранта для K_I и, значит, рассмотрение ограничений на внутреннюю дилатацию более общо. Во-вторых, вместо классической внутренней дилатации $K_I(x, f)$ в тексте рассматривается внутренняя дилатация $K_{I,\alpha}(x, f)$ порядка α, что соответствует более общим классам рассматриваемых отображений. В третьих, мы получаем результаты о равностепенной непрерывности отображений, искажающих p-ёмкость (см., напр., лемму 2.3), что, насколько нам известно, не делалось ранее. Функциональные ограничения на «мажоранту» Q предполагаются примерно теми же, что и в работах [9, 10] (конечного среднего колебания; с условием интегральной расходимости типа Лехто и проч.).

Основные определения и обозначения, используемые ниже, но не приводимые в тексте, могут быть найдены в работе [9]. Всюду ниже $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$ — римановы многообразия размерности $n \geqslant 2$, и D —

область риманова многообразия $\mathbb{M}^n$. Напомним, что *римановой метрикой* на гладком многообразии $\mathbb{M}^n$ называется положительно определённое гладкое симметричное тензорное поле типа $(0,2)$. В частности, компоненты римановой метрики g_{kl} в различных локальных координатах (U,x) и (V,y) взаимосвязаны посредством тензорного закона $'g_{ij}(x) = \sum\limits_{k,l=1}^{n} g_{kl}(y(x))\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}$. *Римановым многообразием* будем называть гладкое многообразие вместе с римановой метрикой на нём. Длину гладкой кривой $\gamma=\gamma(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, соединяющей точки $\gamma(t_1)=M_1\in\mathbb{M}^n$, $\gamma(t_2)=M_2\in\mathbb{M}^n$, и n-мерный объём области A на римановом многообразии определим согласно соотношениям $l(\gamma) := \int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt$, $\quad v(A) = \int\limits_{A}\sqrt{\det g_{ij}}\,dx^1\ldots dx^n$. Ввиду положительной определённости тензора $g=g_{ij}(x)$ имеем: $\det g_{ij}>0$. *Геодезическим расстоянием* между точками p_1 и $p_2\in\mathbb{M}^n$ будем называть наименьшую длину всех кусочно-гладких кривых в $\mathbb{M}^n$, соединяющих точки p_1 и p_2. Геодезическое расстояние между точками p_1 и p_2 будем обозначать символом $d(p_1,p_2)$ (всюду далее d обозначает геодезическое расстояние, если не оговорено противное). В частности, *шаром $B(x_0,r)$ с центром в точке $x_0\in\mathbb{M}^n$ и радиуса $r>0$* на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$ мы будем называть следующее множество:

$$B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{M}^n\,:\,d(x,x_0)<r\}\,.$$

Хорошо известно, что любая точка p риманова многообразия $\mathbb{M}^n$ имеет окрестность $U\ni p$ (называемую далее *нормальной окрестностью точки p*) и соответствующее отображение $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^n$, так, что геодезические сферы с центром в точке p и радиуса r, лежащие в окрестности U, переходят при отображении φ в евклидовы сферы того же радиуса, а пучок геодезических кривых, исходящих из точки p, переходит в пучок радиальных отрезков в $\mathbb{R}^n$ (см. [15, леммы 5.10 и следствие 6.11], см. также комментарии на стр. 77 здесь же). Локальные координаты $\varphi(p)=(x^1,\ldots,x^n)$ в этом случае называются *нормальными координатами* точки p. Заметим, что в нормальных координатах всегда тензорная матрица $g_{ij}(x)$ в точке p — единичная (а в силу непрерывности g в точках, близких к p, эта матрица сколь угодно близка к единичной; см. [15, пункт (c) предложения 5.11]).

Определения классов Соболева и Орлича–Соболева на римановых многообразиях, а также определение отображений с конечным искажением могут быть найдены, напр., в работе [9]. Здесь же см. определение открытых и дискретных отображений, встречающихся далее по тексту. Определения пространств, регулярных по Альфорсу и пространств с неравенствами Пуанкаре могут быть найдены в упомянутой работе [9], а также и монографии [16]. Определим якобиан отображения в точке $x \in D$ как $J(x,f) = \limsup\limits_{r\to 0} \frac{v_*(f(B(x,r)))}{v(B(x,r))}$, где v и v_* — объём в $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$, соответственно. Полагаем $l(x,f) = \liminf\limits_{y\to x} \frac{d_*(f(x),f(y))}{d(x,y)}$, где d и d_* — геодезические расстояния на $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$, соответственно. Для отображений с конечным искажением и произвольного $p \geqslant 1$ корректно определена и почти всюду конечна так называемая *внутренняя дилатация* $K_{I,p}(x,f)$ *отображения* f *порядка* p *в точке* x, определяемая равенствами

$$K_{I,p}(x,f) \quad = \quad \begin{cases} \frac{J(x,f)}{l^p(x,f)}, & J(x,f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Пусть D — подмножество $\mathbb{M}^n$. Для отображения $f\colon D \to \mathbb{M}^n_*$, множества $E \subset D$ и $y \in \mathbb{M}^n_*$ определим *функцию* $N(y,f,E)$ как число прообразов точки y в множестве E, т.е.

$$N(y,f,E) \,=\, \mathrm{card}\,\{x \in E \,:\, f(x) = y\}\ ,$$

$$N(f,E) \,=\, \sup_{y\in\mathbb{M}^n_*} N(y,f,E)\,. \tag{1.2}$$

Элементом площади на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$ будем называть выражение вида $d\mathcal{A} = \sqrt{\det g^*_{\alpha\beta}}\, du^1 \ldots du^{n-1}$, где $g^*_{\alpha\beta}$ — риманова метрика на H, порождённая исходной римановой метрикой g_{ij} согласно соотношению

$$g^*_{\alpha\beta} = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x(u)) \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\,.$$

Здесь $x(u)$ обозначает параметризацию такую, что $\nabla_u x \neq 0$. Всюду далее

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\, d\mathcal{A}\,, \tag{1.3}$$

где $d\mathcal{A}$ — элемент площади. Для фиксированного $\beta \geqslant 1$ обозначим $\mathfrak{F}^{\beta}_{\varphi,Q,B_R,N,K}(D)$ обозначается семейство открытых дискретных отображений $f\colon D \to B_R \setminus K$ класса $W^{1,\varphi}_{loc}$, имеющих конечное искажение, таких что $N(f,D) \leqslant N$ и $K_{I,\beta}(x,f) \leqslant Q(x)$ почти всюду, где $\beta = \frac{p}{p-n+1}$. Всюду далее, если не оговорено противное, $Q\colon \mathbb{M}^n \to [0,\infty]$ – заданная измеримая относительно меры объёма v функция такая, что $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$ и $0 < Q(x) < \infty$ при всех $x \in D$. Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть $n \geqslant 3$, $p \in [n, n+\frac{1}{n-2})$, многообразие $\mathbb{M}^n_*$ связно, является n-регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}^n_*$ выполнено $(1;\beta)$-неравенство Пуанкаре, где $\beta = \frac{p}{p-n+1}$. Пусть $B_R \subset \mathbb{M}^n_*$ — некоторый фиксированный шар радиуса R, гомеоморфный некоторой области в $\mathbb{R}^n$ относительно некоторой фиксированной карты и такой, что $\overline{B_R}$ — компакт, $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — неубывающая измеримая по Лебегу функция, D — область в $\mathbb{M}^n$, $N \in \mathbb{N}$, Q — функция, локально интегрируемая относительно меры v в D и K — невырожденный континуум в B_R. Пусть выполнено условие*

$$\int\limits_1^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \tag{1.4}$$

и, кроме того, при некотором $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$,

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\beta-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{\beta-1}}(t)} = \infty\,. \tag{1.5}$$

Тогда семейство $\mathfrak{F}^{\beta}_{\varphi,Q,B_R,N,K}(D)$ является равностепенно непрерывным в точке $x_0 \in D$.

2. Основные леммы

Перед доказательством основных лемм и главного утверждения работы сформулируем некоторые вспомогательные сведения, необходимые для изложения. Ниже мы считаем известным понятие p-модуля семейств кривых на римановом многообразии (см., напр., [17]). Приведём понятие p-ёмкости конденсатора в удобной для нас форме (см. [18, предложение 10.2, гл. II]). Пусть A — открытое подмножество многообразия $\mathbb{M}^n$, а C — компактное подмножество A. *Конденсатором* будем называть пару множеств $E = (A,\, C)$. Пусть $p \geqslant 1$, тогда *p-ёмкостью* конденсатора E будем называть следующую величину: $\operatorname{cap}_p E = M_p(\Gamma_E)$, где Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma\colon [a,\, b) \to A$, таких что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$. Справедливо следующее утверждение, доказанное Адамовичем и Шанмугалингам, позволяет оценить снизу p-модуль семейств кривых в метрических пространствах достаточно общей природы (см. [19, предложение 4.7]). Указанное утверждение является оценкой типа Лёвнера для p-модуля в метрических пространствах (об оценках Лёвнера см. также в монографии [5, разд. 2.5]).

Предложение 2.1. *Пусть X — β-регулярное по Альфорсу метрическое пространство с мерой, в котором выполняется $(1;p)$-неравенство Пуанкаре так, что $\beta-1<p\leqslant\beta$. Тогда для произвольных континуумов E и F, содержащихся в шаре $B(x_0,R)$, и некоторой постоянной $C>0$ выполняется неравенство*

$$M_p(\Gamma(E,F,X))\geqslant\frac{1}{C}\cdot\frac{\min\{\operatorname{diam}E,\operatorname{diam}F\}}{R^{1+p-\beta}}\,.$$

Определение максимального поднятия кривой на многообразии, встречающееся ниже, может быть найдено в [9]. Следующее утверждение доказано в [9, предложение 2.1].

Предложение 2.2. *Пусть $n\geqslant 2$, D — область в $\mathbb{M}^n$, $f\colon D\to\mathbb{M}^n_*$ — открытое дискретное отображение, $\beta\colon[a,\,b)\to\mathbb{M}^n_*$ — кривая и точка $x\in\ f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x.*

Имеет место следующее почти очевидное утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $p\geqslant 1$, D — область в $\mathbb{M}^n$, шар $B(x_0,r_0)$ со своим замыканием лежит в некоторой нормальной окрестности U точки x_0, $f\colon D\to\mathbb{M}^n_*$ — открытое дискретное отображение, такое что соотношение*

$$\operatorname{cap}_p\,f(E)\leqslant\int\limits_A Q(x)\cdot\eta^p(d(x,x_0))\;dv(x)\tag{2.1}$$

выполнено для некоторого ε_0, $0<\varepsilon_0<r_0$, и произвольного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0^{\prime})$ (где $\varepsilon_0^{\prime}\in(0,\varepsilon_0)$ — также, некоторое фиксированное число), а также для каждой измеримой функции $\eta\colon(\varepsilon,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$, такой что имеет место

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)dr\geqslant 1\,.\tag{2.2}$$

при $r_1=\varepsilon$, $r_2=\varepsilon_0$. Пусть также для некоторого семейства измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon\colon(\varepsilon,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$, $\varepsilon\in\left(0,\varepsilon_0^{\prime}\right)$, выполнено условие

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0}Q(x)\cdot\psi^p_\varepsilon(d(x,x_0))\;dv(x)\leqslant F(\varepsilon,\varepsilon_0)\qquad\forall\;\varepsilon\in\left(0,\varepsilon_0^{\prime}\right),\tag{2.3}$$

где $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$ — некоторая функция и

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t)dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0^{\prime})\,. \tag{2.4}$$

Тогда

$$\mathrm{cap}_p\, f(E) \leqslant F(\varepsilon, \varepsilon_0)/I^p(\varepsilon, \varepsilon_0) \qquad \forall\, \varepsilon \in \left(0,\, \varepsilon_0^{\prime}\right)\,. \tag{2.5}$$

Доказательство. Если $\mathrm{cap}_p\, f(E) = 0$, доказывать нечего. Пусть

$$\mathrm{cap}_p\, f(E) \ne 0\,.$$

Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, $t \in (\varepsilon,\, \varepsilon_0)$. Заметим, что для всех таких $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0^{\prime})$ выполнено: $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\, dt = 1$.

Тогда из соотношений (2.2) и (2.3) с учётом (2.4) вытекает неравенство (2.5). □

Следующее определение, приводимое ниже для римановых многообразий и произвольного порядка модуля $p \geqslant 1$, для пространства $\mathbb{R}^n$ и конформного модуля может быть найдено, напр., в работе [20]. Пусть $x_0 \in D$, $Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая относительно меры v функция, и число $r_0 > 0$ таково, что шар $\overline{B(x_0, r_0)}$ лежит вместе со своим замыканием в некоторой нормальной окрестности U точки x_0. Пусть также $0 < r_1 < r_2 < r_0$,

$$A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{M}^n\, :\, r_1 < d(x, x_0) < r_2\}, \tag{2.6}$$

$S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2,$ — геодезические сферы с центром в точке x_0 и радиусов r_1 и r_2, соответственно, а $\Gamma\,(S_1,\, S_2,\, A)$ обозначает семейство всех кривых, соединяющих S_1 и S_2 внутри области A. Отображение $f\colon D \to \mathbb{M}_*^n$ условимся называть *кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in D$ относительно p-модуля,* если соотношение

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right)\ \leqslant \int\limits_{A} Q(x)\eta^p(d(x, x_0))\; dv(x)$$

выполнено в кольце A для произвольных r_1, r_2, указанных выше, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geqslant 1\,. \tag{2.7}$$

Отображения типа кольцевых Q-отображений относительно p-модуля были предложены к изучению О. Мартио и изучались им совместно с В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым в n-мерном евклидовом пространстве, см. [5]. Следующее утверждение указывает на связь кольцевых отображений и соотношений (2.5).

Лемма 2.2. *Пусть $n \geqslant 2$, и $p \geqslant 1$, D — область в $\mathbb{M}^n$, $f\colon D \to \mathbb{M}^n_*$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 \in D$, $r_0 > 0$ таково, что шар $B(x_0, r_0)$ лежит со своим замыканием в некоторой нормальной окрестности U точки x_0. Предположим, что для некоторого числа $0 < \varepsilon_0 < r_0$, некоторого $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$ и семейства измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon\colon (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, выполнено условие (2.3), где $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$ — некоторая заданная функция и, кроме того, для произвольных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$ выполнено условие (2.4). Тогда для конденсатора $E = (B(x_0, \varepsilon_0), \overline{B(x_0, \varepsilon)})$ и любом $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0')$ имеет место соотношение (2.5).*

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $E = (A, C)$, где $A = B(x_0, \varepsilon_0)$ и $C = \overline{B(x_0, \varepsilon)}$. Если $\operatorname{cap}_p f(E) = 0$, доказывать нечего. Пусть $\operatorname{cap}_p f(E) \neq 0$. Из условия леммы вытекает, что $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)}$ – компакт в $\mathbb{M}^n$.

Пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma\colon [a,\, b) \to A$, таких что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$, где $|\gamma| = \{x \in \mathbb{M}^n \,:\, \exists\, t \in [a, b) : \gamma(t) = x\}$ — носитель кривой γ. Напомним, что $\operatorname{cap}_p E = M_p(\Gamma_E)$. Для конденсатора $f(E)$ рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E)}$. Заметим также, что каждая кривая $\gamma \in \Gamma_{f(E)}$ имеет максимальное поднятие при отображении f, лежащее в A с началом в C (см. предложение 2.2). Пусть Γ^* — семейство всех максимальных поднятий кривых $\Gamma_{f(E)}$ при отображении f с началом в C. Покажем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$.

Предположим противное, т.е., что существует кривая $\beta\colon [a,\, b) \to \mathbb{M}^n_*$ семейства $\Gamma_{f(E)}$, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha\colon [a,\, c) \to B(x_0, \varepsilon_0)$ лежит в некотором компакте K внутри $B(x_0, \varepsilon_0)$. Следовательно, его замыкание $\overline{\alpha}$ — компакт в $B(x_0, \varepsilon_0)$. Заметим, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ — компакт в $f\left(B(x_0, \varepsilon_0)\right)$, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{f(E)}$. Рассмотрим предельное множество G кривой α при $t_k \to c$,

$$G = \left\{x \in \mathbb{M}^n \,:\, x = \lim_{k \to \infty} \alpha(t_k)\right\}, \quad t_k \in [a,\, c)\,, \quad \lim_{k \to \infty} t_k = c.$$

Отметим, что переходя к подпоследовательностям, мы можем ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x \in G$, в силу непрерывности f, будем иметь $f(\alpha(t_k)) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $t_k \in [a, c)$, $t_k \to c$ при $k \to \infty$. Однако, $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $B(x_0, \varepsilon_0)$.

С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$ имеем: $G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} \neq \varnothing$, см. [21, 1.II.4, § 41]. Ввиду [21, теорема 5.II.5, § 47] G является связным. Таким образом, в силу дискретности f, G не может состоять более чем из одной точки, и кривая $\alpha\colon [a, c) \to B(x_0, \varepsilon_0)$ продолжается до кривой $\alpha\colon [a, c] \to K \subset B(x_0, \varepsilon_0)$, причём $f(\alpha(c)) = \beta(c)$. Снова по предложению 2.2 можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c, b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a, c')$, $c' \in (c, b)$, что противоречит максимальности поднятия α. Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_E$.

Кроме того, заметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$, и, следовательно, ввиду свойства минорирования p-модуля (см. [22, свойство (c)])

$$M_p\left(\Gamma_{f(E)}\right) \leqslant M_p\left(f(\Gamma^*)\right) . \tag{2.8}$$

Рассмотрим

$$S_\varepsilon = S(x_0, \varepsilon)\,, \quad S_{\varepsilon_0} = S(x_0, \varepsilon_0)\,,$$

где ε_0 — из условия леммы и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0^\prime)$. Заметим, что, поскольку $\Gamma^* \subset \Gamma_E$, то $\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0 - \delta)) < \Gamma^*$ при сколь угодно малых $\delta > 0$ и, следовательно, $f(\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0 - \delta))) < f(\Gamma^*)$. Значит,

$$M_p\left(f(\Gamma^*)\right) \leqslant M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0 - \delta)\right)\right)\right) . \tag{2.9}$$

Из соотношений (2.8) и (2.9) следует, что

$$M_p\left(\Gamma_{f(E)}\right) \leqslant M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0 - \delta)\right)\right)\right)$$

и, таким образом ввиду свойства минорирования p-модуля (см. [22, теорема 1(c)])

$$\mathrm{cap}_p\, f(E) \leqslant M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon\,, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0 - \delta)\right)\right)\right) . \tag{2.10}$$

Пусть $\eta(t)$ произвольная неотрицательная измеримая функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(t)dt = 1$. Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_\delta(t) = \frac{\eta(t)}{\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0-\delta} \eta(t)dt}$ (так как $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(t)dt = 1$, то $\delta > 0$ можно выбрать так, что $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0-\delta}\eta(t)dt>0$). Поскольку $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0-\delta}\eta_\delta(t)dt=1$, то по определению кольцевого Q-отображения в точке x_0 мы получим

$$\begin{aligned}&M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon\,,S_{\varepsilon_0-\delta},A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0-\delta)\right)\right)\right)\\ &\qquad\leqslant\frac{1}{\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0-\delta}\eta(t)dt\right)^p}\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0}Q(x)\cdot\eta^p(d(x,x_0))\ dv(x)\,.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Переходя здесь к пределу при $\delta\to 0$ и учитывая соотношение (2.10), получаем, что $\operatorname{cap}_p\,f(E)\leqslant\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0}Q(x)\cdot\eta^p(d(x,x_0))dv(x)$ для произвольной неотрицательной измеримой функции $\eta(t)$, такой что $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\eta(t)dt=1$. Необходимое заключение вытекает теперь из леммы 2.1.

$\Box$

Следующее утверждение касается равностепенной непрерывности отображений, удовлетворяющих оценке (2.1).

Лемма 2.3. *Пусть $n\geqslant 2$, $p\in(n-1,n]$, многообразие $\mathbb{M}_*^n$ связно, является n-регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}_*^n$ выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре. Предположим, D — область в $\mathbb{M}^n$, $x_0\in D$, $\overline{B(x_0,\varepsilon_0)}\subset U$, U — некоторая нормальная окрестность точки x_0. Пусть $\mathfrak{F}_{x_0,Q,B_R,K}(D)$ — семейство открытых дискретных отображений $f\colon D\to B_R\setminus K$, удовлетворяющих соотношению (2.1) в точке $x_0\in D$ для произвольных $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, где $B_R\subset\mathbb{M}_*^n$ — некоторый фиксированный шар радиуса R, K – невырожденный континуум в B_R. Предположим также, что для некоторого числа $\varepsilon_0'\in(0,\varepsilon_0)$ и семейства измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon\colon(\varepsilon,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0')$, выполнено условие (2.3), где некоторая заданная функция $F(\varepsilon,\varepsilon_0)$ удовлетворяет условию $F(\varepsilon,\varepsilon_0)=o(I^p(\varepsilon,\varepsilon_0))$ при $\varepsilon\to 0$, а $I(\varepsilon,\varepsilon_0)$ определяется соотношением (2.4). Тогда семейство отображений $\mathfrak{F}_{x_0,Q,B_R,K}(D)$ является равностепенно непрерывным в точке x_0.*

Доказательство. Пусть $f\in\mathfrak{F}_{x_0,Q,B_R,K}(D)$ и шар $A:=B(x_0,r_0)\subset D$ лежит вместе со своим замыканием в некоторой нормальной окрестности U точки x_0. Заметим, что при указанных условиях $\overline{A}$ является компактным подмножеством D. Тогда при каждом $0<\varepsilon<r_0$ множество $C:=\overline{B(x_0,\varepsilon)}$ является компактным подмножеством

$B(x_0, r_0)$, поскольку C есть замкнутое подмножество компактного пространства $\overline{A}$. Таким образом, $E = (A, C)$ — конденсатор в $\mathbb{M}^n$.

Рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E)}$ для конденсатора $f(E)$, отвечающее определению p-ёмкости. Заметим, что подсемейство всех неспрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E)}$ имеет p-нулевой модуль, и что оставшееся подсемейство, состоящее из всех спрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E)}$, состоит из кривых $\beta\colon [a, b) \to f(D)$, имеющих предел при $t \to b$. Заметим, что указанный предел принадлежит множеству $\partial f(A)$. Из сказанного следует, что

$$M_p(\Gamma_{f(E)}) = M_p(\Gamma(f(C), \partial f(A), f(A))). \tag{2.12}$$

Заметим, что $\Gamma(K, f(C), \mathbb{M}^n_*) > \Gamma(f(C), \partial f(A), f(A))$ в силу [21, теорема 1, § 46, п. I], так что ввиду минорирования p-модуля ([22, теорема 1(c)])

$$M_p(\Gamma(f(C), \partial f(A), f(A))) \geqslant M_p(\Gamma(K, f(C), \mathbb{M}^n_*))\,. \tag{2.13}$$

Ввиду предложения 2.1 получим:

$$M_p(\Gamma(K, f(C), \mathbb{M}^n_*)) \geqslant \frac{1}{C_1} \cdot \frac{\min\{\operatorname{diam} f(C), \operatorname{diam} K\}}{R^{1+p-n}}\,. \tag{2.14}$$

По лемме 2.1 $M_p(\Gamma_{f(E)}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так что ввиду (2.12), (2.13) и (2.14) получаем, что

$$\min\{\operatorname{diam} f(C), \operatorname{diam} K\} = \operatorname{diam} f(C)$$

при $\varepsilon \to 0$. Из соотношений (2.4) и (2.14) также вытекает, что для любого $\sigma > 0$ найдётся $\delta_0 = \delta_0(\sigma)$ так, что при $\varepsilon \in (0, \delta_0)$

$$\operatorname{diam} f(C) \leqslant \sigma,$$

что и означает равностепенную непрерывность семейства отображений $\mathfrak{F}_{x_0, Q, B_R, K}(D)$ в точке x_0. $\square$

3. О критерии выполнения верхних ёмкостных неравенств

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение (см. [8, лемма 4.2]), которое при $p \neq n$ может быть доказано по аналогии.

Предложение 3.1. *Пусть $p \geqslant 1$, $x_0 \in \mathbb{M}^n$, и пусть $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$, U — некоторая нормальная окрестность точки*

x_0, $Q\colon \mathbb{M}^n \to [0,\infty]$ измеримая функция, локально интегрируемая относительно меры v в U. Полагаем $A = A(x_0, r_1, r_2)$ (см. (2.6)),

$$\eta_0(r) = \frac{1}{Ir^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,, \tag{3.1}$$

где $I := I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}$, и пусть $q_{x_0}(r)$ определено соотношением (1.3). Тогда найдётся постоянная $C > 0$, зависящая только от нормальной окрестности U точки x_0, такая, что для любой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0,\infty]$, удовлетворяющей ограничению $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr = 1$, выполняется неравенство

$$\int\limits_A Q(x)\eta_0^p(d(x,x_0))\;dv(x) \leqslant C\int\limits_A Q(x)\eta^p(d(x,x_0))\;dv(x)\,.$$

Аналоги следующего утверждения во многих частных случаях доказывались ранее в работах [3, предложение 5.1], [5, теорема 7.2], [8, теорема 4.2], [9, теорема 4.1] и [23, лемма 1]. Случай p-модуля, римановых многообразий и отображений с ветвлением на них, насколько нам известно, никем ранее не рассматривался.

Теорема 3.1. *Пусть $p \in (n-1, n]$, $n \geqslant 2$, D — заданная область в $\mathbb{M}^n$, $x_0 \in D$ и $Q \in L^1_{loc}(U)$, где U — некоторая нормальная окрестность точки x_0. Пусть $\varepsilon_0 := \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$. Если $f\colon D \to \mathbb{M}^n_*$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 \in D$ относительно p-модуля, то для некоторой постоянной $C > 0$ (зависящей только от нормальной окрестности U), любых $0 < r_1 < r_2 < \varepsilon_0$ и произвольного конденсатора $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)}\right)$ ёмкость конденсатора $f(E) = \left(f(B(x_0, r_2)), f\left(\overline{B(x_0, r_1)}\right)\right)$ удовлетворяет условию*

$$\operatorname{cap}_p f(E) \leqslant \frac{C}{I^{p-1}}\,, \tag{3.2}$$

где $I = I(x_0, r_1, r_2)$ задаётся соотношением

$$I := I(x_0, r_1, r_2) := \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}\; q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,. \tag{3.3}$$

Обратно, если выполнено соотношение (3.2), то отображение f удовлетворяет неравенствам (2.1) в точке x_0 при Q^* вместо Q, где $Q^* := C_1 \cdot Q$, а C_1 — некоторая постоянная.

Доказательство. Докажем сначала первую часть утверждения теоремы. Пусть вначале f — кольцевое Q-отображение в точке x_0 относительно p-модуля. Покажем, что в этом случае выполняется соотношение (3.2). Не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что $0 \neq I \neq \infty$, тогда также $0 < q_{x_0}(r) < \infty$ почти всюду (учитывая теорему Фубини и условие $Q \in L^1_{loc}(U)$). Пусть η_0 — функция из соотношения (3.1). Используя аналог теоремы Фубини для римановых многообразий, установленный в [9, Замечание 2.1], будем иметь:

$$\int\limits_A Q(x)\cdot \eta_0^p(d(x,x_0))\,dv(x)$$

$$\leqslant C\cdot \int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\cdot\frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{I^p r^{\frac{p(n-1)}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{p}{p-1}}(r)}\,dr \tag{3.4}$$

Рассмотрим “внутренний” интеграл по сфере $S(x_0,r)$, в котором умножим и разделим соответствующее выражение на r^{n-1}. Поскольку этот интеграл рассматривается при фиксированном $r\in[r_1,r_2]$, мы можем вынести соответствующий множитель за знак интеграла:

$$\int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\cdot\frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{I^p r^{\frac{p(n-1)}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{p}{p-1}}(r)} = \frac{1}{r^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,r)}\frac{Q(x)}{r^{1-n}}\cdot\frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{I^p r^{\frac{p(n-1)}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{p}{p-1}}(r)}$$

$$=\frac{q_{x_0}(r)}{r^{1-n}I^p r^{\frac{p(n-1)}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{p}{p-1}}(r)}\,. \tag{3.5}$$

С учётом определения $q_{x_0}(r)$ в (1.3), будем иметь:

$$\frac{q_{x_0}(r)}{r^{1-n}I^p r^{\frac{p(n-1)}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{p}{p-1}}(r)}=\frac{1}{I^p}\cdot\frac{1}{r^{(1-n+\frac{p(n-1)}{p-1})}q_{x_0}^{(\frac{p}{p-1}-1)}(r)}$$

$$=\frac{1}{I^p}\cdot\frac{1}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) вытекает, что

$$\int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\cdot\frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{I^p r^{\frac{p(n-1)}{p-1}}\,q_{x_0}^{\frac{p}{p-1}}(r)}=\frac{1}{I^p}\cdot\frac{1}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,. \tag{3.7}$$

Комбинируя (3.4) и (3.7), приходим к неравенству:

$$\int\limits_A Q(x)\cdot\eta_0^p(d(x,x_0))\,dv(x)\leqslant\frac{C}{I^p}\cdot\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}=\frac{C}{I^{p-1}}\,, \tag{3.8}$$

где было учтено соотношение (3.3). В силу леммы 2.2 мы получим, что
$$\mathrm{cap}_p\ f(E)\leqslant\int\limits_A Q(x)\cdot\eta_0^p(d(x,x_0))\ dv(x)\,. \tag{3.9}$$

Таким образом, из (3.8) и (3.9) вытекает соотношение (3.2), что и требовалось установить.

Рассмотрим вторую часть утверждения теоремы. Пусть теперь, напротив, выполняется соотношение (3.2). Требуется установить выполнение оценок вида (2.1), возможно, с точностью до некоторой постоянной $C>0$. Рассмотрим произвольную измеримую функцию $\eta\colon (r_1,r_2)\rightarrow[0,\infty]$, удовлетворяющую условию $\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)dr=1$. Согласно аналогу теоремы Фубини на римановых многообразиях и предложению 3.1, при некоторых постоянных $C_1,C_2>0$ будем иметь:
$$\int\limits_A Q(x)\eta^p(d(x,x_0))\ dv(x)\geqslant C_1\int\limits_A Q(x)\cdot\eta_0^p(d(x,x_0))\ dv(x)$$

$$\geqslant C_1\cdot C_2\cdot\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{S(x_0,r)}Q(x)\cdot\frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{I^pr^{\frac{p(n-1)}{p-1}}\ q_{x_0}^{\frac{p}{p-1}}(r)}\ dr\,. \tag{3.10}$$

Учитывая соотношение (3.7) мы имеем:
$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{S(x_0,r)}Q(x)\cdot\frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{I^pr^{\frac{p(n-1)}{p-1}}\ q_{x_0}^{\frac{p}{p-1}}(r)}\ dr\ =\frac{1}{I^{p-1}}\,,$$

поэтому из (3.10) вытекает, что
$$\frac{C}{I^{p-1}}\leqslant\int\limits_A Q^*(x)\cdot\eta^p(d(x,x_0))\ dv(x)\,, \tag{3.11}$$

где $Q^*:=C\cdot Q(x)/(C_1\cdot C_2)$. Окончательно, из (3.2) и (3.11) вытекает желанное соотношение
$$\mathrm{cap}_p\ f(E)\leqslant\int\limits_A Q(x)\cdot\eta^p(d(x,x_0))\ dv(x)\,.$$

Теорема доказана. □

4. Об отображениях, удовлетворяющих нижним оценкам модулей

Наши дальнейшие исследования связаны с рассмотрением семейств поверхностей на многообразиях, для чего обратимся к терминологии. Далее запись $\rho \in \widetilde{\operatorname{adm}}\,\Sigma$ означает, что ρ — неотрицательная борелевская функция в $\mathbb{R}^n$, такая что

$$\int\limits_{\sigma\cap R} \rho d\mathcal{H}^{n-1} \geqslant 1 \quad \forall\, \sigma \in \Sigma\,. \tag{4.1}$$

Пусть $n \geqslant 2$, и Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелевскую функцию $\rho\colon \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ будем называть *допустимой* для семейства Γ, сокр. $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k \, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{4.2}$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Для заданного числа $p \in (0, \infty)$, как и для случая кривых, *p-модулем* семейства поверхностей Γ назовём величину

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho\in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho^p(x)\, dv(x)\,.$$

Следующие важные сведения, касающиеся ёмкости пары множеств относительно области, могут быть найдены в работе В. Цимера [24]. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и C_0, C_1 — непересекающиеся компактные множества, лежащие в замыкании G. Полагаем $R = G \setminus (C_0 \cup C_1)$ и $R^* = R \cup C_0 \cup C_1$. *Ёмкостью порядка* $p \geqslant 1$ *пары* C_0, C_1 *относительно замыкания* G называется величина

$$C_p[G, C_0, C_1] = \inf \int\limits_R |\nabla u|^p \; dm(x),$$

где точная нижняя грань берётся по всем функциям u, непрерывным в R^*, $u \in ACL(R)$, таким что $u = 1$ на C_1 и $u = 0$ на C_0. Указанные функции будем называть *допустимыми* для величины $C[G, C_0, C_1]$. Мы будем говорить, что *множество* $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ *разделяет* C_0 *и* C_1 *в* R^* если $\sigma\cap R$ замкнуто в R и найдутся непересекающиеся множества A и B, являющиеся открытыми в $R^*\setminus\sigma$, такие что $R^*\setminus\sigma = A\cup B$, $C_0 \subset A$ и $C_1 \subset B$. Пусть Σ обозначает класс всех множеств, разделяющих C_0 и C_1 в R^*. Для числа $p' = p/(p-1)$ определим величину

$$\widetilde{M_{p'}}(\Sigma) = \inf_{\rho\in\widetilde{\operatorname{adm}}\Sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^{p'} \, dm(x), \tag{4.3}$$

где запись $\rho \in \widetilde{\mathrm{adm}}\,\Sigma$ означает, что ρ — неотрицательная борелевская функция в $\mathbb{R}^n$, такая что $\int\limits_{\sigma\cap R} \rho d\mathcal{H}^{n-1} \geqslant 1 \quad \forall\, \sigma \in \Sigma$. Заметим, что согласно результата Цимера,

$$\widetilde{M_{p'}}(\Sigma) = C_p[G, C_0, C_1]^{\,-1/(p-1)}\,, \tag{4.4}$$

см. [24, теорема 3.13]. Заметим также, что согласно результату Шлыка

$$M_p(\Gamma(E, F, D)) = C_p[D, E, F]\,, \tag{4.5}$$

см. [25, теорема 1].

Мы будем говорить, что измеримая относительно меры объёма v функция $\rho\colon \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *p-обобщённо допустима* для семейства Γ, состоящего из k-мерных поверхностей S в $\mathbb{M}^n$, сокр. $\rho \in \mathrm{ext}_p\,\mathrm{adm}\,\Gamma$, если соотношение (4.1) выполнено для p-почти всех поверхностей S семейства Γ. Следующий класс отображений полезен с точки зрения приложений к классам Соболева и Орлича–Соболева и связан с кольцевым определением квазиконформности по Герингу (см., напр., [5, глава 9]). Пусть $n \geqslant 2$, D и D' — заданные области в $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$, соответственно, $x_0 \in \overline{D}$ и $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая функция относительно меры объёма v. Пусть U — нормальная окрестность, содержащая точку x_0, $p \geqslant 1$, тогда будем говорить, что $f\colon D \to D'$ — *нижнее Q-отображение в точке x_0, относительно p-модуля,* если

$$M_p(f(\Sigma_\varepsilon)) \geqslant \inf_{\rho\in \mathrm{ext}_p\,\mathrm{adm}\,\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D\cap A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dv(x)$$

для каждого кольца $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x\in U} d(x, x_0)$, где Σ_ε обозначает семейство всех пересечений геодезических сфер $S(x_0, r)$ с областью D, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Следующее утверждение является обобщением теоремы 9.2 в [5] на случай отображений, заданных на многообразии и произвольный порядок модуля $p > n - 1$.

Лемма 4.1. *Пусть $n \geqslant 2$, $p > n - 1$, D и D' — заданные области в $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$, соответственно, $x_0 \in \overline{D}$ и $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая функция. Если отображение $f\colon D \to D'$ является нижним (p, Q)-отображением в точке x_0, то при произвольном $\varepsilon_0 > 0$, таком, что $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)}$ лежит в нормальной окрестности U точки x_0 и некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем*

$$M_p(f(\Sigma_\varepsilon)) \geqslant C_1 \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|\, Q\|_s(r)} \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,,\ \varepsilon_0 \in (0, d_0)\,, \tag{4.6}$$

где $s=(n-1)/(p-n+1)$ *и, как и выше,* Σ_ε *обозначает семейство всех пересечений сфер* $S(x_0,r)$ *с областью* D, $r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$, $\|Q\|_s(r)=\left(\int\limits_{D(x_0,r)} Q^s(x)\,d\mathcal{A}\right)^{1/s}$ *–* L_s*-норма функции* Q *над пересечением* $D\cap S(x_0,r)=D(x_0,r)=\{x\in D: d(x,x_0)=r\}$.

Обратно, если соотношение (4.6) *выполнено при некотором* $\varepsilon_0>0$ *и некоторой постоянной* $C_1>0$, *то* f *является нижним* C_2Q*-отображением в точке* x_0, *где* $C_2>0$ *— также некоторая постоянная.*

Доказательство леммы 4.1 аналогично доказательству [9, лемма 4.2]. Следующая важнейшая лемма связывает нижние Q-отображения с оценками вида (2.1), по поводу чего следовало бы также упомянуть работы [26, лемма 4] и [9, лемма 4.4].

Лемма 4.2. *Пусть* $n\geqslant 2$, $p>n-1$, D *— заданная область в* $\mathbb{M}^n$, $x_0\in D$ *и* $Q\colon D\to[0,\infty]$ *— измеримая функция, интегрируемая в степени* $\alpha=\frac{n-1}{p-n+1}$ *относительно меры* v *в некоторой нормальной окрестности* U *точки* x_0. *Предположим,* U^* *— некоторая область в* $\mathbb{M}^n_*$, *гомеоморфная какой-либо области в* $\mathbb{R}^n$ *относительно фиксированной карты* φ, *причём* $\overline{U^*}$ *– компакт. Если* $f\colon D\to U^*$ *— открытое дискретное нижнее* Q*-отображение в точке* x_0 *относительно* p*-модуля, то существует постоянная* $C>0$ *(зависящая только от окрестностей* U *и* U^**), такая что*

$$\operatorname{cap}_\beta f(\mathcal{E})\leqslant\int\limits_A Q^*(x)\cdot\eta^\beta(d(x,x_0))\;dv(x)$$

при $\beta=\frac{p}{p-n+1}$, $Q^*=C\cdot Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}$ *для произвольного конденсатора* $\mathcal{E}=(B(x_0,r_2),\overline{B(x_0,r_1)})$ *в кольце* $A=A(x_0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<\varepsilon_0:=\operatorname{dist}(x_0,\partial U)$, *для каждой измеримой функции* $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$, *такой что имеет место соотношение* (2.7).

Доказательство. Заметим, что $\alpha=\beta-1$. Согласно теореме 3.1 достаточно установить, что при некоторой постоянной $C_1>0$

$$\operatorname{cap}_\beta f(\mathcal{E})\leqslant\frac{C_1}{I^{*\,\beta-1}}\,,$$

где $\mathcal{E}$ — конденсатор вида $\mathcal{E}=(B(x_0,r_2),\overline{B(x_0,r_1)})$, $q^*_{x_0}(r)$ — среднее значение функции $Q^{\beta-1}(x)$ над сферой $S(x_0,r)$ (см. соотношение (1.3)) и $I^*=I^*(x_0,r_1,r_2)=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{\beta-1}}q_{x_0}^{*\,\frac{1}{\beta-1}}(r)}$. При $\varepsilon\in(r_1,r_2)$

рассмотрим шар $B(x_0, \varepsilon)$. Пусть φ — то отображение, которое гомеоморфно отображает U^* на $D_* \subset \mathbb{R}^n$. Полагаем $C_0 = \partial\varphi(f(B(x_0, r_2)))$, $C_1 = \varphi(f(\overline{B(x_0, r_1)}))$, $\sigma = \partial\varphi(f(B(x_0, \varepsilon)))$. Поскольку область D_* ограничена в $\mathbb{R}^n$, найдётся шар $B_R \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\overline{\varphi(f(B(x_0, r_2)))} \subset B_R$. Полагаем $G := B_R$.

Поскольку f — непрерывно и открыто, $\overline{\varphi(f(B(x_0, r_1)))}$ — компактное подмножество $\varphi(f(B(x_0, \varepsilon)))$ также, как $\overline{\varphi(f(B(x_0, \varepsilon)))}$ — компактное подмножество $\varphi(f(B(x_0, r_2)))$. В частности,

$$\overline{\varphi(f(B(x_0, r_1)))} \cap \partial\varphi(f(B(x_0, \varepsilon))) = \varnothing\,.$$

Пусть, как и выше, $R = G \setminus (C_0 \cup C_1)$ и $R^* = R \cup C_0 \cup C_1$, тогда $R^* = G$. Заметим, что σ разделяет C_0 и C_1 в $R^* = G$. Действительно, множество $\sigma \cap R$ замкнуто в R, кроме того, пусть $A := G \setminus \overline{\varphi(f(B(x_0, \varepsilon)))}$ и $B = \varphi(f(B(x_0, \varepsilon)))$, тогда A и B открыты в $G \setminus \sigma$, $C_0 \subset A$, $C_1 \subset B$ и $G \setminus \sigma = A \cup B$.

Пусть Σ — семейство всех множеств, отделяющих C_0 от C_1 в G. Ниже по тексту $\bigcup\limits_{r_1<r<r_2} \partial f(B(x_0, r))$ либо $\bigcup\limits_{r_1<r<r_2} f(S(x_0, r))$ понимается как объединение борелевских множеств в семейство, а не в теоретико-множественном смысле (см. [24, п. 3, с. 464]). Пусть $\rho^{n-1} \in \widetilde{\operatorname{adm}} \bigcup\limits_{r_1<r<r_2} \partial f(B(x_0, r))$ в смысле соотношения (4.1), тогда также мы можем утверждать, что $\rho \in \operatorname{adm} \bigcup\limits_{r_1<r<r_2} \partial f(B(x_0, r))$ в смысле соотношения (4.2) (здесь $k := n-1$). Поскольку (ввиду открытости отображения f) имеет место включение $\partial f(B(x_0, r)) \subset f(S(x_0, r))$, мы получим, что $\rho \in \operatorname{adm} \bigcup\limits_{r_1<r<r_2} f(S(x_0, r))$ и, следовательно, ввиду (4.3) будем иметь:

$$\begin{aligned}\widetilde{M_{\frac{p}{n-1}}}(\Sigma) \geqslant \widetilde{M_{\frac{p}{n-1}}} &\left(\bigcup_{r_1<r<r_2} \partial f(B(x_0, r))\right) \\ &\geqslant \widetilde{M_{\frac{p}{n-1}}} \left(\bigcup_{r_1<r<r_2} f(S(x_0, r))\right) \\ &\qquad\geqslant M_p \left(\bigcup_{r_1<r<r_2} f(S(x_0, r))\right). \qquad (4.7)\end{aligned}$$

Однако, ввиду (4.4) и (4.5) найдутся такие постоянные K_1 и K_2, что

$$\frac{K_1}{(M_\beta(\Gamma(C_0,C_1,G)))^{1/(\beta-1)}} \leqslant \widetilde{M_{\frac{p}{n-1}}}(\Sigma) \leqslant \frac{K_2}{(M_\beta(\Gamma(C_0,C_1,G)))^{1/(\beta-1)}}\,. \qquad (4.8)$$

Пусть $\Gamma_{\varphi(f(\mathcal{E}))}$ — семейство всех кривых для конденсатора $\varphi(f(\mathcal{E}))$, относящееся к определению ёмкости порядка β. Пусть также $\Gamma^*_{\varphi(f(\mathcal{E}))}$ обозначает семейство всех спрямляемых кривых семейства $\Gamma_{\varphi(f(\mathcal{E}))}$, тогда заметим, что семейства $\Gamma^*_{\varphi(f(\mathcal{E}))}$ и $\Gamma(C_0,C_1,G)$ имеют одинаковые семейства допустимых метрик ρ и, значит,

$$M_\beta(\Gamma_{\varphi(f(\mathcal{E}))}) = M_\beta(\Gamma(C_0,C_1,G))\,.$$

В силу определения β-ёмкости имеем $M_\beta(\Gamma_{\varphi(f(\mathcal{E}))}) = \mathrm{cap}_\beta\varphi(f(\mathcal{E}))$, так что из (4.8) вытекает, что

$$\left(\widetilde{M_{\frac{p}{n-1}}}(\Sigma)\right)^{\beta-1} \leqslant \frac{K_2}{\mathrm{cap}_\beta\varphi(f(\mathcal{E}))}\,. \qquad (4.9)$$

Окончательно, из (4.7) и (4.9) мы получаем неравенство

$$\mathrm{cap}_\beta f(\mathcal{E}) \leqslant \frac{K_3}{M_\beta\left(\bigcup\limits_{r_1<r<r_2} f(S(x_0,r))\right)^{\beta-1}}\,.$$

По лемме 4.1 мы получим, что

$$\mathrm{cap}_\beta f(\mathcal{E}) \leqslant \frac{K_4}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\|Q\|_\alpha(r)}\right)^{\alpha}} = \frac{K_4}{I^{*\,\beta-1}}\,,$$

что и доказывает утверждение леммы 4.2. □

Обозначим через $\mathfrak{R}_{x_0,Q,B_R,\delta,p}(D)$ семейство открытых дискретных нижних кольцевых Q-отображений $f\colon D\to B_R$ в точке $x_0\in D$ относительно p-модуля, для которых существует континуум $K_f\subset B_R$ такой, что $f(x)\notin K_f$ при всех $x\in D$ и, кроме того, $\operatorname{diam}K_f\geqslant\delta$. Следующее утверждение касается равностепенной непрерывности указанного класса.

Теорема 4.1. *Пусть $p \in [n, n+\frac{1}{n-2})$, и $\delta > 0$, многообразие $\mathbb{M}^n_*$ связно, является n-регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}^n_*$ выполнено $(1;\beta)$-неравенство Пуанкаре, где $\beta = \frac{p}{p-n+1}$. Пусть $B_R \subset \mathbb{M}^n_*$ — некоторый фиксированный шар радиуса R, D — область в $\mathbb{M}^n$ и $Q\colon D \to [1,\infty]$ — функция, измеримая относительно меры объёма v, локально интегрируемая в степени $\alpha = \frac{n-1}{p-n+1}$. Тогда семейство отображений $\mathfrak{R}_{x_0,Q,B_R,\delta,p}(D)$ является равностепенно непрерывным в точке $x_0 \in D$, если при некотором $\delta(x_0) > 0$ выполняется равенство*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{\beta-1}} q_{x_0}^{*\frac{1}{\beta-1}}(r)} = \infty\,, \tag{4.10}$$

где $q^*_{x_0}(r) := \frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A}$.

Доказательство. Заметим, что при $p \in [n, n+\frac{1}{n-2})$ выполнено: $\beta \in (n-1, n]$, и что если $f \in \mathfrak{R}_{x_0,Q,B_R,\delta,p}(D)$, то в силу леммы 4.2 соотношение

$$\operatorname{cap}_\beta f(\mathcal{E}) \leqslant \int\limits_A Q^*(x) \cdot \eta^\beta(d(x,x_0))\; dv(x) \tag{4.11}$$

выполнено для любого конденсатора $\mathcal{E} = (B(x_0,r_2), \overline{B(x_0,r_1)})$, кольца $A = A(x_0,r_1,r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < \varepsilon_0 := \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$, и измеримой функции $\eta\colon (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ с условием (2.7); здесь $\beta = \frac{p}{p-n+1}$ и $Q^* = C \cdot Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}$. В силу леммы 2.3 класс отображений, удовлетворяющих указанной выше оценке (4.11) является равностепенно непрерывным в точке x_0, как только $Q^*(x)$ удовлетворяет условиям (2.3)–(2.4) в этой точке. Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что условие (4.10) влечёт выполнение условия

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q^*\psi^\beta(d(x,x_0))\; dv(x) \;=\; o\left(I^\beta(\varepsilon,\varepsilon_0)\right)\,,$$

где ψ — некоторая специально подобранная функция. Можно считать, что шар $B(x_0,\delta(x_0))$ лежит в нормальной окрестности точки x_0. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[t^{\frac{n-1}{\beta-1}} q_{x_0}^{*\frac{1}{\beta-1}}(t)]\,, & t \in (r_1,r_2)\,,\\ 0\,, & t \notin (r_1,r_2)\,.\end{cases}$$

Заметим теперь, что требование вида

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty$$

выполняется при $\varepsilon_0 = \delta(x_0)$ и всех достаточно малых ε. (В частности, $I < \infty$, поскольку, в противном случае из (3.2) следовало бы, что $\mathrm{cap}_\beta f(\mathcal{E}) = 0$, что противоречило бы [18, следствие VII.1.16]). Согласно [9, замечание 2.1] имеет место аналог теоремы Фубини на римановых многообразиях, так что

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\delta(x_0)} Q^*(x)\psi^\beta(d(x,x_0))\,dv(x) \leqslant C_1 \int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{\beta-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{\beta-1}}(t)}\,,$$

где $C_1 > 0$ — некоторая постоянная. Но тогда также

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\delta(x_0)} Q^*(x)\psi^\beta(d(x,x_0))dv(x) = o(I^{\,\beta}(\varepsilon, \delta(x_0)))$$

ввиду соотношения (4.10). Утверждение теоремы следует теперь из леммы 2.3. □

5. Основные результаты

Аналог следующей леммы установлен Д. Ковтонюком и В. Рязановым для случая гомеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$ ([27, теорема 2.1], а также в работе [9, теорема 4.2] в случае $p = n$. Для произвольного показателя $p > n - 1$ это утверждение доказывается аналогично [9, теорема 4.2].

Лемма 5.1. *Пусть D — область в $\mathbb{M}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (1.4). *Если $p > n-1$, то каждое открытое дискретное отображение $f\colon D \to \mathbb{M}^n_*$ с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{loc}$, такое, что $N(f,D) < \infty$, является нижним Q-отображением относительно p-модуля в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ при*

$$Q(x) = N(f,D)K_{I,\alpha}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(x,f), \quad \alpha := \frac{p}{p-n+1}\,,$$

где внутренняя дилатация $K_{I,\alpha}(x,f)$ отображения f в точке x порядка α определена соотношением (1.1), *а кратность $N(f,D)$ определена вторым соотношением в* (1.2).

Доказательство теоремы 1.1. По лемме 5.1 отображение f является нижним B-отображением относительно p-модуля в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ при

$$B(x) = N(f,D)K_{I,\alpha}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(x,f), \quad \alpha := \frac{p}{p-n+1}$$

(т.е., $p = \alpha(n-1)/(\alpha-1)$), где внутренняя дилатация $K_{I,\alpha}(x,f)$ отображения f в точке x порядка α определена соотношением (1.1), а кратность $N(f,D)$ определена вторым соотношением в (1.2). Необходимое заключение вытекает из теоремы 4.1. $\Box$

Определение конечного среднего колебания, встречающееся ниже, может быть найдено, напр., в [28, разд. 4]. Имеет место следующая

Теорема 5.1. *Заключение теоремы* 5.1 *имеет место, если в условиях этой теоремы вместо предположений на функцию Q потребовать, чтобы $Q \in FMO(x_0)$.*

Доказательство. Идея доказательства теоремы 5.1 заключается в том, чтобы вначале подобрать функции I и $\psi \equiv \psi_\varepsilon$, соответствующие обозначениям леммы 2.1, а затем, используя предложение 3.1, свести доказательство данной теоремы к утверждению теоремы 1.1. Точнее, достаточно показать, что условие $Q \in FMO(x_0)$ влечёт расходимость интеграла (1.5), поскольку в этом случае необходимое заключение будет следовать из теоремы 1.1.

Полагаем $0 < \psi(t) = \frac{1}{\left(t\log\frac{1}{t}\right)^{n/\beta}}$. На основании [11, предложение 3] для указанной функции будем иметь, что при некотором $\varepsilon_0 \in (0,1)$

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\psi^\beta(d(x,x_0))\,dv(x)$$

$$= \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\,dv(x)}{\left(d(x,x_0)\log\frac{1}{d(x,x_0)}\right)^n} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (5.1)$$

при $\varepsilon \to 0$. Заметим также, что при указанных ε выполнено $\psi(t) \geqslant \frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$, поэтому $I_0(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt \geqslant \log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}$. С другой стороны, рассуждая также, как при доказательстве теоремы 3.1, мы убеждаемся, что при некоторой постоянной $C_0 > 0$ (зависящей только от нормальной окрестности U точки x_0)

$$\int\limits_A Q(x)\cdot\eta_0^\beta(d(x,x_0))\,dv(x) \geqslant \frac{C_0}{I^\beta}\cdot\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0}\frac{1}{r^{\frac{n-1}{\beta-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{\beta-1}}(r)} = \frac{C_0}{I^{\beta-1}}\,, \qquad (5.2)$$

где, как и прежде, $\eta_0(r)=\frac{1}{Ir^{\frac{n-1}{\beta-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{\beta-1}}(r)}$,

$$I:=I(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{\beta-1}}\;q_{x_0}^{\frac{1}{\beta-1}}(r)}\,. \tag{5.3}$$

Положим теперь $\eta(t):=\psi(t)/I_0(\varepsilon,\varepsilon_0)$, тогда, очевидно, η удовлетворяет ограничению $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\eta(r)dr=1$. Применим теперь предложение 3.1 при $p=\beta$. Ввиду этого предложения, а также соотношений (5.1) и (5.2), при некоторой постоянных $C,C_0,C_1>0$ мы будем иметь, что

$$\frac{C_0}{I^{\beta-1}}\leqslant C\int\limits_{A}Q(x)\eta^{\beta}(d(x,x_0))dv(x)\leqslant C_1\cdot\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\beta}\,.$$

Последнее соотношение возможно лишь при $I\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, поскольку его правая часть стремится к нулю.

Таким образом, интеграл I в (5.3) расходится и, значит, необходимое заключение вытекает из теоремы 1.1. □

При $n-1\neq\beta\neq n$ имеет также место утверждение, согласно которому условие локальной интегрируемости функции Q в некоторой степени s также влечёт равностепенную непрерывность соответствующего класса.

Теорема 5.2. *Заключение теоремы* 5.1 *имеет место, если в условиях этой теоремы вместо предположений на функцию Q потребовать, чтобы $Q\in L^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $s\geqslant n/(n-\beta)$, где $n-1\neq\beta\neq n$.*

Доказательство. Как и в случае теоремы 5.1, сведём доказательство теоремы 5.2 к утверждению теоремы 1.1. Для этого вначале подберём функции I и $\psi\equiv\psi_{\varepsilon}$, соответствующие обозначениям леммы 2.1.

Зафиксируем произвольным образом $0<\varepsilon_0<\infty$, так, чтобы шар $G:=B(x_0,\varepsilon_0)$ лежал вместе со своим замыканием в некоторой нормальной окрестности точки x_0, и положим $\psi(t):=1/t$. Заметим, что указанная функция ψ удовлетворяет неравенствам $0<I_0(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt<\infty$. Покажем также, что в этом случае выполнено соотношение

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)}Q(x)\psi^{\beta}(d(x,x_0))\;dv(x)\;=\;o\left(I_0^{\beta}(\varepsilon,\varepsilon_0)\right)\,. \tag{5.4}$$

Применяя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{d^{\beta}(x,x_0)}\, dv(x)$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{1}{d^{\beta q}(x,x_0)}\, dv(x)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{G} Q^{q'}(x)\, dv(x)\right)^{\frac{1}{q'}}, \quad (5.5)$$

где $1/q+1/q'=1$. Заметим, что первый интеграл в правой части неравенства (5.5) с точностью до некоторой постоянной может быть подсчитан непосредственно. Действительно, пусть для начала $q'=\frac{n}{n-\beta}$ и, следовательно, $q=\frac{n}{\beta}$. Ввиду аналога теоремы Фубини (см. замечание 2.1 в [9]) будем иметь

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{1}{d^{\beta q}(x,x_0)}\, dv(x) \leqslant C\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{t} = C\log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\,.$$

При $\varepsilon\to 0$ будем иметь:

$$\frac{1}{I_0^{\beta}(\varepsilon,\varepsilon_0)}\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{d^{\beta}(x,x_0)}\, dv(x)$$
$$\leqslant C^{\frac{\beta}{n}}\|Q\|_{L^{\frac{n}{n-\beta}}(G)}\left(\log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{-\beta+\frac{\beta}{n}}\to 0\,,$$

что влечёт выполнение соотношения (5.4).

Пусть теперь $q'>n/(n-\beta)$, т.е., $q=q'/(q'-1)$. В этом случае

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{1}{d^{\beta q}(x,x_0)}\, dv(x) \leqslant C\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} t^{n-\frac{\beta q'}{q'-1}-1}dt \leqslant C\int\limits_{0}^{\varepsilon_0} t^{n-\frac{\beta q'}{q'-1}-1}dt$$
$$=\frac{C}{n-\frac{\beta q'}{q'-1}}\varepsilon_0^{n-\frac{\beta q'}{q'-1}},$$

и, значит,

$$\frac{1}{I_0^{\beta}(\varepsilon,\varepsilon_0)}\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)}{d^{\beta}(x,x_0)}\, dv(x)$$
$$\leqslant \|Q\|_{L^{q'}(G)}\left(\frac{C}{n-\frac{\beta q'}{q'-1}}\varepsilon_0^{n-\frac{\beta q'}{q'-1}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{-\beta},$$

что также влечёт выполнение соотношения (5.4).

Дальнейшая логика рассуждений соответствует последней части доказательства теоремы 5.2. А именно, полагая $\eta(t) := \psi(t)/I_0(\varepsilon, \varepsilon_0)$, мы вновь заключаем, что функция η удовлетворяет ограничению $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(r)dr = 1$. Применим теперь предложение 3.1 при $p = \beta$. Ввиду этого предложения, а также соотношений (5.2) и (5.4), при некоторой постоянных $C, C_0 > 0$ мы будем иметь, что

$$\frac{C_0}{I^{\beta-1}} \leqslant C \int\limits_A Q(x)\eta^\beta(d(x, x_0))dv(x) = \alpha(\varepsilon) \to 0\,,\ \varepsilon \to 0\,,$$

где I определено в (5.3). Последнее соотношение возможно лишь при $I \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, поскольку его правая часть стремится к нулю.

Таким образом, интеграл I в (5.3) расходится и, значит, необходимое заключение снова вытекает из теоремы 1.1. $\Box$

В статье не исследован случай размерности $n = 2$, не относящийся к утверждениям теорем 1.1, 5.1 и 5.2 и требующий отдельного рассмотрения.

Литература

[1] V. Ya.Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami Equation: A Geometric Approach*, Developments in Mathematics, vol. 26., New York etc.: Springer, 2012.

[2] V.Ya. Gutlyanskiĭ and A. Golberg, *On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space*, J. d' Anal. Math., **109** (2009), 233–251.

[3] A. Golberg and R. Salimov, *Topological mappings of integrally bounded p-moduli*, Ann. Univ. Buchar. Math. Ser., **3(LXI)** (2012), No. 1, 49–66.

[4] T. Iwaniec and G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*, Oxford, Clarendon Press, 2001.

[5] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.

[6] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion*, J. d'Anal. Math., **93** (2004), 215–236.

[7] Р.Р. Салимов, *О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля*, Дальневост. матем. журн., **14** (2014), No. 2, 257–269.

[8] Е. С. Афанасьева, В. И.Рязанов, Р. Р. Салимов, *Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях*, Укр. мат. вестник, **8** (2011), No. 3, 319–342.

[9] Д.П. Ильютко, Е.А. Севостьянов, *Об открытых дискретных отображениях с неограниченной характеристикой на римановых многообразиях*, Мат. Сборник, **207** (2016), No. 4, 65–112.

[10] Е.А. Севостьянов, С.А. Скворцов, *О равностепенной непрерывности обобщённых квазиизометрий на римановых многообразиях*, Математичні студії, **45** (2016), No. 2, 159–169.

[11] Е. С. Смоловая, *Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах*, Укр. мат. журн., **62** (2010), No. 5, 682–689.

[12] Е.А. Севостьянов, *О некоторых свойствах обобщённых квазиизометрий с неограниченной характеристикой*, Укр. матем. ж., **63** (2011), No. 3, 385–398.

[13] A. Golberg, R. Salimov and E. Sevost'yanov, *Normal Families of Discrete Open Mappings with Controlled p-Module*, Contemporary Mathematics, **667** (2016), 83–103.

[14] M. Cristea, *Some properties of open, discrete, generalized ring mappings*, Complex Variables and Elliptic Equations, 2015, DOI: 10.1080/17476933.2015.1108311, 21 p.

[15] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, New York: Springer, 1997.

[16] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on metric spaces*, New York: Springer Science+Business Media, 2001.

[17] Е. С. Афанасьева, *О граничном поведении одного класса отображений в метрических пространствах*, Укр. мат. журн., **66** (2014), No. 1, 17–29.

[18] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Results in Mathematic and Related Areas (3), 26, Berlin, Springer-Verlag, 1993.

[19] T. Adamowicz and N. Shanmugalingam, *Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **35** (2010), 609–626.

[20] Р. Р. Салимов и Е. А.Севостьянов, *Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций*, Матем. сборник, **201** (2010), No. 6, 131–158.

[21] К. Куратовский, *Топология*, Т. 2, М., Мир, 1969.

[22] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math., **98** (1957), 171–219.

[23] Р.Р. Салимов и Е.А. Севостьянов, *Аналоги леммы Икома-Шварца и теоремы Лиувилля для отображений с неограниченной характеристикой*, Укр. матем. ж., **63** (2011), No. 10, 1368–1380.

[24] W.P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity*, Trans. Amer. Math. Soc., **126** (1967), No. 3, 460–473.

[25] В.А. Шлык, *О равенстве p-емкости и p-модуля*, Сиб. матем. журн., **34** (1993), No. 6, 216–221.

[26] A. Golberg, R. Salimov and E. Sevost'yanov, *Poletskii Type Inequality for Mappings from the Orlicz-Sobolev Classes*, Complex Analysis and Operator Theory, **10** (2016), No. 5, 881–901.

[27] D. Kovtonuyk and V. Ryazanov, *New modulus estimates in Orlicz-Sobolev classes*, Annals of the University of Bucharest (mathematical series), **5(LXIII)** (2014), 131–135.

[28] В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Слабо плоские пространства и границы в теории отображений*, Укр. матем. вестник, **4** (2007), No. 2, 199–234.

Сведения об авторах

Евгений Александрович Севостьянов
Житомирский государственный университет имени Ивана Франко, Житомир, Украина
E-Mail: esevostyanov2009@mail.ru

Сергей Александрович Скворцов
Житомирский государственный университет имени Ивана Франко, Житомир, Украина
E-Mail: serezha.skv@yandex.ru