Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 4, 599 – 602

Задача о тени для шаров фиксированного радиуса

Юрий Б. Зелинский, Ирина Ю.Выговская, Хайджаа К. Дакхил

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Главная цель работы — решение задачи о тени для шаров фиксированного радиуса в n-мерном евклидовом пространстве. Широкий спектр таких задач исследовался в работах одного из авторов и его учеников. Эту задачу можно рассматривать как нахождение минимальных условий обеспечивающих принадлежность точки обобщенно выпуклой оболочке семейства шаров фиксированного радиуса.

2010 MSC. 52A01, 52A30, 26B25.

Ключевые слова и фразы. Евклидово пространство, сфера, шар, симплекс, многогранник, обобщенная выпуклость.

Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве задачу о тени для шаров одинакового радиуса.

Задача. Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров одинакового радиуса в n-мерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с центрами на сфере S^{n-1} и радиуса меньшего от (не превышающего) радиуса сферы достаточно чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Впервые аналогичная задача рассмотрена Г. Худайбергановым [1,2]. Полностью эта задача для шаров разного радиуса решена в [3]. Различные близкие проблемы исследовались на протяжении последних двух лет в работах первого автора и его учеников [4–9]. Рассматриваемая здесь задача формулировалась в списке открытых проблем на конференциях: XI Международная математическая летняя

Статья поступила в редакцию 07.12.2016

ISSN 1810 – 3200.

школа “Алгебра, Топология, Анализ” 1–14.08.2016 г. в Одессе и “Современные достижения в геометрии и топологии” 12–16.09.2016 г. в Харькове [10].

Пример 1. Впишем в сферу n-мерный правильный симплекс и в каждой его вершине разместим замкнутые шары радиуса равного половине ребра симплекса. Шары попарно касаются в средних точках ребер симплекса. Легко проверить вычислениями, что произвольная прямая, проходящая через центр сферы, пересекает, по крайней мере, один из этих шаров. Если же мы будем размещать в вершинах симплекса открытые шары, то прямые, проходящие через центр сферы и средины ребер симплекса (точки касания шаров), с открытыми шарами пересекаться не будут.

Отсюда получим следующее утверждение.

Теорема 1. *$n+1$-го замкнутого шара одинакового радиуса в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центрами на сфере S^{n-1} достаточно для создания тени в центре сферы, если шары могут касаться друг друга.*

Исследуем возможность решить задачу о тени для семейства открытых шаров равного радиуса или семейства замкнутых попарно не касающихся замкнутых шаров. Дальше через $\overline{A}$ обозначаем замыкание множества A, а если $A \subset S^2$, то через A^* обозначим антиподальное к A множество (симметричное относительно центра сферы к множеству A).

Покажем сначала, что четырех открытых шаров одинакового радиуса в пространстве $\mathbb{R}^3$ с центрами на сфере S^2 недостаточно для создания тени в центре сферы. Предположим, что существует семейство из четырех шаров решающих задачу. Выберем произвольную пару шаров. В силу равного их радиуса существует двумерная плоскость L_1, проходящая через центр сферы, которая разделяет эту пару шаров. Аналогично для другой пары шаров существует двумерная плоскость L_2, проходящая через центр сферы, которая разделяет вторую пару шаров. Пересечением плоскостей L_1 и L_2 будет прямая l, проходящая через центр сферы и не пересекающая ни одного шара. Отсюда в частности получается, что четырех замкнутых шаров радиуса меньшего, чем $\sqrt{2/3}$ (половина ребра тетраэдра) недостаточно для создания тени в центре сферы.

Теперь предположим, что существует набор из $m > 4$ замкнутых шаров B_i одинакового радиуса в пространстве с центрами на сфере S^2, который обеспечивает тень в центре сферы. Пусть сначала существуют три шара, которые попарно касаются друг друга. Они вырезают на сфере открытый криволинейный треугольник σ, не покрытый шарами. Через ортоцентр этого треугольника проходит луч из центра сферы, который не пересекает ни одного из шаров набора. Следовательно, чтобы прямая, содержащая этот луч, пересекала один из шаров набора, антиподальный треугольник σ^* должен быть покрытым одним из шаров набора. Если же шары попарно не касаются, то между ними существует область D большая от криволинейного треугольника σ, не покрытая шарами. Антиподальную к ней открытую область D^* невозможно покрыть одним замкнутым шаром или набором касающихся шаров. Поэтому, если искомый набор шаров существует, то соседние шары должны попарно касаться и множество $S^2 \setminus \bigcup_{i=l}^{m} B_i$ состоит из одинаковых открытых криволинейных попарно непересекающихся треугольников. Антиподальная точка к ортоцентру каждого из таких треугольников в силу симметрии должна быть центром одного из шаров семейства. Поэтому центры шаров должны быть вершинами правильного многогранника вписанного в сферу с гранями из треугольников, причем на каждой прямой, проходящей через центр сферы может находиться не более одной вершины многогранника. Но таких правильных многогранников кроме тетраэдра не существует. Аналогично сводится к противоречию ситуация с набором открытых шаров. Отсюда получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Не существует набора открытых попарно непересекающихся шаров равного радиуса в трехмерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с центрами на сфере S^2 и радиуса, не превышающего радиуса сферы такого, что любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала бы хотя один из этих шаров.*

Теорема 3. *Не существует набора из $m > 4$ попарно непересекающихся (или касающихся) замкнутых шаров B_i шаров равного радиуса в трехмерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с центрами на сфере S^2 и радиуса меньшего от радиуса сферы такого, что любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала бы хотя один из этих шаров.*

Исследуем аналогичную ситуацию в случае, когда центры набора шаров не привязаны к сфере.

Пример 2. Рассмотрим в четыре открытых шара B_1, B_2, B_3, B_4 единичного радиуса с центрами в точках $(0,0,1)$, $(\sqrt{3},0,0)$, $(-\sqrt{3}/2, 3/2, 0)$, $(-\sqrt{3}/2, -3/2, 0)$ соответственно. Легко убедиться, что произвольная прямая, проходящая через начало координат, пересекает, по крайней мере, один из этих шаров. Здесь шар B_1 касается остальных трех шаров. В силу непрерывности, существует $\varepsilon > 0$ такое, что при смещении центра шара B_1 в точку $(0, 0, 1+\varepsilon)$ все шары уже попарно не касаются, но произвольная прямая, проходящая через начало координат, будет пересекать, по крайней мере, один из замкнутых шаров $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$, $\overline{B_3}$, $\overline{B_4}$.

Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Четырех попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров одинакового радиуса в пространстве $\mathbb{R}^3$ достаточно для создания тени в фиксированной точке.*

Литература

[1] Г. Худайберганов, *Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров* // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г., № 1772–85 Деп.

[2] Ю. Б. Зелинский, *Выпуклость. Избранные главы*, Праці Інституту математики НАНУ, 92, 2012.

[3] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук, *Обобщённо выпуклые множества и задача о тени* // Укр. матем. журн., **67** (2015), No. 12, 1659–1666.

[4] Ю. Б. Зелинский, *Задача о тени для семейства множеств* // Збірник праць Інституту математики НАНУ, **12** (2015), No. 4, 197–204.

[5] М. В. Ткачук, Т. М. Осипчук, *Задача о тени для эллипсоида вращения* // Збірник праць Інституту математики НАНУ, **12** (2015), No. 3, 243–250.

[6] Ю. Б. Зелінський, М. В. Стефанчук, *Узагальнення задачі про тінь* // Укр. матем. журн., **68** (2016), No. 6, 657–662.

[7] Yu. B. Zelinskii, *Generalized Convex Envelopes of Sets and the Problem of Shadow* // Journal of Mathematical Sciences, **211** (2015), No. 5, 710–717.

[8] Yu. B. Zelinskii, *Problem of shadow (complex case)* // Advances in Mathematics: Scientific Journal, **5** (2016), No. 1, 1–5.

[9] Yu. B. Zelinskii, *The problem of the shadows* // Bulletin de la societé des sci. et letters de Łódź. Sér. Rech. Déform., **66** (2016), No. 1, 34–42.

[10] Yu. B. Zelinskii, Open topological and geometrical problems in analysis // https://www.academia.edu/29063888/Open_topological_and_geometrical_problems_in_analysis.

Сведения об авторах

Юрий Борисович Зелинский
Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: `zel@imath.kiev.ua`

Ирина Юрьевна Выговская
Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: vkirinata@gmail.com

Хайджаа Кхудхаир Дакхил
КГУ им. Т.Г. Шевченка,
Киев, Украина
E-Mail: moonm5385@gmail.com