Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 1, 16 – 32

К вопросу об обобщении матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи

Сергей М. Чуйко

(*Представлена И. И. Скрыпником*)

Аннотация. Предложена постановка линейной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи, обобщающая традиционные линейные краевые задачи для дифференциально-алгебраических уравнений. Найдены конструктивные условия существования, а также схема построения решений линейной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи. Предложена конструкция обобщенного оператора Грина для построения решений линейной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи. Приведены примеры построения решений линейных матричных дифференциально-алгебраических краевых задач.

2010 MSC. 34B15.

Ключевые слова и фразы. Матричная краевая задача, дифференциально-алгебраические уравнения, обобщенный оператор Грина.

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений [1]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] := \mathbb{C}^1[a,b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного дифференциально-алгебраического уравнения

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \tag{1.1}$$

Статья поступила в редакцию 03.03.2017
Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

ISSN 1810 – 3200.

подчиненных краевому условию [2, 3]

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{1.2}$$

Здесь

$$\mathcal{A}Z'(t): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a, b] \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a, b] := \mathbb{C}^1[a, b] \otimes \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$$

— матричный дифференциально-алгебраический оператор, который по определению для любых скалярных функций $\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ и любых постоянных матриц $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ обеспечивает равенство

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогично матричный оператор

$$\mathcal{B}Z(t): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a, b] \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}[a, b]$$

будем далее называть алгебраическим, если для любых скалярных функций $\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ и любых постоянных матриц $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ имеет место равенство

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Здесь также $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a, b]$ — непрерывная матрица и $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a, b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Вообще говоря, предполагаем, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ — произвольные натуральные числа. Матричное дифференциально алгебраическое уравнение (1.1) обобщает традиционные постановки краевых задач, как для матричных дифференциальных уравнений [4–6], так и для дифференциально-алгебраических уравнений [2, 3, 7–10]. С другой стороны, матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача (1.1), (1.2) обобщает традиционные постановки нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

Изучение краевых задач, как матричных, так и для дифференциально-алгебраических уравнений основано на исследовании алгебраических матричных уравнений, в частности, результаты, полученные для матричного дифференциального уравнения Риккати [5] опираются на исследования матричного алгебраического уравнения типа Ляпунова [11]; результаты статей [3, 6, 8, 10] опираются на исследования матричных уравнений типа Сильвестра, и, в частности, уравнения типа Ляпунова [11, 14–17].

Постановка все более общих краевых задач для дифференциально-алгебраических уравнений вида (1.1) позволяет сформулировать проблему, изучению которой посвящена данная статья, а именно: проблему нахождения наиболее общей постановки краевых задач для дифференциально-алгебраических уравнений вида (1.1), для которых применима схема исследования, а также построения решений, предложенная в статьях [3, 6, 8, 10].

2. Общий вид линейных ограниченных матричных функционалов

Поставленная задача приводит к необходимости нахождения общего вида линейного ограниченного матричного функционала: $LX: \ \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$, а также общего вида линейного непрерывного матричного функционала:

$$\mathcal{L}X(\cdot): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}.$$

Определим оператор $\mathcal{M}[A]: \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A, а также обратный оператор [14–16]

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big]: \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Обозначим матрицы

$$x := \mathcal{M}X \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad y := \mathcal{M}Y \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta}, \quad Y := LX \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}.$$

Таким образом, получаем линейный ограниченный матричный функционал

$$\ell x := [\mathcal{M}L](X): \ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta},$$

общий вид которого хорошо известен [18, с. 192]: любой вектор $y \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta}$ однозначно определяет вектор $x \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ и некоторая матрица $Q \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}: \ y = Qx$, при этом $Y = \mathcal{M}^{-1}(y) = \mathcal{M}^{-1}(Qx)$. Определим матрицы

$$\Upsilon_1 := (\ 1\ ) \in \mathbb{R}^{1\times 1}, \Upsilon_2 := (\ 1\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{4\times 1},$$

$$\Upsilon_3 := (\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{9\times 1}, \ \dots .$$

Вектор Υ_m состоит из $m-1$ цепочки вида $(\ 1\ 0\ 0\ ...\ 0\ )^* \in \mathbb{R}^{(m-1)\times 1}$ и заканчивается единицей:

$$\Upsilon_m := \Big(\ 1\ 0\ 0\ ...\ 0\quad 1\ 0\ 0\ ...\ 0\quad ...\quad 1\ 0\ 0\ ...\ 0\quad 1\ \Big)^* \in \mathbb{R}^{m^2\times 1}.$$

Определим также матрицы [14]

$$\Big[E_n^m\Big]_j := \Big[E_1^m\Big]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n\times m\cdot n}, \quad \Big[E_1^m\Big]_j := \Big\{\delta_{ij}\Big\}_{i=1}^m \in \mathbb{R}^{1\times m};$$

здесь δ_{ij} — символ Кронеккера [13]. При этом

$$\begin{aligned} Y &= \mathcal{M}^{-1}(Qx) = \sum_{k=1}^{\delta} \Big[E_\gamma^\delta\Big]_k Q\mathcal{M}(X) \Big[E_1^\delta\Big]_k \\ &= \sum_{k=1}^{\delta} \Big[E_\gamma^\delta\Big]_k Q\,(I_\beta \otimes X)\Upsilon_\beta \Big[E_1^\delta\Big]_k. \end{aligned}$$

Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ j=1,\ 2,\ ...\ ,\ \alpha\cdot\beta$ — естественный базис [13] пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, а также матрицы $\Theta_k := L\,\Xi_k,\ k=1,\ 2,\ ...\ ,\ \alpha\cdot\beta$; в этом случае

$$Q = \sum_{i=1}^{\alpha\cdot\beta} \Big[E_1^{\alpha\cdot\beta}\Big]_i \otimes \mathcal{M}\Theta_i,$$

следовательно

$$Y = \sum_{i=1}^{\alpha\cdot\beta}\sum_{k=1}^{\delta} \Big[E_\gamma^\delta\Big]_k \Bigg\{\Big[E_1^{\alpha\cdot\beta}\Big]_i \otimes \mathcal{M}\Theta_i\Bigg\}(I_\beta\otimes X)\Upsilon_\beta \Big[E_1^\delta\Big]_k.$$

Итак, получаем

$$Y = \sum_{i=1}^{\alpha\cdot\beta}\sum_{k=1}^{\delta} \Phi(i,k)\,(I_\beta\otimes X)\,\Psi(k), \quad \Psi(k) := \Upsilon_\beta \Big[E_1^\delta\Big]_k,$$

где

$$\Phi(i,k) := \Big[E_\gamma^\delta\Big]_k \Bigg\{\Big[E_1^{\alpha\cdot\beta}\Big]_i \otimes \mathcal{M}\Theta_i\Bigg\}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Всякий линейный ограниченный матричный функционал*

$$LX:\ \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$$

в пространстве $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ *может быть представлен в виде*

$$LX = \sum_{i=1}^{\alpha\cdot\beta}\sum_{k=1}^{\delta}\Phi(i,k)\,(I_\beta\otimes X)\,\Psi(k). \tag{2.3}$$

Заметим, согласно доказанной лемме 1, что матричный дифференциально-алгебраический оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ может быть приведен к виду (2.3):

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{i=1}^{\alpha\cdot\beta}\sum_{k=1}^{\delta}\Phi(i,k,t)\,(I_\beta\otimes Z'(t))\,\Psi(k,t).$$

Аналогично, матричный алгебраический оператор $\mathcal{B}Z(t)$ может быть приведен к виду (2.3):

$$\mathcal{B}Z(t) = \sum_{i=1}^{\alpha\cdot\beta}\sum_{k=1}^{\delta}\Phi(i,k,t)\,(I_\beta\otimes Z(t))\,\Psi(k,t).$$

Пример 1. *Покажем, что матричный алгебраический оператор*

$$LX = \sum_{i=1}^{3} S_i\,X\,R_i + \int_0^1\int_0^1 U(t,s)\,X\,V(t,s)\,dt\,ds \tag{2.4}$$

может быть приведен к виду (2.3)*; здесь*

$$S_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$R_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$U(t,s) := \begin{pmatrix} t & 0\\ t & s\\ 0 & s\end{pmatrix}, \quad V(t,s) := \begin{pmatrix} s & s & 0 & 0\\ 0 & s & t & 0\\ 0 & 0 & t & t\end{pmatrix}.$$

Естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$ составляют матрицы

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключевая при этом матрица

$$Q = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 15 & 4 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 16 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

приводит матричный алгебраический оператор (2.4) к виду (2.3):

$$LX = \sum_{k=1}^{4} \Big[E_3^4\Big]_k Q\,(I_3 \otimes X)\,\Upsilon_3 \Big[E_1^4\Big]_k, \quad \Big[E_1^4\Big]_j := \Big\{\delta_{ij}\Big\}_{i=1}^{4} \in \mathbb{R}^{1\times 4}.$$

Обозначим вектор-столбцы

$$x(t) := \mathcal{M}X(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta}[a,b], \quad y := \mathcal{M}Y \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta}, \quad Y := \mathcal{L}X(\cdot) \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}.$$

Таким образом, получаем линейный ограниченный матричный функционал

$$\ell x(\cdot) := [\mathcal{M}\mathcal{L}](\cdot) : \ \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta}[a,b] \to \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta},$$

общий вид которого хорошо известен [19, с. 362]: любой вектор $y \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta}$ однозначно определяет вектор $x(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta}[a,b]$ и некоторая матрица $W(t)$, элементы которой — функции с ограниченной на отрезке $[a,b]$ вариацией:

$$\ell x(\cdot) = \int_a^b dW(t)\,x(t),$$

а также интеграл Римана–Стилтьеса [20, с. 10]. При этом

$$Y \ = \ \mathcal{M}^{-1}(y) = \mathcal{M}^{-1}\int_a^b dW(t)\,x(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{\delta} \left[E_\gamma^\delta\right]_k \int_a^b dW(t)\,\mathcal{M}X(t)\left[E_1^\delta\right]_k$$
$$= \sum_{k=1}^{\delta} \left[E_\gamma^\delta\right]_k \int_a^b dW(t)\,(I_\beta\otimes X(t))\Upsilon_\beta\left[E_1^\delta\right]_k.$$

Итак, получаем

$$Y = \int_a^b \sum_{k=1}^{\delta} d\left[W_\gamma^\delta(t)\right]_k (I_\beta\otimes X(t))\,\Psi(k),\quad \Psi(k) := \Upsilon_\beta\left[E_1^\delta\right]_k.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Всякий линейный ограниченный матричный функционал*

$$\mathcal{L}X(\cdot):\ \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b]\to\mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$$

в пространстве $\mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b]$ *может быть представлен в виде*

$$\mathcal{L}X(\cdot) = \int_a^b \sum_{k=1}^{\delta} d\,W_k(t)\,(I_\beta\otimes X(t))\,\Psi(k),\quad \Psi(k) := \Upsilon_\beta\left[E_1^\delta\right]_k,\quad (2.5)$$

где

$$W_k(t) := \left[E_\gamma^\delta\right]_k W(t),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ \delta$$

— матрицы, элементы которых — функции с ограниченной на отрезке $[a,b]$ *вариацией.*

Другими словами, всякий линейный ограниченный матричный функционал $\mathcal{L}X(\cdot)$ в пространстве $\mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b]$ однозначно, может быть с точностью до не более чем счетного множества точек отрезка $[a,b]$, определяет некоторая матрица $W(t)$, элементы которой — функции с ограниченной на отрезке $[a,b]$ вариацией:

$$\mathcal{L}X(\cdot) = \mathcal{M}^{-1}\int_a^b dW(t)\,\mathcal{M}X(t).$$

Пример 2. *Покажем, что матричный функционал*

$$LX(\cdot) = \int_0^1\int_0^1 U(t,s)\,X(t)\,V(t,s)\,dt\,ds:\ \mathbb{C}^1_{3\times 2}[a,b]\to\mathbb{R}^{6\times 4}\qquad (2.6)$$

может быть приведен к виду (2.5); *здесь*

$$U(t,s) := \begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t,s) := \begin{pmatrix} t & 0 & s & 0 \\ 0 & s & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Естественный базис пространства $\mathbb{R}^{3\times 2}$ составляют матрицы

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*, \ \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*, \ \dots, \ \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*.$$

Согласно лемме 2, матричный функционал (2.6) может быть представлен в виде (2.5):

$$\mathcal{L}X(\cdot) = \int_a^b \sum_{k=1}^{\delta} d\,W_k(t)\,(I_\beta \otimes X(t))\,\Psi(k), \quad \Psi(k) := \Upsilon_\beta \left[E_1^\delta\right]_k,$$

где

$$W_1(t) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 3t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 4t^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4t^3 & 0 & 0 & 0 \\ 4t^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_2(t) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_3(t) = \frac{1}{12} = \begin{pmatrix} 0 & 4t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4t & 0 & 0 & 0 \\ 3t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 3t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_4(t) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^3 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрицы, элементы которых — функции с ограниченной на отрезке $[0,1]$ вариацией, а также

$$\Psi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Условия разрешимости краевой задачи (1.1), (1.2)

Задача о нахождении решений матричного дифференциально-алгебраического уравнения (1.1) приводит к задаче о нахождении вектора $z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a;b]$, компоненты которого $z_j(t)$ определяют разложение матрицы

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \quad z_j(t) \in \mathbb{C}^1[a;b], \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta.$$

Линейный дифференциально-алгебраический матричный оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ по определению представим в виде

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\ \Xi^{(j)} z_j'(t),$$

при этом

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z'(t)\Big] = \Omega(t)\cdot z'(t), \quad \Omega(t) := \Big[\Omega_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

где

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta.$$

Аналогично

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{B}Z(t)\Big] = \Theta(t)\cdot z(t), \quad \Theta(t) := \Big[\Theta_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

$$\Theta_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\ \Xi^{(j)}(t)\right].$$

Таким образом, задача о построении решений дифференциально-алгебраического уравнения (1.1) приведена к задаче о нахождении решений $z(t)\in\mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta\times 1}[a;b]$ традиционного дифференциально-алгебраического уравнения [2, 7]

$$\Omega(t)\cdot z'(t) = \Theta(t)\cdot z(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}\Big[F(t)\Big]. \tag{3.7}$$

В статье [6] был исследован случай разрешимости системы (3.7) относительно производной: $P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0,\ P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0$. Здесь $P_{\Omega^*}(t)$ — $(\gamma\cdot\delta\times\gamma\cdot\delta)-$ матрица-ортопроектор: $P_{\Omega^*}(t):\mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta}\to\mathbb{N}(\Omega^*(t))$. Предположим, что псевдообратная матрица $\Theta^+(t)$ непрерывна и условие разрешимости системы (3.7) относительно производной не выполнено. При условии

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t)\neq 0, \quad P_{\Theta^*(t)}\Omega(t) = 0, \quad P_{\Theta^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0 \tag{3.8}$$

система (3.7) разрешима относительно неизвестной

$$z(t) = \Theta^+(t)\Omega(t)\cdot z'(t) - \Theta^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Theta_\rho(t)}c_\rho(t), \quad c_\rho(t)\in\mathbb{C}_\rho[a,b];$$

здесь $P_{\Theta^*}(t)$ — $(\gamma\cdot\delta\times\gamma\cdot\delta)-$ матрица-ортопроектор: $P_{\Theta^*}(t):\mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta}\to\mathbb{N}(\Theta^*(t))$; матрица $P_{\Theta_\rho(t)}$ составлена из ρ линейно независимых столбцов ортопроектора P_Θ. Предположим, что матрица $\Theta^+(t)\Omega(t)$ постоянного ранга

$$\mathrm{rank}\ \Theta^+(t)\Omega(t) = \omega, \quad \alpha\beta - \omega := \eta$$

и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при этом неособенным $(\det S(t))\neq 0$ преобразованием подобия $\Theta^+(t)\Omega(t) = S(t)J(t)S^{-1}(t)$ она приводится к жордановой форме

$$J(t) = \begin{pmatrix} O_\eta & O \\ O & J_\omega(t)\end{pmatrix},\ J_\omega(t)\in\mathbb{R}^{\omega\times\omega}, \quad \det J_\omega(t)\neq 0, \quad O_\eta\in\mathbb{R}^{\eta\times\eta}.$$

Обозначим вектор

$$y(t) = S^{-1}(t)z(t) := \mathrm{col}\ (u(t), v(t)),\ u(t)\in\mathbb{R}^\eta,\ v(t)\in\mathbb{R}^\omega.$$

При условии (3.8) система (3.7):

$$J(t)\cdot y' = \Big(I_{\alpha\beta} - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big)\cdot y + S^{-1}(t)\Theta^+(t)\mathcal{F}(t) + S^{-1}(t)P_{\Theta_\rho(t)}c_\rho(t) \tag{3.9}$$

приводится к виду

$$\begin{pmatrix} O_\eta & O \\ O & J_\omega(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \Big(I_{\alpha\beta} - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big)\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

$$+S^{-1}(t)\Theta^+(t)\mathcal{F}(t) + S^{-1}(t)P_{\Theta_\rho(t)}c_\rho(t).$$

Отметим, что даже однородная часть уравнения (3.10), вообще говоря, не разрешима относительно производных при произвольных функциях $u(t)$ и $v(t)$:

$$P_{J^*(t)}\Big(I_{\alpha\beta} - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big) = P_{J^*(t)} \neq 0;$$

здесь ортопроектор

$$P_{J^*(t)} = \begin{pmatrix} I_\omega & O \\ O & O_\eta \end{pmatrix}, \quad P_{J^*(t)} : \mathbb{R}^{\alpha\beta} \to \mathbb{N}(J^*(t))$$

и матрица

$$S^{-1}(t)S'(t) := \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) & \mathfrak{S}_{\eta\omega}(t) \\ \mathfrak{S}_{\omega\eta}(t) & \mathfrak{S}_{\eta\eta}(t) \end{pmatrix}, \ \mathfrak{S}_{\eta\eta}(t) \in \mathbb{R}^{\eta\times\eta}, \ \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \in \mathbb{R}^{\omega\times\omega}.$$

С другой стороны, уравнение (3.10) разрешимо при условии $v(t) \equiv 0$. Для нахождения второй компоненты $v(t) \in \mathbb{R}^\omega$ вектора $y(t)$ используем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$v' = (J_\omega^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t))\cdot v.$$

Предположим, что матрица $J_\omega^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t)$ непрерывна; обозначим $Y_\omega(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$Y_\omega(t) = \Big(J_\omega^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t)\Big)\cdot Y_\omega(t), \ Y_\omega(a) = I_\omega.$$

Таким образом, при условии (3.8), в случае непрерывности матрицы $J_\omega^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t)$ однородная часть системы (3.7) имеет решение вида

$$z(t, c_\omega) = X(t)c_\omega, \quad X(t) = S(t)\cdot Y(t), \quad Y(t) = \begin{pmatrix} Y_\omega(t) \\ O \end{pmatrix}, \quad c_\omega \in \mathbb{R}^\omega.$$

При условии (3.8) неоднородность системы (3.9) представима двумя компонентами

$$S^{-1}(t)\Theta^{+}(t)\mathcal{F}(t)+S^{-1}(t)P_{\Theta_\rho(t)}c_\rho(t)=\mathrm{col}\,\Big(\varphi(t,c_\rho),\psi(t,c_\rho)\Big),$$

где

$$\varphi(t,c_\rho)=\begin{pmatrix} I_\omega & O\end{pmatrix}\Big(S^{-1}(t)\Theta^{+}(t)\mathcal{F}(t)+S^{-1}(t)P_{\Theta_\rho(t)}c_\rho(t)\Big)\in\mathbb{R}^{\eta},$$

$$\psi(t,c_\rho)=\begin{pmatrix} O & I_\eta\end{pmatrix}\Big(S^{-1}(t)\Theta^{+}(t)\mathcal{F}(t)+S^{-1}(t)P_{\Theta_\rho(t)}c_\rho(t)\Big)\in\mathbb{R}^{\omega}.$$

Система (3.9) расщепляется на обыкновенное дифференциальное и функциональное уравнения

$$\frac{dv}{dt}=\Big(J_\omega^{-1}(t)-\mathfrak{S}_{\omega\omega}(t)\Big)\cdot v+\mathfrak{S}_{\omega\eta}(t)\cdot u+J_\omega^{-1}(t)\psi(t,c_\rho),\quad u+\varphi(t,c_\rho)=0.$$

При условии $\varphi(t,c_\rho),\ \mathfrak{S}_{\omega\eta}(t)\varphi(t,c_\rho)\in\mathbb{C}[a,b]$ система (3.9) имеет решение вида

$$y(t,c_\omega)=Y(t)c_\omega+K\Big[\varphi(s,c_\rho),\psi(s,c_\rho)\Big](t),\quad c_\omega\in\mathbb{R}^{\omega},\quad c_\rho(t)\in\mathbb{C}_\rho[a,b],$$

где

$$K\Big[\varphi(s,c_\rho),\psi(s,c_\rho)\Big](t)$$
$$:=\begin{pmatrix} -\varphi(t,c_\rho) \\ Y_\omega(t)\int_a^t Y_\omega^{-1}(s)\Big(J_\omega^{-1}(s)\psi(s,c_\rho)-\mathfrak{S}_{\omega\eta}(s)\varphi(s,c_\rho)\Big)ds\end{pmatrix}.$$

Таким образом, при условии (3.8) и $\varphi(t,c_\rho),\ \mathfrak{S}_{\omega\eta}(t)\varphi(t,c_\rho)\in\mathbb{C}[a,b]$ система (3.7) имеет решение вида

$$z(t,c_\omega)=X(t)c_\omega+K\Big[F(s);c_\rho(s)\Big](t),\quad c_\omega\in\mathbb{R}^{\omega},\quad c_\rho(t)\in\mathbb{C}_\rho[a,b],$$

где

$$X(t):=S(t)Y(t),\quad K\Big[F(s);c_\rho(s)\Big](t):=S(t)\cdot K\Big[\varphi(s,c_\rho),\psi(s,c_\rho)\Big](t).$$

Итак, при условии (3.8) и $\varphi(t,c_\rho),\ \mathfrak{S}_{\omega\eta}(t)\varphi(t,c_\rho)\in\mathbb{C}[a,b]$ система (1.1) имеет решение вида

$$Z(t,c_\omega)=W(t,c_\omega)+\mathcal{K}\Big[F(s);c_\rho(s)\Big](t),\quad W(t,c_\omega):=\mathcal{M}^{-1}\Big\{X(t)c_\omega\Big\}(t),$$

где

$$\mathcal{K}\Big[F(s);c_\rho(s)\Big](t):=\mathcal{M}^{-1}\Big\{K[F(s);c_\rho(s)]\Big\}(t).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение, обобщающее результаты [2–10, 21] на случай матричного дифференциально-алгебраического уравнения.

Лемма 3. *Предположим, что матрица $\Theta^+(t)\Omega(t)$ постоянного ранга и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при условии* (3.8) *для $\varphi(t,c_\rho)$, $\mathfrak{S}_{\omega\eta}(t)\varphi(t,c_\rho)\in\mathbb{C}[a,b]$ система* (1.1) *имеет решение вида*

$$Z(t,c_\omega)=W(t,c_\omega)+\mathcal{K}\Big[F(s);c_\rho(s)\Big](t),\quad W(t,c_\omega):=\mathcal{M}^{-1}\Big\{X(t)c_\omega\Big\}(t),$$

где

$$\mathcal{K}\Big[F(s);c_\rho(s)\Big](t):=\mathcal{M}^{-1}\Big\{K[F(s);c_\rho(s)]\Big\}(t).$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(a)=0$ для дифференциально-алгебраической системы (1.1).

При условии (3.8) и $\varphi(t,c_\rho),\ \mathfrak{S}_{\omega\eta}(t)\varphi(t,c_\rho)\in\mathbb{C}[a,b]$ решение $z(t,c_\omega)$ системы (3.7) удовлетворяет краевому условию $\ell z(\cdot)=\mathcal{M}\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{Q^*}\Bigg\{\mathcal{M}\mathfrak{A}-\ell K\Big[F(s);c_\rho(s)\Big](\cdot)\Bigg\}=0; \tag{3.11}$$

при этом решение системы (3.7), удовлетворяющее краевому условию $\ell z(\cdot)=\mathcal{M}\mathfrak{A}$ имеет вид

$$z(t,c_r)=X_r(t)c_r+\mathcal{G}\Big[F(s);c_\rho(s)\Big](t),\quad c_r\in\mathbb{R}^r,$$

где

$$\begin{aligned}G\Big[F(s);c_\rho(s)\Big](t)\ &:=\ X(t)Q^+\Bigg\{\alpha-\ell K\Big[F(s);c_\rho(s)\Big](\cdot)\Bigg\}\\ &+\ K\Big[F(s);c_\rho(s)\Big](t).\end{aligned}$$

Здесь $Q:=\ell X(\cdot)-$ $(\mu\nu\times\omega)$ — матрица, $\operatorname{rank} Q=n_1,\ r:=\alpha\beta-n_1$, $P_{Q^*}-$ $(\mu\nu\times\mu\nu)$ — матрица-ортопроектор: $P_{Q^*}:\mathbb{R}^{\mu\nu}\to\mathbb{N}(Q^*)$, $X_r(t):=$

$X(t)P_{Q_r},\ P_{Q_r}$ — $(\omega \times r)$ — матрица, составленная из r линейно-независимых столбцов $(\omega \times \omega)$ — матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{N}(Q)$; $P_{Q_d^*}$— $(d \times \mu\nu)$ — мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно-независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}. Итак, при условиях (3.8), (3.11) и $\varphi(t, c_\rho),\ \mathfrak{S}_{\omega\eta}(t)\varphi(t, c_\rho) \in \mathbb{C}[a, b]$ задача (1.1), (1.2) имеет решение вида

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + \mathcal{G}\Big[F(s); \mathcal{A}\Big](t), \quad W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{X_r(t)c_r\Big\}(t),$$

где

$$\mathcal{G}\Big[F(s); \mathcal{A}\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{G\Big[F(s); c_\rho(s)\Big](t)\Big\}(t).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение, обобщающее результаты [2–10,21] на случай линейной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1), (1.2).

Теорема 1. *Предположим, что матрица $\Theta^+(t)\Omega(t)$ постоянного ранга и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической, а также выполнены условие* (3.8) *и* $\varphi(t, c_\rho),\ \mathfrak{S}_{\omega\eta}(t)\varphi(t, c_\rho) \in \mathbb{C}[a, b]$. *В этом случае матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача* (1.1), (1.2) *разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие* (3.11), *при этом общее решение*

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + \mathcal{G}\Big[F(s); \mathcal{A}\Big](t),$$

$$W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{X_r(t)c_r\Big\}(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$\mathcal{G}\Big[F(s); \mathcal{A}\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{G\Big[F(s); c_\rho(s)\Big](t)\Big\}(t), \quad c_\rho(t) \in \mathbb{C}_\rho[a, b]$$

матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (1.1), (1.2).

Пример 3. *Требованиям доказанной теоремы удовлетворяет задача о построении решений дифференциально-алгебраической краевой задачи*

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) := e^2 Z(0) + Z(1) = 0, \tag{3.12}$$

где

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{i=1}^{2} \mathcal{S}_i \, Z'(t) \, \mathcal{R}_i, \quad \mathcal{S}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_2 := \mathcal{R}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \mathcal{B}Z(t) := \Phi_1 \, Z(t) \, \Psi_1, \quad \Phi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 2\,e^{2t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричное дифференциально-алгебраическое уравнение (3.12) приводится уравнению (3.7), где

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

при этом выполнено условие (3.8), кроме того: матрица $2\,\Theta^+(t)\Omega(t) = \Omega$ постоянного ранга $\omega = 1$ и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической. Неособенным преобразованием подобия матрица $\Theta^+(t)\Omega(t)$ приводится к жордановой форме, где

$$J(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку дифференциально-алгебраическая система (3.12) удовлетворяет требованиям леммы 3, постольку находим ее решение

$$Z(t, c_\omega) = W(t, c_\omega) + \mathcal{K}\Big[F(s); c_\rho(s)\Big](t),$$

$$W(t, c_\omega) = \begin{pmatrix} 0 & c_\omega \, e^{2t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_\omega \in \mathbb{R}^1.$$

Оператор Грина задачи Коши $Z(0) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (3.12)

$$\mathcal{K}\Big[F(s); c_\rho(s)\Big](t) = \begin{pmatrix} 0 & 2t\,e^{2t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

определяется однозначно, поскольку $c_\rho(t) \equiv 0$. Условие (3.11) разрешимости дифференциально-алгебраической краевой задачи (3.12) выполнено, поскольку

$$P_{Q^*} = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ell\mathcal{K}\Big[F(s); c_\rho(s)\Big](\cdot) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\,e^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Искомое решение дифференциально-алгебраической краевой задачи (3.12)

$$Z(t, c_r) = \mathcal{G}\Big[F(s); \mathcal{A}\Big](t) = \begin{pmatrix} 0 & (2\,t-1)\,e^{2t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_r = 0$$

единственно, поскольку $P_Q = 0$.

В заключение заметим, что предложенная в статье техника позволяет обобщение полученных результатов на линейные краевые задачи для матричных дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах [1, 22–24].

Литература

[1] A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2-th edition, Berlin, Boston, De Gruyter, 2016.

[2] S. L. Campbell, *Singular Systems of differential equations*, San Francisco, London, Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program, 1980.

[3] S. M. Chuiko, *A generalized matrix differential-algebraic equation* // Journal of Mathematical Sciences, **210** (2015), No. 1, 9–21.

[4] Р. Беллман, *Введение в теорию матриц*, М., Наука, 1969.

[5] A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations* // Differential Equations, **37** (2001), No. 4, 464–471.

[6] S. M. Chuiko, *Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation* // Russian Mathematics, **60** (2016), No. 8, 64–73.

[7] В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром*, Новосибирск; Наука, 1996.

[8] С. М. Чуйко, *Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем* // Комп. исследов. и моделирование, **5** (2013), No. 5, 769– 783.

[9] A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, V. F. Chistyakov, *Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations* // Computational Mathematics and Mathematical Physics, **53** (2013), No. 6, 777–788.

[10] S. M. Chuiko, *The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem* // Siberian Mathematical Journal, **56** (2015), No. 4, 752–760.

[11] A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type* // Ukrainian Mathematical Journal, **50** (1998), No. 8, 1162–1169.

[12] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, М., Наука, 1988.

[13] В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, М., Наука, 1984.

[14] С. М. Чуйко, *О решении матричного уравнения Сильвестра* // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика, **19** (2014), No. 1 (21), 49–57.

[15] С. М. Чуйко, *О решении матричных уравнений Ляпунова* // Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика, **1120** (2014), 85–94.

[16] С. М. Чуйко, *О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра* // Чебышевский сборник, **16** (2015), No. 1, 52–66.

[17] С. М. Чуйко, *О решении матричного уравнения Ляпунова* // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика и математика, **3** (2015), 176–185.

[18] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, М., Наука, 1977.

[19] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М., Наука, 1968.

[20] А. А. Бойчук, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Киев, Наук. думка, 1990.

[21] С. М. Чуйко, *Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения* // Динамические системы, **4(32)** (2014), No. 1–2, 101–107.

[22] A. A. Boichuk, E. V. Panasenko, *Boundary-value problems for differential equations in a Banach space* // Nonlinear Oscillations, **12** (2009), No. 1, 15–18.

[23] S. M. Chuiko, *On the solvability of a matrix boundary-value problem* // Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya “Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory”, **132** (2017), 139–143.

[24] С. М. Чуйко, *Линейная краевая задача для матричного дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения, **52** (2016), No. 11, 1578–1579.

Сведения об авторах

Сергей Михайлович Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина

E-Mail: `chujko-slav@inbox.ru`