Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 1, 86 – 102

Диференціально-символьний метод розв'язування двоточкової за часом задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними

Зіновій М. Нитребич, Оксана М. Маланчук

(*Представлена І. І. Скрипніком*)

Анотація. У класах цілих функцій досліджено розв'язність задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з локальними двоточковими умовами за часом. Запропоновано диференціально-символьний метод побудови єдиного розв'язку задачі у випадку однозначної її розв'язності, а також частинних розв'язків двоточкової задачі у разі існування неєдиного її розв'язку.

2010 MSC. 35G15.

Ключові слова та фрази. Двоточкові умови за часом, диференціально-символьний метод, квазіполіномні розв'язки.

1. Вступ

В останні десятиріччя активно досліджуються задачі з багатоточковими умовами за часом для диференціальних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними. Це зумовлено тим, що такі задачі мають просту фізичну інтерпретацію і є моделями багатьох фізичних, економічних, медико-біологічних, демографічних та інших процесів.

Задачі з локальними багатоточковими умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними хоч і є близькими за постановкою до задачі Коші, але є, загалом, умовно коректними, а їхня розв'язність в обмежених областях пов'язана з проблемою малих знаменників. Дослідженню таких задач для рівнянь та систем диференціальних рівнянь із частинними похідними на основі метричного підходу присвячені праці [1–4].

Стаття надійшла в редакцію 19.03.2017

Умови однозначної розв'язності багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними в необмежених областях у просторах функцій експоненційного зростання знайдено у працях [5, 6]. Метод дослідження задач з двоточковими умовами за часом у смузі у просторах Соболєва запропоновано в [7].

У працях [8–11] запропоновано диференціально-символьний метод розв'язання задач з умовами за виділеною часовою змінною для рівнянь із частинними похідними. Класами існування та єдиності розв'язку задач у цих працях є простори цілих функцій, зокрема класи квазіполіномів.

Побудові поліномних та квазіполіномних розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними та крайових задач для них присвячені дослідження [12, 13].

У цій статті, що є продовженням досліджень [14–16], вивчається задача з однорідними локальними двоточковими умовами за часом для неоднорідного диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними.

2. Формулювання задачі

У просторі $\mathbb{R}^{1+s}$, де $s \in \mathbb{N}$, змінних t та $x = (x_1, \ldots, x_s)$ дослідимо розв'язність двоточкової задачі

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\,a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t} + b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U = f(t,x), \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &l_{0\partial}U(t,x) \equiv A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x) + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \\ &l_{1\partial}U(t,x) \equiv B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x) + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0, \quad h > 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

У рівнянні (2.1) $f(t,x)$ — задана функція, а диференціальні вирази (скінченного або нескінченного порядку) $a\big(\frac{\partial}{\partial x}\big) = \sum\limits_{|k|=0}^{\infty} a_k \big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k$ та $b\big(\frac{\partial}{\partial x}\big) = \sum\limits_{|k|=0}^{\infty} b_k \big(\frac{\partial}{\partial x}\big)^k$ є такими, що відповідні їм символи $a(\nu) = \sum\limits_{|k|=0}^{\infty} a_k \nu^k$ та $b(\nu) = \sum\limits_{|k|=0}^{\infty} b_k \nu^k$ для $\nu \in \mathbb{C}^s$ є цілими функціями, причому a_k, $b_k \in \mathbb{C}$, $k = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{Z}_+^s$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{C}^s$, $\nu^k = \nu_1^{k_1} \ldots \nu_s^{k_s}$, $|k| = k_1 + \ldots + k_s$.

В умовах (2.2) $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, символи $A_1(\nu)$, $A_2(\nu)$,

$B_1(\nu)$, $B_2(\nu)$ яких для кожного $\nu \in \mathbb{C}^s$ задовольняють умови:

$$|A_1(\nu)|^2 + |A_2(\nu)|^2 \neq 0, \quad |B_1(\nu)|^2 + |B_2(\nu)|^2 \neq 0.$$

Встановимо класи цілих функцій, до яких повинна належати права частина рівняння (2.1), щоб розв'язок задачі (2.1), (2.2) існував і був єдиним у відповідному класі цілих функцій, а також вкажемо диференціально-символьний метод побудови цього розв'язку.

3. Основні результати

Знайдемо функції $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$, які є розв'язками однорідного звичайного диференціального рівняння

$$L\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)T(t,\nu) = 0, \quad \nu \in \mathbb{C}^s, \tag{3.1}$$

і задовольняють двоточкові умови

$$\begin{aligned} l_{0\nu}\widetilde{T}_k(t,\nu) &\equiv A_1(\nu)\widetilde{T}_k(0,\nu) + A_2(\nu)\frac{\partial \widetilde{T}_k}{\partial t}(0,\nu) = \delta_{0k}, \\ l_{1\nu}\widetilde{T}_k(t,\nu) &\equiv B_1(\nu)\widetilde{T}_k(h,\nu) + B_2(\nu)\frac{\partial \widetilde{T}_k}{\partial t}(h,\nu) = \delta_{1k}, \ k \in \{0,1\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

де δ_{jk} — символ Кронекера. Ці функції шукаємо у вигляді

$$\widetilde{T}_k(t,\nu) = c_{k1}(\nu)T_0(t,\nu) + c_{k2}(\nu)T_1(t,\nu), \quad k \in \{0,1\},$$

де $c_{01}(\nu)$, $c_{02}(\nu)$, $c_{11}(\nu)$, $c_{12}(\nu)$ — невідомі функції вектор-параметра $\nu \in \mathbb{C}^s$, а $\{T_0(t,\nu), T_1(t,\nu)\}$ — нормальна в точці $t = 0$ фундаментальна система розв'язків рівняння (3.1).

Відмінність від нуля визначника $\Delta(\nu)$ вигляду

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} l_{0\nu}T_0(t,\nu) & l_{0\nu}T_1(t,\nu) \\ l_{1\nu}T_0(t,\nu) & l_{1\nu}T_1(t,\nu) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1(\nu) & A_2(\nu) \\ d_0(h,\nu) & d_1(h,\nu) \end{vmatrix},$$

де

$$d_0(h,\nu) = B_1(\nu)T_0(h,\nu) + B_2(\nu)\frac{\partial T_0}{\partial t}(h,\nu),$$

$$d_1(h,\nu) = B_1(\nu)T_1(h,\nu) + B_2(\nu)\frac{\partial T_1}{\partial t}(h,\nu),$$

є умовою існування функцій $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$.

Визначник $\Delta(\nu)$ називають характеристичним визначником задачі (2.1), (2.2).

Оскільки коефіцієнти $a(\nu)$ та $b(\nu)$ рівняння (3.1) є цілими функціями, то функції $T_0(t,\nu)$ та $T_1(t,\nu)$ є також цілими стосовно вектор-параметра ν [17], а функція $\Delta(\nu)$ як суперпозиція цілих функцій є також цілою.

3.1. Випадок, коли множина нулів характеристичного визначника є порожньою

Якщо для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$ виконується умова $\Delta(\nu) \neq 0$, то функції $\widetilde{T}_0(t,\nu)$ та $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ як розв'язки рівняння (3.1), що задовольняють умови (3.2), визначаються однозначно і мають вигляд:

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_0(t,\nu) &= \Delta^{-1}(\nu)\Big\{d_1(h,\nu)T_0(t,\nu) - d_0(h,\nu)T_1(t,\nu)\Big\}, \\ \widetilde{T}_1(t,\nu) &= \Delta^{-1}(\nu)\Big\{-A_2(\nu)T_0(t,\nu) + A_1(\nu)T_1(t,\nu)\Big\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

або

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_0(t,\nu) = \frac{e^{-a(\nu)(t+h)}}{\Delta(\nu)} \Bigg[\Big(B_1(\nu) - a(\nu)B_2(\nu)\Big)\frac{\sinh[(h-t)\,D(\nu)]}{D(\nu)} \\ + B_2(\nu)\cosh[(h-t)\,D(\nu)]\Bigg], \\ \widetilde{T}_1(t,\nu) = \frac{e^{-a(\nu)t}}{\Delta(\nu)} \Bigg[\Big(A_1(\nu) - a(\nu)A_2(\nu)\Big)\frac{\sinh[tD(\nu)]}{D(\nu)} \\ - A_2(\nu)\cosh[tD(\nu)]\Bigg], \end{aligned} \tag{3.4}$$

де $D(\nu) = \sqrt{a^2(\nu) - b(\nu)}$.

Зауважимо, що для тих ν, для яких $D(\nu) = 0$, маємо

$$\widetilde{T}_0(t,\nu) = \frac{e^{-a(\nu)(t+h)}}{\Delta(\nu)}\Big[\Big(B_1(\nu) - a(\nu)B_2(\nu)\Big)(h-t) + B_2(\nu)\Big],$$

$$\widetilde{T}_1(t,\nu) = \frac{e^{-a(\nu)t}}{\Delta(\nu)}\Big[\Big(A_1(\nu) - a(\nu)A_2(\nu)\Big)t - A_2(\nu)\Big].$$

Отже, функції (3.4) є цілими (квазіполіномами) за змінною t та цілими за вектор-параметром $\nu \in \mathbb{C}^s$.

Розглянемо функцію

$$\Phi(t,\lambda,\nu) = \frac{e^{\lambda t} - T_0(t,\nu) - \lambda T_1(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)}, \tag{3.5}$$

яка є розв'язком задачі Коші

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\Phi = e^{\lambda t},$$

$$\Phi\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$

а тому є цілою [17] за параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ та вектор-параметром $\nu \in \mathbb{C}^s$.

Поряд з функцією (3.5) розглянемо ще одну функцію вигляду

$$F(t,\lambda,\nu) = \frac{e^{\lambda t} - [A_1(\nu) + \lambda A_2(\nu)]\, \widetilde{T}_0(t,\nu) - [B_1(\nu) + \lambda B_2(\nu)]\, e^{\lambda h} \widetilde{T}_1(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)}, \tag{3.6}$$

де $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ – функції (3.4).

Лема 3.1. *Для функції* (3.6) *правильним є таке зображення:*

$$F(t,\lambda,\nu) = \Phi(t,\lambda,\nu) - \left\{ B_1(\nu)\Phi(h,\lambda,\nu) + B_2(\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial t}(h,\lambda,\nu) \right\} \widetilde{T}_1(t,\nu). \tag{3.7}$$

Доведення. Зі співвідношень (3.3) знаходимо

$$\begin{aligned} T_0(t,\nu) &= A_1(\nu)\widetilde{T}_0(t,\nu) + d_0(h,\nu)\widetilde{T}_1(t,\nu), \\ T_1(t,\nu) &= A_2(\nu)\widetilde{T}_0(t,\nu) + d_1(h,\nu)\widetilde{T}_1(t,\nu). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Тоді маємо

$$(A_1(\nu) + \lambda A_2(\nu))\, \widetilde{T}_0(t,\nu) = T_0(t,\nu) + \lambda T_1(t,\nu) - \Big[d_0(h,\nu) + \lambda d_1(h,\nu) \Big] \widetilde{T}_1(t,\nu).$$

Використовуючи останню рівність, зробимо наступні перетворення над $F(t,\lambda,\nu)$:

$$F(t,\lambda,\nu) = \frac{1}{L(\lambda,\nu)} \Big\{ e^{\lambda t} - T_0(t,\nu) - \lambda T_1(t,\nu) + \Big[d_0(h,\nu) + \lambda d_1(h,\nu) \Big] \widetilde{T}_1(t,\nu) - [B_1(\nu) + \lambda B_2(\nu)]\, e^{\lambda h} \widetilde{T}_1(t,\nu) \Big\}$$

$$= \Phi(t,\lambda,\nu) - \frac{1}{L(\lambda,\nu)} \Big\{ B_1(\nu) \Big[e^{\lambda h} - T_0(h,\nu) - \lambda T_1(h,\nu) \Big] + B_2(\nu) \left[\lambda e^{\lambda h} - \frac{\partial T_0}{\partial t}(h,\nu) - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial t}(h,\nu) \right] \Big\} \widetilde{T}_1(t,\nu)$$

$$= \Phi\left(t,\lambda,\nu\right) - \left\{ B_1(\nu)\Phi\left(h,\lambda,\nu\right) + B_2(\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial t}\left(h,\lambda,\nu\right)\right\} \widetilde{T}_1\left(t,\nu\right).$$

Лему доведено. □

Лема 3.2. *Функція $F(t,\lambda,\nu)$ є квазіполіномом за t та цілою за параметром λ та вектор-параметром ν.*

Доведення. Функції $\widetilde{T}_0(t,\nu)$ та $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ є квазіполіномами за t, тому із зображення (3.6) випливає, що $F(t,\lambda,\nu)$ є також квазіполіномом за цією ж змінною.

З вигляду (3.7) для функції $F(t,\lambda,\nu)$ і того, що $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ та $\Phi(t,\lambda,\nu)$ є цілими за параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ та вектор-параметром $\nu \in \mathbb{C}^s$ відповідно, випливає, що $F(t,\lambda,\nu)$ є також цілою за параметром λ та вектор-параметром $\nu \in \mathbb{C}^s$.

Лему доведено. □

Нехай p — порядок цілої функції $F(t,\lambda,\nu)\, e^{\nu\cdot x}$ за сукупністю змінних $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$, де $\nu\cdot x = \nu_1 x_1 + \ldots + \nu_s x_s$. Тоді $p \in [1;+\infty]$.

Запровадимо класи цілих функцій в залежності від значення, якого набуває p:

$A_{p'}$ — клас цілих функцій $g(x)$, порядок яких є меншим за p', де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, якщо $1 < p < +\infty$;

$A_{p'} = A_\infty$ — клас усіх цілих функцій $g(x)$, якщо $p = 1$;

$A_{p'} = A_1$ — клас цілих функцій $g(x)$ експоненційного типу, якщо $p = \infty$.

Крім того, позначимо через $\mathbb{A}_{p'}$ клас цілих функцій $U(t,x)$, які для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$ належать до $A_{p'}$.

Теорема 3.1. *Якщо $f \in \mathbb{A}_{p'}$ і для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$ виконується умова $\Delta(\nu) \neq 0$, то у класі $\mathbb{A}_{p'}$ існує єдиний розв'язок задачі* (2.1), (2.2)*. Цей розв'язок можна подати у вигляді*

$$U(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F(t,\lambda,\nu)\, e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}, \qquad (3.9)$$

де $F(t,\lambda,\nu)$ – функція (3.6)*, $O = (0,\ldots,0)$.*

Доведення. Нехай $f(t,x)$ — ціла функція, що належить до класу $\mathbb{A}_{p'}$. Визначимо диференціальний вираз $f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ як диференціальний вираз загалом нескінченного порядку через відповідний ряд Маклорена, замінюючи у розвиненні функції $f(t,x)$ змінну t та векторзмінну x відповідно на $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ та $\frac{\partial}{\partial\nu}$. Тоді вираз (3.9) є рядом, що визначає цілу функцію $U(t,x)$, яка для кожного фіксованого t є цілою функцією класу $A_{p'}$ [18], тобто $U(t,x)$ належить до класу $\mathbb{A}_{p'}$. Таке твердження випливає з того, що функція $F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}$, на яку діє диференціальний вираз, є цілою першого порядку за λ та порядку p за сукупністю змінних $\nu_1,\ldots,\nu_s$.

Покажемо, що ціла функція (3.9) задовольняє рівняння (2.1):

$$
\begin{aligned}
&L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)\\
&=L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}\\
&=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\Big\{F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}\\
&=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)F(t,\lambda,\nu)\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\,\nu=O}.
\end{aligned}
$$

Оскільки функції (3.4) задовольняють рівняння (3.1), то

$$
\begin{aligned}
&L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)F(t,\lambda,\nu)\\
&=L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\frac{1}{L(\lambda,\nu)}\Big\{e^{\lambda t}-\big(A_1(\nu)+\lambda A_2(\nu)\big)\widetilde{T}_0(t,\nu)\\
&\qquad-\big(B_1(\nu)+\lambda B_2(\nu)\big)e^{\lambda h}\widetilde{T}_1(t,\nu)\Big\}\\
&=\frac{1}{L(\lambda,\nu)}\left\{L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)e^{\lambda t}-\big(A_1(\nu)+\lambda A_2(\nu)\big)L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\widetilde{T}_0(t,\nu)\right.\\
&\qquad\left.-\big(B_1(\nu)+\lambda B_2(\nu)\big)e^{\lambda h}L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\widetilde{T}_1(t,\nu)\right\}\\
&=\frac{1}{L(\lambda,\nu)}L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)e^{\lambda t}=e^{\lambda t}.
\end{aligned}
$$

Отже, маємо

$$
L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{e^{\lambda t+\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}=f(t,x).
$$

Покажемо, що функція (3.9) справджує умови (2.2). Використаємо для цього такі властивості функції $F(t,\lambda,\nu)$:

$$
A_1(\nu)F(0,\lambda,\nu)+A_2(\nu)\frac{\partial F}{\partial t}(0,\lambda,\nu)\equiv 0,
$$

$$
B_1(\nu)F(h,\lambda,\nu)+B_2(\nu)\frac{\partial F}{\partial t}(h,\lambda,\nu)\equiv 0,
$$

які перевіряються безпосередньо.

Маємо

$$l_{0\partial}U(t,x) = A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F\left(0,\lambda,\nu\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}$$

$$+A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial t}\left(0,\lambda,\nu\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}$$

$$= f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}A_1(\nu)F\left(0,\lambda,\nu\right)\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}$$

$$+f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}A_2(\nu)\frac{\partial F}{\partial t}\left(0,\lambda,\nu\right)\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}$$

$$= f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}\left[A_1(\nu)F(0,\lambda,\nu)+A_2(\nu)\frac{\partial F}{\partial t}(0,\lambda,\nu)\right]\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}\equiv 0.$$

Аналогічно доводиться, що функція (3.9) задовольняє умови (2.2) в точці $t = h$.

У класі $\mathbb{A}_{p'}$ немає інших розв'язків задачі (2.1), (2.2), окрім розв'язку (3.9), оскільки у випадку $\Delta\left(\nu\right) \neq 0\ \forall\nu \in \mathbb{C}^s$ відповідна однорідна задача в $\mathbb{A}_{p'}$ має лише тривіальний розв'язок [15].

Теорему доведено. □

Приклад 3.1. Знайти розв'язок двоточкової задачі

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_3\right]^2 U(t,x) = f(t,x), \quad (t,x)\in\mathbb{R}^4,\\ \big(2-\Delta_3\big)U(0,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,\quad U(1,x)=0,\quad x\in\mathbb{R}^3,\end{gathered} \tag{3.10}$$

в якій $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — тривимірний оператор Лапласа.

▼ Задача (3.10) є задачею (2.1), (2.2), у якій $a(\nu) = -||\nu||^2 \equiv -(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2)$, $b(\nu) = a^2(\nu)$, $A_1(\nu) = 2-||\nu||^2$, $A_2(\nu) = B_1(\nu) = 1$, $B_2(\nu) = 0$, $h = 1$, $s = 3$.

Характеристичний визначник задачі (3.10), функції (3.4) та (3.6) мають вигляд:

$$\Delta(\nu) = e^{||\nu||^2},$$

$$\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right) = (1-t)e^{||\nu||^2 t}, \quad \widetilde{T}_1\left(t,\nu\right) = (2t-1)e^{||\nu||^2(t-1)}.$$

$$F\left(t,\lambda,\nu\right) = \frac{e^{\lambda t}-\left(2+\lambda-\|\nu\|^2\right)\left(1-t\right)e^{\|\nu\|^2 t}-e^{\lambda}\left(2t-1\right)e^{\|\nu\|^2(t-1)}}{\left(\lambda-\|\nu\|^2\right)^2}. \tag{3.11}$$

Функція (3.11) є цілою за λ першого порядку та порядку $p = 2$ за сукупністю змінних ν_1, ν_2, ν_3. Якщо $f \in \mathbb{A}_2$, то за теоремою 3.1 у класі $\mathbb{A}_2$ існує єдиний розв'язок задачі (3.10), який можна подати у вигляді (3.9), де $F(t, \lambda, \nu)$ — функція (3.11).

Зокрема, для функції вигляду $f(t, x) = te^{x_1}$ з класу $\mathbb{A}_2$ за формулою (3.9) знаходимо:

$$U(t,x) = \frac{\partial}{\partial\lambda} e^{\frac{\partial}{\partial\nu_1}} \Big\{F(t,\lambda,\nu)\, e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} = \frac{\partial F}{\partial\lambda}(t,0,1,0,0)e^{x_1}$$
$$= \big[2 + t - 3(1-t)e^t - 3\,(2t-1)\,e^{t-1}\big]\, e^{x_1}.$$

Знайдений розв'язок задачі (3.10) за теоремою 3.1 у класі $\mathbb{A}_2$ є єдиним. ▲

3.2. Випадок, коли множина нулів характеристичного визначника не є порожньою і не збігається з $\mathbb{C}^s$

У цьому разі встановимо однозначну розв'язність задачі (2.1), (2.2) у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},L}$ для деякої підмножини L ($L \neq \varnothing$, $L \neq \mathbb{C}^s$) з простору $\mathbb{C}^s$:
$K_{\mathbb{C},L}$ — клас квазіполіномів дійсних змінних $t, x_1, \ldots, x_s$ вигляду

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N} f_{kj}\,(t,x)\, e^{\beta_k t + \alpha_j\cdot x}, \quad m, N \in \mathbb{N}, \tag{3.12}$$

де комплексні числа $\beta_1, \ldots, \beta_N$ є попарно різними, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ є також попарно різними комплексними векторами з L, а $f_{11}\,(t,x)\,, \ldots,$ $f_{Nm}\,(t,x)$ — поліноми з комплексними коефіцієнтами змінних t, x_1, $\ldots$, x_s такі, що матриця $(f_{kj})_{k=\overline{1,N},\, j=\overline{1,m}}$ не має нульових рядків та нульових стовпців (вважаємо, що до $K_{\mathbb{C},L}$ належить також нульовий квазіполіном $f = 0$).

Зауваження 3.1. Кожному квазіполіному вигляду (3.12) можна поставити у відповідність диференціальний вираз нескінченного порядку $f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, що діє на цілу функцію $\Gamma(\lambda,\nu)$ за формулою

$$f\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Gamma(\lambda,\nu) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N} f_{kj}\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Gamma(\lambda+\beta_k, \nu+\alpha_j). \tag{3.13}$$

Розглянемо множину нулів характеристичного визначника:

$$M = \{\nu \in \mathbb{C}^s\colon \quad \Delta(\nu) = 0\}. \tag{3.14}$$

Для $\nu \in \mathbb{C}^s \backslash M$ розв'язки $\widetilde{T}_0(t,\nu), \widetilde{T}_1(t,\nu)$ задачі (3.1), (3.2) можна знайти однозначно. Вони мають вигляд (3.4), є квазіполіномами за змінною t і не мають особливостей за вектор-змінною ν поза множиною M.

Теорема 3.2. *Нехай $f \in K_{\mathbb{C},L}$, де $L = \mathbb{C}^s \backslash M$, а M — множина* (3.14), *причому $M \neq \mathbb{C}^s$ і $M \neq \varnothing$. Тоді у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},L}$ існує единий розв'язок задачі* (2.1), (2.2). *Цей розв'язок можна подати у вигляді* (3.9), *де $F(t,\lambda,\nu)$ — функція* (3.6).

Доведення. Нехай $f \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\backslash M}$. Тоді згідно з формулами (3.9) та (3.13) маємо:

$$U(t,x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N} f_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right) e^{\beta_k \frac{\partial}{\partial\lambda} + \alpha_j\cdot\frac{\partial}{\partial\nu}} \left\{F(t,\lambda,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\,\nu=O}$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N} f_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right) \left\{F(t,\lambda,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Bigg|_{\lambda=\beta_k,\,\nu=\alpha_j}.$$

З останнього зображення випливає, що $U \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\backslash M}$.

Аналогічно як у теоремі 3.1 доводиться, що функція (3.9) задовольняє рівняння (2.1) та умови (2.2).

Знайдений розв'язок задачі (2.1), (2.2) у класі $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\backslash M}$ є єдиним, оскільки у разі $\Delta(\nu) \neq 0\ \forall \nu \in \mathbb{C}^s\backslash M$ відповідна однорідна задача має в $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\backslash M}$ лише тривіальний розв'язок [15].

Теорему доведено. □

Приклад 3.2. В області $(t,x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3$ розв'язати двоточкову задачу для диференціально-функціонального рівняння (диференціального рівняння нескінченного порядку за змінною x_2)

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t,x_1,x_2) + 2\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x_1}(t,x_1,x_2) + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(t,x_1,x_2+1) = e^{t+x_1},\\ \frac{\partial U}{\partial x_1}(0,x_1,x_2) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x_1,x_2) = 0, \quad U(1,x_1,x_2) = 0.\end{gathered} \tag{3.15}$$

▼ Задача (3.15) є задачею (2.1), (2.2), у якій $a(\nu) = \nu_1$, $b(\nu) = \nu_1^2 e^{\nu_2}$, $s = 2$, $h = 1$, $A_1(\nu) = \nu_1$, $A_2(\nu) = 1$, $B_1(\nu) = 1$, $B_2(\nu) = 0$, $f(t,x) = e^{t+x_1}$.

Характеристичний визначник задачі (3.15), множина M, функції (3.4) та (3.6) матимуть вигляд:

$$\Delta(\nu) = -e^{-\nu_1}\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right],$$

$$M=\left\{\nu\in\mathbb{C}^2:\ \nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}=\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)i,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ i^2=-1,\quad (3.16)$$

$$\widetilde{T}_0\,(t,\nu)=-e^{-\nu_1 t}\frac{\sinh\left[\nu_1\,(1-t)\,\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}{\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]},$$

$$\widetilde{T}_1\,(t,\nu)=e^{-\nu_1(t-1)}\frac{\cosh\left[\nu_1 t\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}{\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]},$$

$$F\,(t,\lambda,\nu)=\frac{e^{\lambda t}-(\nu_1+\lambda)\,\widetilde{T}_0\,(t,\nu)-e^{\lambda}\widetilde{T}_1\,(t,\nu)}{\lambda^2+2\lambda\nu_1+e^{\nu_2}\nu_1^2}.$$

Оскільки $f(t,x)=e^{t+x_1}$ є квазіполіномом вигляду (3.12), у якому $m=1$, $N=1$, $f_{11}(t,x)=1$, $\beta_1=1$, $\alpha_1=(1,0)$ і α_1 не належить до множини (3.16) ($\Delta(\alpha_1)=-e^{-1}$), то за формулою (3.9) обчислюємо:

$$U\,(t,x)=e^{\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{\partial}{\partial\nu_1}}\left\{F(t,\lambda,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=O}=F(t,1,1,0)e^{x_1}$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^t-2\widetilde{T}_0\,(t,1,0)-e\widetilde{T}_1\,(t,1,0)\right)e^{x_1}$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^t+2e^{-t}\,(1-t)-e^{2-t}\right)e^{x_1}.$$

Отже, знайдено розв'язок задачі (3.15) вигляду

$$U(t,x)=\frac{1}{4}\left(e^t+2e^{-t}\,(1-t)-e^{2-t}\right)e^{x_1},$$

який є єдиним за теоремою 3.2 у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^2\setminus M}$, де M — множина (3.16). ▲

Приклад 3.3. В області $(t,x)\in\mathbb{R}^4$ знайти розв'язок двоточкової задачі

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]^2U(t,x)=f(t,x),\\ \left[2\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+1\right]U(0,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,\quad U(1,x)=0.\end{gathered}\quad (3.17)$$

▼ Задача (3.17) є задачею (2.1), (2.2), у якій $a(\nu)=\nu_3-\nu_1\nu_2$, $b(\nu)=a^2(\nu)$, $A_1(\nu)=2\nu_3-\nu_1\nu_2+1$, $A_2(\nu)=B_1(\nu)=1$, $B_2(\nu)=0$, $h=1$, $s=3$.

Для задачі (3.17) маємо $\Delta(\nu)=\nu_3e^{-\nu_3+\nu_1\nu_2}$,

$$M=\left\{\nu\in\mathbb{C}^3:\ \ \nu_3=0\right\},\quad (3.18)$$

$$\widetilde{T}_0(t,\nu) = \frac{e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)t}}{\nu_3}(1-t), \quad \widetilde{T}_1(t,\nu) = \frac{e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)(t-1)}}{\nu_3}[(\nu_3+1)t-1],$$

$$F\left(t,\lambda,\nu\right) = \frac{e^{\lambda t} - \left(2\nu_3 - \nu_1\nu_2 + 1 + \lambda\right)\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right) - e^{\lambda}\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)}{\left(\lambda + \nu_3 - \nu_1\nu_2\right)^2}.$$

Нехай в задачі (3.17) $f(t,x) = (x_1+x_2)e^{t+x_3}$. Тоді $f(t,x)$ є квазіполіномом вигляду (3.12), де $m = N = 1$, $f_{11}(t,x) = x_1 + x_2$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_1 = (0,0,1)$. Оскільки $\Delta(\alpha_1) = e^{-1}$, тобто $\alpha_1 \in \mathbb{C}^3 \backslash M$, то згідно з теоремою 3.2 за формулою (3.9) знаходимо

$$U(t,x) = \Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1} + \frac{\partial}{\partial\nu_2}\Big)e^{\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\nu_3}}\Big\{F\left(t,\lambda,\nu\right)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1} + \frac{\partial}{\partial\nu_2}\Big)\Big\{F\left(t,\lambda,\nu\right)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\lambda=1,\,\nu=(0,0,1)}$$

$$= \frac{1}{4}(x_1+x_2)\left[e^t - 4e^{-t}\left(1-t\right) - e^{2-t}\left(2t-1\right)\right]e^{x_3}.$$

Знайдений розв'язок

$$U(t,x) = \frac{1}{4}(x_1+x_2)\left[e^t - 4e^{-t}\left(1-t\right) - e^{2-t}\left(2t-1\right)\right]e^{x_3}$$

задачі (3.17) за теоремою 3.2 є єдиним у класі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^3\backslash M}$. ▲

У випадку однієї просторової змінної $s = 1$ вкажемо ще один клас однозначної розв'язності задачі (2.1), (2.2).

Позначимо через $A_{1,r}$, де $r > 0$, клас цілих функцій дійсної змінної першого порядку і типу меншого, ніж r, або порядку меншого, ніж одиниця. Через $\mathbb{A}_{1,r}$ позначимо клас цілих функцій $f(t,x)$, які для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$ належать до класу $A_{1,r}$.

Теорема 3.3. *Нехай* $r = \inf\limits_{\nu\in M}|\nu|$*, де* M *— множина* (3.14) *при* $s = 1$*, причому* $r > 0$*, тобто* $\Delta(0) \neq 0$*. Якщо* $f \in \mathbb{A}_{1,r}$*, то у класі функцій* $\mathbb{A}_{1,r}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2.1), (2.2)*, який можна подати у вигляді* (3.9).

Доведення. Згідно з лемою 3.2 функція $F\left(t,\lambda,\nu\right)$ є цілою за λ першого порядку, мероморфною за ν та аналітичною в крузі $K_r = \big\{\nu \in \mathbb{C}\colon |\nu| < r\big\}$, оскільки $\Delta(\nu) \neq 0$ для $\nu \in K_r$. Тоді дія диференціального виразу загалом нескінченного порядку $f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, визначеного рядом Маклорена для цілої функції $f\left(t,x\right)$ заміною t і x відповідно на $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ та $\frac{\partial}{\partial\nu}$, на $F\left(t,\lambda,\nu\right)e^{\nu x}$ є коректною, якщо $f \in \mathbb{A}_{1,r}$ [19]. Результатом такої дії після покладання $\lambda = 0$ та $\nu = 0$ є функція $U(t,x)$, яка є квазіполіномом за змінною t і цілою з класу $A_{1,r}$ за змінною x, тобто $U \in \mathbb{A}_{1,r}$.

Аналогічно як у теоремі 3.1 доводиться, що функція (3.9) задовольняє рівняння (2.1) та умови (2.2).

У класі $\mathbb{A}_{1,r}$ інших розв'язків задачі (2.1), (2.2), крім (3.9), немає, оскільки $\Delta(\nu) \neq 0$ для $\nu \in K_r$ і відповідна однорідна двоточкова задача у класі $\mathbb{A}_{1,r}$ має лише тривіальний розв'язок [15].

Теорему доведено. □

Приклад 3.4. Розглянемо двоточкову задачу

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\right] U(t,x) = e^{-\frac{t+x}{2}}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2,\\ U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad U(\pi,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(\pi,x) = 0, \ \ x \in \mathbb{R}.\end{gathered} \tag{3.19}$$

▼ Для задачі (3.19) як задачі (2.1), (2.2) маємо:

$$a(\nu) = 0, \ b(\nu) = -\nu^2 + \frac{1}{4}, \ A_1(\nu) = A_2(\nu) = B_1(\nu) = B_2(\nu) = 1,$$

$$\Delta(\nu) = \frac{\sinh\left[\pi\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}}\left(\frac{5}{4} - \nu^2\right), \quad \Delta(0) = \frac{5}{8} \quad r = \inf_{\nu \in M} |\nu| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\widetilde{T}_0(t,\nu) = \frac{1}{\Delta(\nu)}\left\{\frac{\sinh\left[(\pi - t)\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}} + \cosh\left[(\pi - t)\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]\right\},$$

$$\widetilde{T}_1(t,\nu) = \frac{1}{\Delta(\nu)}\left\{\frac{\sinh\left[t\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}} - \cosh\left[t\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]\right\},$$

$$F(t,\lambda,\nu) = \frac{e^{\lambda t} - (1+\lambda)\widetilde{T}_0(t,\nu) - (1+\lambda)e^{\pi\lambda}\widetilde{T}_1(t,\nu)}{\lambda^2 - \nu^2 + \frac{1}{4}}.$$

Оскільки функція $f(t,x) = e^{-\frac{t+x}{2}}$ належить до $\mathbb{A}_{1,\sqrt{3}/2}$, то згідно з теоремою 3.3 у класі цілих функцій $\mathbb{A}_{1,\sqrt{3}/2}$ існує єдиний розв'язок задачі (3.19) і його знаходимо за формулою (3.9):

$$U(t,x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial\nu}\right)}\left\{F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu x}\right\}\Big|_{\lambda=\nu=0} = F\Big(t, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big)e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t} - (1-\frac{1}{2})\widetilde{T}_0\left(t, -\frac{1}{2}\right) - (1-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}\pi}\widetilde{T}_1\left(t, -\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\Big\{e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\pi}(\pi - t + 1) - \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}}(t-1)\Big\}.$$

Отже, знайдений розв'язок задачі (3.19)

$$U(t,x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\Big\{e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\pi}(\pi - t + 1) - \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}}(t-1)\Big\}$$

у класі цілих функцій $\mathbb{A}_{1,\sqrt{3}/2}$ є єдиним. ▲

4. Про побудову часткових розв'язків двоточкової задачі

Розглянемо випадок, коли в рівнянні (2.1) $f \in K_{\mathbb{C},M}$, де M – множина (3.14), яка є непорожньою і не збігається з $\mathbb{C}^s$. У цьому разі умови теореми 3.2 не виконуються, однак розв'язок задачі (2.1), (2.2) для $f \in K_{\mathbb{C},M}$ існує, але є неєдиним у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},M}$ і знаходиться з точністю до елементів ядра задачі, розмірність якого визначається потужністю множини M.

Якщо $f \in K_{\mathbb{C},M}$, то з використанням елементів ядра задачі можна вказати нові формули, відмінні від (3.9), за допомогою яких будуть знаходитися часткові розв'язки задачі. Покажемо це на прикладі.

Приклад 4.1. Розглянемо задачу (3.17), у якій $f(t,x) = e^t$.

▼ Оскільки $e^t \in K_{\mathbb{C},M}$, де M — множина (3.18), то умови теореми 3.2 не виконуються і відповідно формула (3.9) є непридатною.

Скористаємось тим, що елементами ядра задачі (3.17) є функції вигляду [16]

$$(1-t)e^{\nu_1\nu_2 t + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2}, \quad (1-t)e^{\nu_1\nu_2(t-1) + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2}$$

і запропонуємо таку формулу для знаходження часткового розв'язку задачі (3.17):

$$U(t,x) = f\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{F^*(t,\lambda,\nu)\Big\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}, \tag{4.1}$$

де

$$F^*(t,\lambda,\nu) = \frac{e^{\lambda t + \nu\cdot x} - (2\nu_3 - \nu_1\nu_2 + 1 + \lambda)\,\widetilde{T}_0^*(t,\nu) - e^{\lambda}\widetilde{T}_1^*(t,\nu)}{(\lambda + \nu_3 - \nu_1\nu_2)^2},$$

$$\widetilde{T}_0^*(t,\nu) = \frac{e^{-\nu_3 t} - e^{-\nu_3 x_3}}{\nu_3}\,(1-t)e^{\nu_1\nu_2 t + \nu\cdot x},$$

$$\widetilde{T}_1^*(t,\nu) = \frac{e^{-\nu_3(t-1)}[(\nu_3+1)t - 1] - e^{-\nu_3 x_3}(t-1)}{\nu_3}\,e^{\nu_1\nu_2(1-t) + \nu\cdot x}.$$

Зауважимо, що функції F^*, $\widetilde{T}_0^*$ та $\widetilde{T}_1^*$ є цілими за параметром λ та вектор-параметром ν відповідно, зокрема,

$$\widetilde{T}_0^*(t,O) = (1-t)(x_3-t),$$

$$\widetilde{T}_1^*(t,O) = -(t-1)^2 + t + x_3(t-1),$$

$$F^*(t,-\nu_3+\nu_1\nu_2,\nu) = e^{-\nu_3+\nu_1\nu_2}\Big(t^2 e^{(-\nu_3+\nu_1\nu_2)(t-1)+\nu\cdot x} - \widetilde{T}_1^*(t,\nu)\Big).$$

Для $f(t,x) = e^t$ за формулою (4.1) знаходимо такий розв'язок задачі (3.17):

$$U(t,x) = F^*(t,1,O)$$
$$= e^t - 2(1-t)(x_3-t) - e\big[-(t-1)^2 + t + x_3(t-1)\big].$$

Зазначимо, що знайдений розв'язок задачі (3.17) є лише частковим. ▲

Висновки

Досліджено розв'язність задачі для неоднорідного рівняння (2.1) із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано однорідні локальні двоточкові умови (2.2), та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними у випадку, якщо характеристичний визначник задачі не є тотожним нулем. Виділено класи цілих функцій як класи існування та єдиності розв'язку задачі, а також запропоновано диференціально-символьний метод побудови розв'язку. У класах квазіполіномів за умови існування неєдиного розв'язку задачі запропоновано метод побудови часткових її розв'язків. Метод застосовано до конкретних двоточкових задач.

Література

[1] Б. Й. Пташник, І. Я. Кміть, В. С. Ільків, В. М. Поліщук, *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними*, К., Наук. думка, 2002.

[2] V. S. Il'kiv, *A nonlocal boundary-value problem for partial differential equations of infinite order* // Ukr. Math. Journ., **35** (1983), No. 4, 420–423.

[3] V. S. Il'kiv, *Incorrect nonlocal boundary value problem for partial differential equations* // Func. Analysis and its applications, **197** (2004), 115–121.

[4] B. I. Ptashnyk, M. M. Symotyuk, *Multipoint problem for nonisotropic partial differential equations with constant coefficients* // Ukr. Math. Journ., **55** (2003), No. 2, 293–310.

[5] В. М. Борок, М. А. Перельман, *О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое* // Изв. вузов, Математика, **8** (1973), 29–34.

[6] І. Л. Віленць, *Класи единості розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних* // ДАН УРСР, Сер. A, **3** (1974), 195–197.

[7] Ю. А. Дубинский, *Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике* // Успехи мат. наук, **37** (1982), No. 5, 97–159.

[8] П. І. Каленюк, З. М. Нитребич, *Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод*, Львів, Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2002.

[9] P. I. Kalenyuk, Z. M. Nytrebych, *On an operational method of solving initial-value problems for partial differential equations induced by generalized separation of variables* // J. Math. Sci., **97** (1999), No. 1, 3879–3887.

[10] Z. M. Nitrebich, *A boundary-value problem in an unbounded strip* // J. Math. Sci., **79** (1996), No. 6, 1388–1392.

[11] Z. M. Nitrebich, *An operator method of solving the Cauchy problem for a homogeneous system of partial differential equations* // J. Math. Sci., **81** (1996), No. 6, 3034–3038.

[12] G. N. Hile, A. Stanoyevitch, *Heat polynomial analogous for equations with higher order time derivatives* // J. Math. Anal. Appl., **295** (2004), 595–610.

[13] P. Pedersen, *A basis for polynomial solutions for systems of linear constant coefficient PDE's* // Adv. Math., **117** (1996), 157–163.

[14] O. Malanchuk, Z. Nytrebych, *Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables* // Open Mathematics, **15** (2017), 101–110.

[15] З. М. Нитребич, О. М. Маланчук, *Критерій існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків однорідної двоточкової задачі для рівнянь з частинними похідними* // Бук. мат. журн., **4** (2016), No. 3–4, 140–149.

[16] Z. M. Nytrebych, O. M. Malanchuk, *The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation* // J. Math. Sci., **224** (2017), No. 4, 541–554.

[17] А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников, *Дифференциальные уравнения*, М., Наука, 1980.

[18] П. І. Каленюк, З. М. Нитребич, *Про дію диференціального виразу нескінченного порядку у класах цілих функцій багатьох комплексних змінних* // Доп. НАН України, **6** (2007), 11–16.

[19] З. М. Нитребич, С. М. Репетило, Б. Й. Пташник, *Задача Діріхле-Неймана для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі* // Наук. вісник Ужгород. ун-ту, Сер. "Матем. і інформ.", **25** (2014), No. 1, 94–105.

Відомості про авторів

Зіновій Миколайович Нитребич
Національний університет
“Львівська політехніка”,
Львів, Україна
E-Mail: znytrebych@gmail.com

Оксана Михайлівна Маланчук
Львівський національний
медичний університет ім. Д. Галицького,
Львів, Україна
E-Mail: Oksana.Malan@gmail.com