Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 2, 192 – 200

Фільтрація стаціонарних гаусівських статистичних експериментів

Дмитро В. Королюк, Володимир С. Королюк

Анотація. Фільтрація стаціонарних гаусівських статистичних експериментів визначається розв'язком рівняння оптимальної фільтрації, яке характеризується двовимірною матрицею коваріацій. Параметри фільтрованого сигналу задаються емпірічними коваріаціями.

Ключові слова та фрази. Статистичні експерименти, коефіцієнт фільтрації, різницеве стохастичне рівняння сигналу, коваріаційні характеристики фільтрованого сигналу.

1. Вступ

Системний аналіз задач фільтрації стохастичних процесів викладено у монографії Р. Ш. Ліпцера і А. М. Ширяєва "Статистика случайных процессов" (М., Наука, 1974). Задачі фільтрації послідовностей досліджено у розділах XIII - XV. Розв'язок задач фільтрації для послідовностей, шо мають гаусівський (нормальний) розподіл, базується на теоремі про нормальну корреляцію [1, Теорема 13.1], яка забезпечує лінійну фільтрацію.

При дослідженні стохастичних послідовностей з дискретним часом при додатковій умові стаціонарності та гаусовості істотно використовуються коваріаційні характеристики як самої послідовності α_t, $t \geqslant 0$, так і її приростів $\Delta\alpha_{t+1} := \alpha_{t+1} - \alpha_t$, $t \geqslant 0$.

В даній роботі задача фільтрації стаціонарних гаусівських статистичних експериментів розглядається для двокомпонентної стаціонарної гаусівської послідовності СЕ $(\alpha_t, \Delta\alpha_{t+1})$, $t \geqslant 0$, яка характеризується двовимірною матрицею коваріацій

$$\mathbb{R}_\alpha = \begin{bmatrix} R_\alpha & R_\alpha^0 \\ R_\alpha^0 & R_\alpha^\Delta \end{bmatrix}, \quad R_\alpha := E\alpha_t^2 \ , \quad R_\alpha^0 := E(\alpha_t \, \Delta\alpha_{t+1}), \quad R_\alpha^\Delta := E(\Delta\alpha_t)^2. \tag{1}$$

Стаття надійшла в редакцію 27.06.2017

ISSN 1810 – 3200.

Обчислення коваріацій в (1) використовує різницеве стохастичне рівняння

$$\Delta\alpha_{t+1} = -V_0\alpha_t + \sigma_0\Delta W^0_{t+1}, \tag{2}$$

яке визначає послідовність СЕ α_t, $t \geqslant 0$ та її прирости $\Delta\alpha_{t+1} := \alpha_{t+1} - \alpha_t$, $t \geqslant 0$ при заданому α_0.

Виявляється, що фільтрований стаціонарний гаусівський статистичний експеримент визначається розв'язком рівняння оптимальної фільтрації (Теорема 3), який характеризується двовимірною матрицею коваріацій зі стохастичною компонентою, що задає оновлюючу послідовність.

Стаціонарність у широкому сенсі СЕ α_t, $t \geqslant 0$ забезпечується додатковими умовами [2, Th. 1]:

Теорема 1 (теорема стаціонарності). *СЕ α_t, $t \geqslant 0$, що визначається розв'язком різницевого стохастичного рівняння* (2)*, є стаціонарним у широкому сенсі послідовністю тоді і тільки тоді, коли має місце наступне співвідношення:*

$$R_\alpha =: E\alpha_t^2 = \sigma_0^2/V_0(2 - V_0) \ , \quad E\alpha_t = 0 \ , \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

а початкове значення α_0 є нормально розподіленою випадковою величиною, некоррельованою зі стохастичною компонентою ΔW_{t+1}: $E(\alpha_0\,\Delta W_{t+1}) = 0$.

Відомо (див., напр., [3]), що розв'язок РСР (2) має марківську властивість.

Більш того, виявляється, що двокомпонентна стаціонарна гаусівська послідовність $(\alpha_t, \Delta\alpha_{t+1})$, $t \geqslant 0$, що задається матрицею коваріацій (1), при додатковій умові марковості, також визначається розв'язком різницевого стохастичного рівняння (2). Цей результат наведений у [2, Th. 5] для мультиваріантних СЕ.

Теорема 2 (теорема існування РСР). *Стаціонарні гаусівські марківські СЕ, що характеризується матрицею коваріацій* (1)*, задовольняють РСР* (2) *з нормально розподіленою стохастичною компонентою $\sigma_0\Delta W^0_{t+1}$, $t \geqslant 0$.*

При цьому дисперсія стохастичної компоненти задається коефіцієнтом стаціонарності $\mathcal{E}_0$:

$$\sigma_0^2 = R_\alpha\,\mathcal{E}_0 \ , \quad \mathcal{E}_0 := 2V_0 - V_0^2.$$

2. Різницеве стохастичне рівняння процесу фільтрації

Задача фільтрації стаціонарних гаусівських статистичних експериментів розглядається для розв'язку *різницевого стохастичного рівняння* (РСР)

$$\Delta\alpha_{t+1} = -V_0\alpha_t + \sigma_0\Delta W^0_{t+1}\ , \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

яке визначає корисний сигнал.

Сигнал α_t, $t \geqslant 0$ спостерегається з використанням фільтру β_t, $t \geqslant 0$, який також є розв'язком різницевого стохастичного рівняння

$$\Delta\beta_{t+1} = -V\beta_t + \sigma\Delta W_{t+1}\ , \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

Процес (спостережний) фільтрації задається сумою

$$\xi_t = \alpha_t + \beta_t\ , \quad t \geqslant 0, \tag{6}$$

з некоррельованим сигналом та фільтром: $E(\alpha_t\,\beta_t) = 0$.

Отже процес фільтрації ξ_t, $t \geqslant 0$ також задається РСР:

$$\Delta\xi_{t+1} = -V\xi_t - C\alpha_t + \sigma_0\Delta W^0_{t+1} + \sigma\Delta W_{t+1}\ , \quad C := V_0 - V. \tag{7}$$

Враховуючи умови стаціонарності розв'язків різницевих стохастичних рівняннь (4) і (5), дисперсії стохастичних компонент ΔW^0_{t+1} та ΔW_{t+1}, задаються співвідношеннями:

$$\sigma_0^2 = (2V_0 - V_0^2)\cdot R_\alpha\ , \quad \sigma^2 = (2V - V^2)\cdot R_\beta; \tag{8}$$

$$E(\Delta W^0_{t+1})^2 = E(\Delta W_{t+1})^2 = 1. \tag{9}$$

Наявність різницевих стохастичних рівнянь (4)–(7) для сигналу та фільтру дозволяє задачу фільтрації характеризувати двовимірними матрицями коваріацій

$$\mathbb{R}_\alpha = \begin{bmatrix} R_\alpha & R^0_\alpha \\ R^0_\alpha & R^\Delta_\alpha \end{bmatrix}\ , \quad \mathbb{R}_\beta = \begin{bmatrix} R_\beta & R^0_\beta \\ R^0_\beta & R^\Delta_\beta \end{bmatrix}\ , \quad \mathbb{R}_\xi = \begin{bmatrix} R_\xi & -R^0_\xi \\ -R^0_\xi & 2R^0_\xi \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Елементи матриць коваріацій $\mathbb{R}_\alpha$ і $\mathbb{R}_\beta$ визначаються формулами:

$$R^0_\alpha := E[\alpha_t]^2 = -V_0 R_\alpha \quad , \quad R^0_\beta := E[\beta_t]^2 = -VR_\beta,$$

$$R^\Delta_\alpha := E[\Delta\alpha_t]^2 = 2V_0 R_\alpha\ , \quad R^\Delta_\beta := E[\Delta\beta_t]^2 = 2VR_\beta. \tag{11}$$

Співвідношення (6), з урахуванням некоррельованості сигналу та фільтру, забезпечує представлення матриці коваріацій $\mathbb{R}_\xi$ та її обернення:

$$\mathbb{R}_\xi = \mathbb{R}_\alpha + \mathbb{R}_\beta,$$

$$\mathbb{R}_\xi^{-1} = (\mathbb{R}_\alpha + \mathbb{R}_\beta)^{-1} = \mathbb{R}_\alpha^{-1}(\mathbb{I} + \mathbb{R}_\alpha^{-1}\mathbb{R}_\beta)^{-1}. \tag{12}$$

а також $R_{\xi\alpha} := E(\xi_t\alpha_t) = E(\alpha_t)^2 = \mathbb{R}_\alpha$.
Обчислення елементів матриці коваріацій $\mathbb{R}_\xi$ з урахуванням різницевого стохастичного рівняння (7) та співвідношень (8) дає наступні формули:

$$R_\xi^0 := -E(\xi_t\,\Delta\xi_{t+1}) = VR_\xi + CR_\alpha,$$
$$R_\xi^\Delta := E(\Delta\xi_{t+1})^2 = 2(VR_\xi + CR_\alpha). \tag{13}$$

3. Коефіцієнт фільтрації

Згідно з теоремою про нормальну корреляцію [1, Т. 13.1], матриця коваріацій коефіцієнтів фільтрації задається співвідношеннями

$$\Phi = \mathbb{R}_\alpha\mathbb{R}_\xi^{-1} = (\mathbb{I} + \mathbb{R}_\alpha^{-1}\mathbb{R}_\beta)^{-1}. \tag{14}$$

Лема 1. *Елементи матриці коефіцієнтів фільтрації мають представлення:*

$$\Phi_{11} = [V(2-V_0)R_\xi R_\alpha + C(2-V_0)R_\alpha^2]/d,$$
$$\Phi_{22} = [V_0(2-V)R_\xi R_\alpha - CV_0R_\alpha^2]/d,$$
$$\Phi_{12} = C(R_\alpha^2 - R_\xi R_\alpha)/d = -CR_\alpha R_\beta/d\ ,\quad \Phi_{21} = 0. \tag{15}$$

Тут за означенням

$$d := \det\mathbb{R}_\xi = V(2-V)R_\xi^2 - 2CR_\xi R_\alpha - C^2R_\alpha^2. \tag{16}$$

Разом з тим має місце співвідношення між елементами матриці коефіцієнтів фільтрації:

$$\Phi_{22} = \Phi_{11} - 2\Phi_{12}. \tag{17}$$

Зауваження 1. Наявність нуля ($\Phi_{21} = 0$) у матриці коефіцієнта фільтрації (15) забезпечує оптимальну фільтрацію стаціонарних гаусівських статистичних експериментів з використанням лише приростів процесу фільтрації, що задається рівнянням (7).

Доведення леми 1. Використовується представлення оберненої матриці (1):

$$\mathbb{R}_\xi^{-1} = \begin{bmatrix} 2R_\xi^0 & R_\xi^0 \\ R_\xi^0 & R_\xi \end{bmatrix} d^{-1}. \tag{18}$$

Тепер множення матриць (14) дає представлення (15).

Обчислення детермінанту матриці $\mathbb{R}_\xi$

$$\det \mathbb{R}_\xi = 2R_\xi R_\xi^0 - (R_\xi^0)^2,$$

з урахуванням (13) дає формулу (16).

Для доведення (17) розглянемо різницю з використанням заміни параметра $V_0 = V + C$:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} - \Phi_{22} &= [-2CR_\xi R_\alpha + 2CR_\alpha^2]/d \\ &= [-2CR_\alpha(R_\xi - R_\alpha)]/d = [-2CR_\alpha R_\beta]/d = 2\Phi_{12}. \end{aligned} \tag{19}$$

□

4. Рівняння оптимальної фільтрації

Для побудови рівняння оптимальної фільтрації використовуються РСР (4) сигналу α_t, $t \geq 0$, а також спостережний процес фільтрації ξ_t, $t \geq 0$, який задається сумою (6) та визначається розв'язком РСР (7). При цьому істотно використовуються коваріаційні характеристики (10) з урахуванням Леми 1, в якій представлені елементи матриці коефіцієнтів фільтрації, а також співвідношення (17).

Рівняння оптимальної фільтрації для двокомпонентних апостеріорних середніх $\widehat{\alpha}_t$, $\Delta\widehat{\alpha}_{t+1}$, $t \geq 0$:

$$\widehat{\alpha}_t := E[\alpha_t \,|\, \mathcal{F}_t^\xi] \ , \quad \Delta\widehat{\alpha}_{t+1} := E[\Delta\alpha_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_{t+1}^\xi] \ , \quad t \geq 0, \tag{20}$$

будується за схемою, що описана у монографії [1, розд. XIII] з використанням теореми про нормальну корреляцію [1, Т. 13.1], а також теореми 13.4 [1, с. 507].

Середньоквадратична похибка оптимальної фільтрації визначається матрицею коваріацій:

$$\mathbb{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Елементи матриці $\mathbb{\Gamma}$ визначають:

$$\Gamma_{11} = E[(\alpha_t - \widehat{\alpha}_t)^2 \,|\, \mathcal{F}_t^\xi],$$

$$\Gamma_{12} = E[(\alpha_t - \widehat{\alpha}_t)(\Delta\alpha_{t+1} - \Delta\widehat{\alpha}_{t+1}) \,|\, \mathcal{F}_{t+1}^\xi],$$

$$\Gamma_{21} = E[(\Delta\alpha_{t+1} - \Delta\widehat{\alpha}_{t+1})(\alpha_t - \widehat{\alpha}_t) \,|\, \mathcal{F}_{t+1}^\xi],$$

$$\Gamma_{22} = E[(\Delta\alpha_{t+1} - \Delta\widehat{\alpha}_{t+1})^2 \,|\, \mathcal{F}_{t+1}^\xi]. \tag{22}$$

Матриця похибки $\mathbb{\Gamma}$ має представлення [1, Т. 13.1]:

$$\mathbb{\Gamma} = \mathbb{R}_\alpha - \mathbb{R}_\alpha \mathbb{R}_\xi^{-1} \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}_\alpha [\mathbb{I} - \Phi^*]. \tag{23}$$

Рівняння оптимальної фільтрації формулюється для двокомпонентного фільтрованого сигналу (20). А саме, має місце

Теорема 3. *Фільтрований сигнал* $(\widehat{\alpha}_t, \Delta\widehat{\alpha}_{t+1})$ *визначаєтся рівнянням оптимальної фільтрації для приростів:*

$$\Delta\widehat{\alpha}_{t+1} + V_0 \widehat{\alpha}_t = \Phi_{22}[\Delta\xi_{t+1} + V\xi_t + C\widehat{\alpha}_t]. \tag{24}$$

Середньоквадратична похибка оптимальної фільтрації для приростів мають представлення:

$$E[(\Delta\widehat{\alpha}_{t+1} - \Delta\alpha_{t+1})^2 \,|\, \mathcal{F}_{t+1}^\xi] = 2V_0(1 - \Phi_{22})R_\alpha. \tag{25}$$

Доведення теореми 3. Використуємо представлення фільтрованих приростів сигналу (7) (див. [1, ф. (13.60)–(13.61)])

$$E[\Delta\alpha_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t^\xi, \xi_{t+1}] - E[\Delta\alpha_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t^\xi] == \Phi_{22}[\Delta\xi_{t+1} - E[\Delta\xi_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t^\xi]]. \tag{26}$$

Враховуючи співвідношення

$$\Delta\widehat{\alpha}_{t+1} := E[\Delta\alpha_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t^\xi] = -V_0 \, \widehat{\alpha}_t \ , \quad E[\Delta\xi_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t^\xi] = -(V\xi_t + C\widehat{\alpha}_t), \tag{27}$$

отримуємо твердження (24) теореми 3. Середньоквадратична похибка (25) рівняння оптимальної фільтрації доводяться з використанням коеффіцієнтів фільтрації

$$\begin{aligned} E[(\widehat{\alpha}_t - \alpha_t)^2 \,|\, \mathcal{F}_t^\xi] &= (1 - \Phi_{11} - V_0\Phi_{12})R_\alpha, \\ E[(\Delta\widehat{\alpha}_{t+1} - \Delta\alpha_{t+1})^2 \,|\, \mathcal{F}_{t+1}^\xi] &= 2V_0(1 - \Phi_{22})R_\alpha, \\ E[(\widehat{\alpha}_t - \alpha_t)(\Delta\widehat{\alpha}_{t+1} - \Delta\alpha_{t+1}) \,|\, \mathcal{F}_{t+1}^\xi] &= -V_0(1 - \Phi_{11} + 2\Phi_{12})R_\alpha \\ &= -V_0(1 - \Phi_{22})R_\alpha. \end{aligned} \tag{28}$$

та представлення (15). □

За означенням (22) матриця $\mathbb{\Gamma}$ є симетричною. Симетричність матриць у правій частині представлення (25) забезпечується співвідношенням (17) Леми 1.

5. Характеризація фільтрованого сигналу

Для побудови рівняння оптимальної фільтрації використовується РСР (4) сигналу, а також спостережний процес фільтрації (24). Далі використовується представлення фільтру з урахуванням апостеріорного середнього двокомпонентного сигналу $(\widehat{\alpha}_t, \Delta\widehat{\alpha}_{t+1})$, $t \geq 0$:

$$\Delta\xi_{t+1} + V\xi_t + C\widehat{\alpha}_t = \sigma_0 \Delta W^0_{t+1} + \sigma\Delta W_{t+1} - C(\alpha_t - \widehat{\alpha}_t). \tag{29}$$

Для характеризації фільтрованого сигналу перш за все зауважимо, що ліва частина рівняння оптимальної фільтрації

$$\widehat{\varrho}_t = \Delta\widehat{\alpha}_{t+1} + V_0\widehat{\alpha}_t \tag{30}$$

задає стаціонарний гаусівський марківський процес, що характеризується дисперсією

$$\widehat{\sigma}^2 := E\widehat{\varrho}^2_t = \sigma^2_0 + \sigma^2 + C^2\Gamma_{11}. \tag{31}$$

Тут середньоквадратична похибка сигналу Γ_{11} має представлення (28).

Разом з тим, з використанням формули (31) обчислюється коваріація $\widehat{R}_\alpha$:

$$\widehat{\sigma}^2 = V_0(2 - V_0) \cdot \widehat{R}_\alpha \ , \quad \widehat{R}_\alpha =: E(\widehat{\alpha}_t)^2. \tag{32}$$

Отже фільтрований двокомпонентний сигнал $(\widehat{\alpha}_t, \Delta\widehat{\alpha}_{t+1})$, $t \geq 0$ є стаціонарним гаусівським процесом, який характеризується матрицею коваріацій

$$\widehat{\mathbb{R}}_\alpha = \begin{bmatrix} \widehat{R}_\alpha & \widehat{R}^0_\alpha \\ \widehat{R}^0_\alpha & \widehat{R}^\Delta_\alpha \end{bmatrix} \ , \quad \widehat{R}^0_\alpha = -V_0\widehat{R}_\alpha \ , \quad \widehat{R}^\Delta_\alpha = 2V_0\widehat{R}_\alpha. \tag{33}$$

Коваріація фільтру $\widehat{R}_\alpha$ визначається рівняннями (31) і (32).

Рівняння фільтрованого сигналу (29) означає, що має місце наступна рівність (див. [1, Т. 13.5]):

$$E[\Delta\xi_{t+1} + V\xi_t + C\widehat{\alpha}_t]^2 = \widehat{\sigma}^2. \tag{34}$$

Разом з тим, згідно з Теоремою 13.5,

$$E[\Delta\xi_{t+1} + V\xi_t + C\widehat{\alpha}_t]^2 = \mathrm{cov}(\Delta\xi_{t+1}, \Delta\xi_{t+1} \,|\, \mathcal{F}^\xi_t]). \tag{35}$$

Так що рівняння оптимальної фільтрації (24)

$$\Delta\widehat{\alpha}_{t+1} + V_0\widehat{\alpha}_t = \Phi_{22}[\Delta\xi_{t+1} + V\xi_t + C\widehat{\alpha}_t], \tag{36}$$

з урахуванням формули [1, (13.85)], перетворюється у різницеве стохастичне рівняння

$$\Delta\widehat{\alpha}_{t+1} + V_0\widehat{\alpha}_t = \widehat{\sigma}\Delta\widehat{W}_{t+1} \ , \quad t \geq 0, \tag{37}$$

де послідовність $\Delta\widehat{W}_{t+1}$, $t \geq 0$ стандартних нормально розподілених випадкових величин має назву оновлюючої послідовності. При цьому дисперсія $\widehat{\sigma}^2$ визначається формулою (32).

Висновок 1. Фільтрований сигнал $(\widehat{\alpha}_t, \Delta\widehat{\alpha}_{t+1})$, $t \geq 0$, що визначається рівнянням оптимальної фільтрації (24), характеризується також стаціонарним розв'язком рівняння (37) з оновлюючою послідовністю стохастичної компоненти, яка є нормально розподіленою з нульовим середнім і дисперсією $\widehat{\sigma}^2$ і характеризується двовимірною матрицею коваріацій (33).

Тепер є можливість оцінки параметрів фільтрованого сигналу за траєкторіями спостережного процесу.

Наявність рівняння оптимальної фільтрації (37) для фільтрованого СЕ дозволяє використовувати оптимальні оцінки (див. [2]) параметрів зсуву V_0 та дисперсії $\widehat{\sigma}^2$ фільтрованого статистичного експерименту з використанням емпірічних коваріацій фільтрованого процесу.

Висновок 2. Оптимальні оцінки параметрів V_0, $\widehat{\sigma}$ фільтрованого сигналу (37) задаються співвідношеннями [2]:

$$\widehat{V}_T^0 = -\widehat{R}_T^0/\widehat{R}_T \ , \quad \widehat{\sigma}_T^2 = \mathcal{E}_T^0\widehat{R}_T \ , \quad \mathcal{E}_T^0 = 2V_T^\Delta - (V_T^0)^2, \tag{38}$$

де емпірічні коваріації $\widehat{R}_T$, $\widehat{R}_T^0$, $\widehat{R}_T^\Delta$ визначені на траєкторіях фільтрованого сигналу $(\widehat{\alpha}_t, \Delta\widehat{\alpha}_{t+1})$, $t \geq 0$:

$$\widehat{R}_T := \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\widehat{\alpha}_t^2 \ , \quad \widehat{R}_T^0 = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\widehat{\alpha}_t\Delta\widehat{\alpha}_t \ , \quad \widehat{R}_T^\Delta := \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}(\Delta\widehat{\alpha}_t)^2. \tag{39}$$

Література

[1] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы*, М., Наука, 1974.

[2] D. Koroliouk, *Stationary statistical experiments and the optimal estimator for a predictable component* // Journal of Mathematical Sciences, **214** (2016), No. 2, 220–228.

[3] M. B. Nevelson, R. Z. Hasminskii, *Stochastic Approximation and Recursive Estimation*, Am. Mathem. Soc., Translations of Mathematical Monographs, **47**, 1973.

Відомості про авторів

Дмитро Володимирович Королюк
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна
E-Mail: dimitri.koroliouk@ukr.net

Володимир Семенович Королюк
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-Mail: korol@imath.kiev.ua