Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 3, 440 – 451

О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей

Ярослав В. Заболотный, Людмила В. Выговская

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Работа посвящена исследованию одной достаточно общей проблемы геометрической теории функций об экстремальном разбиении комплексной плоскости. В статье рассматривается задача о максимуме функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

где $\gamma \in (0, 1]$, $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ – система неналегающих многосвязных областей, причем области $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ симметричные относительно единичной окружности, $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Inner radius of domain, non-overlapping domains, radial system of points, separating transformation, quadratic differential, Green's function.

Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ множества натуральных и действительных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, и пусть $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ – расширенная комплексная плоскость или сфера Римана, $\mathbb{R}^{+} = (0, \infty)$.

На расширенной комплексной плоскости рассмотрим систему произвольных неналегающих многосвязных областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{0, n}$, причем области $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ обладают симметрией относительно единичной

Статья поступила в редакцию 25.09.2017

Авторы выражают благодарность профессору А.К. Бахтину за постановку задачи, ценные советы и комментарии.

ISSN 1810 – 3200.

окружности. Пусть $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см. [2,8]).

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество точек $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}\right\}$ называется n-лучевой системой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$, и

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Пусть $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$, $k = \overline{1,n}$. Введем обозначение $P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$,

$$\alpha_1 := \tfrac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1),\ \alpha_2 := \tfrac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2)...$$
$$\alpha_n := \tfrac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n),\ \alpha_{n+1} := \alpha_1,\ k = \overline{1,n},\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Задача 1. Показать, что максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1.1}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $B_0, \ldots, B_n$ $(n \geq 2)$ — попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, достигается для некоторой конфигурации из областей B_k и точек a_k, причем $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$ и области $B_1, \ldots, B_n$ симметричные относительно единичной окружности.

В 1968 г. П. М. Тамразов в работе [1] впервые привлек внимание специалистов к изучению эктремальных задач, которым соответствуют квадратичные дифференциалы со свободными полюсами. В 1994 г. В. Н. Дубинин сформулировал Задачу 1, которая является одной из задач со свободными полюсами на окружности, как открытую проблему в работе [2]. Частный вариант данной задачи был поставлен гораздо ранее – в 1984 г. для симметричных односвязных областей со свободными полюсами (см. работу [3]). В 2000 г. при $\gamma = 1$ и для всех $n \geqslant 2$ эту задачу решил Л. В. Ковалев [4,5]. В 2017 году в работе [7] Задача 1 исследована в случае $n = 2$ и $\gamma \in (0, 2]$. В данной статье рассматривается задача для любого $\gamma \in (0, 1]$ и $n \geq 2$.

Справедлива теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, 1]$. Тогда для произвольного набора точек a_k, таких, что $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,n}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, причем области B_k,*

$k=\overline{1,n}$, обладают симметрией относительно единичной окружности $|w|=1$, справедливо неравенство

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\leq\left(\frac{4}{n}\right)^{n}\cdot\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \quad (1.2)$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k=\overline{0,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^{2n}+2(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \quad (1.3)$$

Доказательство. Доказательство теоремы 1.1 основывается на методах и идеях работ [4–8]. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\alpha_0\geqslant\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$. Заметим, что в таком случае нам достаточно рассматривать только такие γ, которые удовлетворяют неравенство $\frac{1}{2}<\gamma\leq 1$.

Покажем, что при условии $\alpha_0\geqslant\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, значение функционала (1.1) удовлетворяет соотношение (1.2). Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)=\prod_{k=1}^{n}\left[r(B_0,0)r(B_k,a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

$$\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|^2\right]^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left[2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}\leqslant\left[2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

$$\leqslant\left[2^n\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}=\left[2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

где $\alpha_0=\max\limits_k\alpha_k$ и $2-\alpha_0\leqslant 2-\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, $\alpha_0\geqslant\frac{2}{n}$. С другой стороны, из результатов работы [8] и свойств разделяющего преобразования, получаем

$$I_n^0(\gamma)=r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right)$$

$$=\left(\frac{4}{n}\right)^{n}\cdot\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},$$

где $B_k^{(0)}$, $a_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0^{(0)} = 0$, это, соответственно, круговые области и полюсы квадратичного дифференциала (1.3). Далее, введем обозначение (см. [8]). Пусть

$$J_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^\gamma(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{r^\gamma(B_0^{(0)}, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})}.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$J_n(\gamma) \leqslant \frac{\left[4^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}})^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}}$$

$$\leqslant \frac{1}{4^\gamma} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \cdot n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \tag{1.4}$$

$$\times \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \cdot \left(\frac{1}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2n}}.$$

Оценим данное выражение при $n \geq 6$. Отдельно рассмотрим случаи для $n = \overline{2, 5}$. Так,

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} < e.$$

Далее, $\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} < 1$ и $\left(\frac{1}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2n}} < 1$. Выражение $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}$ убывает по n при фиксированном γ. Тогда

$$\left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \leq \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{6}}{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{6}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} < 1.9728.$$

Таким образом, получим следующее неравенство

$$J_n(\gamma) < 5.3627 \cdot \frac{1}{4^\gamma} \cdot n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}. \tag{1.5}$$

Поскольку выражение $\frac{1}{4^\gamma} \cdot n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}$ возрастает по γ при $\gamma \in (0.5; 1]$, то получим оценку

$$\frac{1}{4^\gamma} \cdot n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} < \frac{1}{4} \cdot n^{2+\frac{1}{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2+\frac{1}{n}}.$$

Учитывая убывание последнего выражения по n при $n \geq 6$, имеем

$$\frac{1}{4^\gamma} \cdot n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \leq 0.0728.$$

Принимая во внимание последнее неравенство и неравенство (1.5) получим, что при $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ и $n \geq 6$, справедливо неравенство

$$J_n(\gamma) < 5.3627 \cdot 0.0728 < 0.3924 < 1.$$

Таким образом, при $n \geq 6$ и $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ теорема доказана.

Рассмотрим выражение (1.4) при $n = 5$. Тогда

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{4-\gamma+\frac{\gamma}{5}} < 2.0423.$$

Далее, $\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} < 1$ и $\left(\frac{1}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{2\gamma}{n}} < 1$, $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{5}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{5}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} < 2.2761$. Тогда $\frac{1}{4^\gamma} \cdot 5^{\gamma+1+\frac{\gamma}{5}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{4-\gamma+\frac{\gamma}{5}} < 0.1695$.

Из написаного выше получается, что функционал (1.4) ограничен

$$J_n(\gamma) < 2.0423 \cdot 2.2761 \cdot 0.1695 < 0.7880 < 1.$$

Пусть $n = 4$. Аналогичным образом получаем

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{3-\gamma+\frac{\gamma}{4}} < 1.9104.$$

Далее, $\left(1 - \frac{\gamma}{8}\right)^{2+\frac{\gamma}{4}} < 0.7405$ и $\left(\frac{1}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2n}} < 0.6484$, $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{4}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{4}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} < 2.8437$. В то же время $\frac{1}{4^\gamma} \cdot 4^{\gamma+1+\frac{\gamma}{4}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{3-\gamma+\frac{\gamma}{4}} < 0.3571$.

Из написаного выше получается, что

$$J_n(\gamma) < 1.9104 \cdot 0.7405 \cdot 2.8437 \cdot 0.3571 \cdot 0.6484 < 0.9315 < 1.$$

Пусть $n = 3$. Тогда функционал упростится к следующему

$$I_3(\gamma) = \left(\prod_{k=0}^{3} r\left(B_k, a_k\right)\right)^\gamma \left(\prod_{k=1}^{3} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{1-\gamma}.$$

Используя работу Г. В. Кузьминой [11] и теорему Г. М. Голузина [12, с. 165], будем иметь

$$I_3(\gamma) \leq \left(\frac{9}{4^{\frac{8}{3}}}\right)^\gamma \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right)^{1-\gamma} \left(|a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|\right)^{1-\frac{1}{3}\gamma}.$$

В связи с тем, что $\alpha_k \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, то

$$I_3(\gamma) \leq \left(\frac{9}{4^{\frac{8}{3}}}\right)^{\gamma} \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right)^{1-\gamma}$$
$$\times \left(8\sin^2\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\sin\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\right)^{1-\frac{1}{3}\gamma}.$$

Поскольку последнее выражение возрастает по γ при $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$, то функционал будет ограничен некоторым числом

$$I_3(\gamma) < 0.2595.$$

В то же время $I_3^0(\gamma)$ убывает при $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$, а значит при данных γ имеем, что $I_3^0(\gamma) \geq I_3^0(1) > 0.5349$.

Тогда, при $n = 3$ и $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, справедливо неравенство

$$J_3(\gamma) < 1.$$

Осталось рассмотреть случай для $n = 2$. Тогда функционал примет вид

$$I_2(\gamma) = \left(\prod_{k=0}^{2} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\gamma} \left(\prod_{k=1}^{2} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{1-\gamma}.$$

Используя результат Г. М. Голузина [12, с. 165] и теорему М. А. Лаврентьева [13], получим неравенство

$$I_2(\gamma) \leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right)^{\gamma} \left(|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$

А учитывая, что $\alpha_k \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, то

$$I_2(\gamma) \leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right)^{\gamma} \left(\sin\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\right)^{2-\gamma}.$$

Последнее выражение возрастает по γ при $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$, тогда справедливо, что значение функционала $I_2(\gamma)$ будет ограничено некоторой константой, то есть

$$I_2(\gamma) < 0.3629.$$

В то же время $I_2^0(\gamma)$ убывает при $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$, а значит при данных γ справедливо неравенство $I_2^0(\gamma) \geq I_2^0(1) > 0.6613$.

Таким образом, при $n = 2$ и $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ выполняется неравенство

$$J_2(\gamma) < 1.$$

Таким образом, при $n \geq 2$ и $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ случай 1 полностью доказан.

Случай 2. Остается рассмотреть случай, когда $\alpha_k < \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, $k = \overline{1,n}$. Для этого будем использовать метод разделяющего преобразования, разработанный в работах [2, 8, 9]. Аналогично работе [8], мы используем разделяющее преобразование каждой из областей B_k соответственно подходящей семьи функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n} = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, которая конформно отображает области на верхнюю полуплоскость относительно углов $\{P_k\}_{k=1}^{n}$.

Пусть $D_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, обозначим область множества $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, содержащая точку $\pi_k(a_k)$ с собственным симметричным отражением относительно мнимой оси. В свою очередь, через $D_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, обозначим такую область множества $\mathbb{C}_\zeta$, которая получена в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$ и содержащая точку $\pi_k(a_{k+1})$ с собственным симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, обозначим через $D_k^{(0)}$ такую область множества $\mathbb{C}_\zeta$, которая получена в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, содержащая точку $\zeta = 0$ с собственным симметричным отражением относительно мнимой оси. Из определения функции π_k, следует, что

$$|\pi_k(w) - \pi_k(a_k)| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \pi_k(a_{k+1})| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Далее, используя результат работ [2, 9], получаем неравенства

$$\begin{aligned} r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \quad &\leq \quad \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right) \qquad (1.6) \\ &\times \quad \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_k^{(0)}, 0\right) r\left(G_k^{(1)}, 1\right) r\left(G_k^{(2)}, -1\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $G_k^{(0)}$, $G_k^{(1)}$, $G_k^{(2)}$ – круговые области квадратичного дифференциала

$$G(w)dw^2 = \frac{(4-\alpha_k^2\gamma)w^2 + \alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2$$

Снова применяя к областям $G_k^{(0)}$, $G_k^{(1)}$, $G_k^{(2)}$ разделяющее преобразование, где $\pi(w) = \frac{2w}{1+w^2}$, и используя методы работ [4,7,8] получаем оценку для функционала

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n} 2^{2(1-\alpha_k^2\gamma)}\left\{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right)r\left(D_k^{(1)},1\right)r\left(D_k^{(2)},-1\right)\right\}\right]^{\frac{1}{4}},$$

где $D_k^{(0)}$, $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$ неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$. Принимая во внимание Теорему 1 работы [7] и метод, разработанный в работе [2], получим функцию

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\left[\prod_{k=1}^{n} 2^8 \cdot (\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\alpha_k^2\cdot 2\gamma+4}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}\right]^{\frac{1}{4}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\Psi(x_k)\right]^{\frac{1}{4}},$$

где

$$\Psi(x) = 2^8\cdot x^{x^2+4}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},\ x = \alpha_k\sqrt{2\gamma},\ x\in[0,2].$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{n}\Psi(x_k)\longrightarrow \max,\quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{2\gamma},$$

$$x_k = \alpha_k\sqrt{2\gamma},\quad 0 < x_k \leq 2.$$

Пусть $F(x) = \ln(\Psi(x))$ и $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ – произвольная экстремальная точка выше указанной задачи. Повторяя рассуждения работы [6] получаем утверждение: если $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k\neq j$, тогда имеет место соотношение

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}),$$

где $k,j=\overline{1,n}$, $k\neq j$, $F'(x) = 2x\ln x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{4}{x}$ (см. Рис. 1).

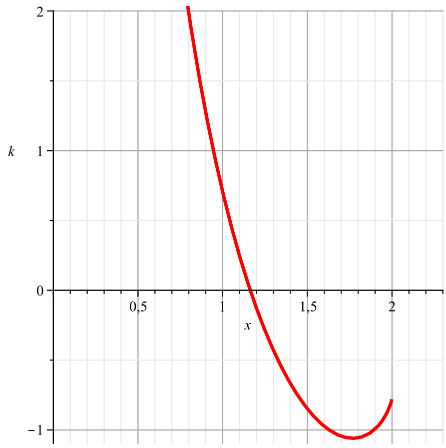

Рис. 1: График функции $F'(x)$

Убедимся, что имеет место утверждение: если функция $Z(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}F(x_k)$ достигает максимума в точке $(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ при условиях $0<x_k^{(0)}<2$, $k=\overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^{(0)}=2\sqrt{2\gamma}$, тогда

$$x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=\ldots=x_n^{(0)}.$$

Пусть для простоты $x_1^{(0)}\leqslant x_2^{(0)}\leqslant\ldots\leqslant x_n^{(0)}$. Функция

$$F''(x)=\ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right)-\frac{4}{x^2}$$

строго возрастает на $(0,2)$ и существует $x_0\approx 1,768828$ такое, что

$$signF''(x)\equiv sign(x-x_0).$$

Учитывая свойства функции $F'(x)$ и условия теоремы, а также опираясь на метод, разработанный в [6], имеем, что для $F'(x)$ всегда выполняется соотношение $(x_1-1,45)\,n+(x_2-x_1)>0$ для $n\geqslant 2$. Отсюда $nx_1+(x_2-x_1)>1,45\,n$. И, окончательно, получаем

$$(n-1)x_1+x_2>2\sqrt{2\gamma_n},\quad n\geqslant 2.$$

Таким образом, в случае $n\geqslant 2$ набор точек $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ не может быть экстремальным при условии $x_n^{(0)}\in(x_0;\,2]$. Следовательно, для экстремального набора $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ возможен только случай, когда $x_k^{(0)}\in$

$(0,\, x_0]$, $k=\overline{1,n}$, и $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=\ldots=x_n^{(0)}$. Для всех $\gamma<1$, $n\geqslant 2$, все предыдущие рассуждения сохраняются.

Далее пусть $F'(x)=t$, $y_0\leqslant t\leqslant -0,78$, $y_0\approx -1,059$. Рассмотрим следующие значения t: $t_1=-0,78$, $t_2=-0,80$, $t_3=-0,85$, $t_4=-0,90$, $\cdots$, $t_{11}=-1,05$, $t_{12}=-1,059$. Найдем решение уравнения $F'(x)=t_k$, $k=\overline{1,12}$. Для $\forall t_k\in[y_0,-0,78)$ уравнение имеет два решения: $x_1(t)\in(0,x_0]$, $x_2(t)\in(x_0,2]$, $x_0\approx 1,768828$. Непосредственные вычисления представлены в таблице, приведенной ниже.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$2x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$
1	-0,78	1,458417	1,998914		
2	-0,80	1,470034	1,994779	3,453196	4,911613
3	-0,85	1,501193	1,980165	3,450199	4,920233
4	-0,90	1,536275	1,959964	3,461157	4,962350
5	-0,95	1,577242	1,932788	3,469063	5,005338
6	-1,00	1,628755	1,894239	3,471481	5,048723
7	-1,01	1,641325	1,884177	3,512932	5,141687
8	-1,02	1,655169	1,872815	3,514140	5,155465
9	-1,03	1,670801	1,859641	3,514810	5,169979
10	-1,04	1,689217	1,843656	3,514457	5,185258
11	-1,05	1,712998	1,822285	3,511502	5,200719
12	-1,059	1,768589	1,769066	3,482064	5,195062

Учитывая свойства функции $F'(x)$ и условия теоремы, получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(t) > (n-1)x_1(t_k)+x_2(t_{k+1}) \geqslant 2\sqrt{2\gamma_n},$$

где $t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}$, $k=\overline{1,11}$. Таким образом, для экстремального набора $X^{(0)}$ возможен только случай, когда $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}\in(0,\,x_0]$, $x_0\approx 1,7688283$, и, следовательно, $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=\cdots=x_n^{(0)}$.

А значит максимум произведения $\prod_{k=1}^{n}\Psi(x_k)$ достигается при условии, когда все x_k равны между собой. Таким образом, справедливо неравенство

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \le \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\left[\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{4}}.$$

Используя выражение для $\Psi(x)$, окончательно получаем неравенство (1.2). Знак равенства проверяется непосредственно. Теорема 1.1 полностью доказана. $\square$

Литература

[1] П. М. Тамразов, *Экстремальные конформные отображения и по- люсы квадратичных дифференциалов* // Изв. АН СССР. Серия мат., **32** (1968), No. 5, 1033–1043.

[2] В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук, **49** (1994), No. 1 (295), 3–76.

[3] Г. Бахтина, *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей* // Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа, Ин–т матем. АН УССР, Киев, (1984), 21–27.

[4] Л. Ковалев, *О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей* // Изв. вузов. Матем., (2000), No. 6, 80–81.

[5] Л. Ковалев, *О трех непересекающихся областях* // Дальневост. матем. журн., 1:1, (2000), 3–7.

[6] Л. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневост. матем. сб., **2** (1996), 96–98.

[7] A. Bakhtin, G. Bakhtina, I. Denega, *An extremal decomposition of complex plain with fixed poles* // Zb. Institute of mathematics of NAS, **14** (1) (2017), 34–38.

[8] А. Бахтин, Г. Бахтина, Ю. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе* // Труды Ин–та математики НАН Украины, **73**, 2008, С. 308.

[9] В. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Аналитическая теория чисел и теория функций, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **168**, Изд–во “Наука“, Ленинград. отд., Л., (1988), 48–66.

[10] В. Дубинин, *Метод симметризации в задачах о неналегающих областях* // Матем. сб., **128(170)** (1985), No. 1(9), 110–123.

[11] Г. Кузьмина, *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей* // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1980, 131–145.

[12] Г. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М., Наука, 1966.

[13] М. Лаврентьев, *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР., **5** (1934), 159–245.

Сведения об авторах

Ярослав Владимирович Заболотный — Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: yaroslavzabolotnii@gmail.com

Людмила Вячеславовна Выговская

Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: liudmylavygivska@ukr.net