Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 3, 370 – 398

Стохастическое дифференциальное уравнение в случайной среде

Сергей Я. Махно, Сергей А. Мельник

Аннотация. В работе рассмотрены решения стохастического дифференциального уравнения Ито в случайной среде. Случайная среда формируется обобщённым телеграфным процессом. Доказано, что исходная задача равносильна системе двух стохастических дифференциальных уравнений с неслучайными коэффициентами. Первое уравнение является уравнением Ито и его решением является исходный процесс. Второе уравнение является уравнением с пуассоновской компонентой и его решением является обобщенный телеграфный процесс. Приведены теоремы существования и единственности как сильных, так и слабых решений.

2010 MSC. 60H10, 60G57.

Ключевые слова и фразы. Стохастическое уравнение, случайная среда, телеграфный процесс, сильное решение, слабое решение.

1. Введение

Типичным подходом при изучении стохастических уравнений в случайной среде является включение случайной переменной в коэффициенты уравнения. Стохастические дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами изучались многими исследователями. Одним из ключевых вопросов является вопрос существования и единственности их решений. Классическим результатом в этой области является [2, Теорема 9, с. 254]. Здесь от коэффициентов требуется выполнение с вероятностью 1 условий линейной ограниченности и липшицевости с неслучайными константами. Это означает, что влияние случая на коэффициенты уравнения ограничено. В работе [11, Теорема 4.1, с. 241] рассмотрено уравнение со случайным коэффициентом дрейфа и неслучайным коэффициентом диффузии. Коэффициент дрейфа должен быть с вероятностью 1 линейно ограничен и

Статья поступила в редакцию 30.08.2017

удовлетворять условию Липшица со случайной константой. Это расширяет класс рассматриваемых уравнений. Но, как известно, условие Липшица является жёстким условием и многие математические модели реальных объектов не удовлетворяют этому требованию. В рассмотренном в монографии [8, с. 63–73] уравнении от случая зависит как коэффициент дрейфа, так и коэффициент диффузии. Наложенные здесь условия **A** и **B** слабее условия Липшица со случайной константой, но для их проверки нужно установить существование вспомогательных функций $V(x)$ и $Q(x)$, что является непростой задачей. В работе [15, Теорема 2.1, с. 12] рассмотрено уравнение, содержащее помимо диффузионной составляющей ещё и пуассоновскую компоненту. От коэффициента дрейфа, как и в классическом случае, требуется выполнение условий линейной ограниченности и липшицевости с неслучайными константами. На коэффициент диффузии наложено условие Гёльдера, но также с неслучайной константой.

Включение случайного параметра в коэффициенты уравнения в качестве независимой переменной затрудняет исследование вероятностных характеристик решения задачи. По этой причине применяют иной подход к формированию математической модели: коэффициенты рассматриваемого уравнения являются неслучайными функциями, зависящими не только от фазовой переменной, но и от другого случайного процесса, характеризующего изменчивость среды. Таким процессом, например, может являться обобщённый телеграфный процесс. Обобщенным телеграфным процессом мы, следуя [3, с. 28–29], будем называть введенный ниже процесс $\eta(t)$. В моделях финансовой математики, моделях динамики биологических популяций характеристики среды обитания изучаемого объекта остаются неизменными в течение некоторого случайного интервала времени, а затем случайным образом изменяют своё значение. Например, в моделях, описывающих динамику биржевого курса финансового актива, коэффициенты роста и волатильности некоторое время сохраняют постоянное значение, а затем, в случайный момент времени, меняют своё значение. Обобщенный телеграфный процесс адекватно описывает подобные явления.

В нашей работе рассмотрено стохастическое дифференциальное уравнение Ито коэффициенты которого зависят не только от фазовой переменной, но и от значений обобщённого телеграфного процесса, который наряду с процессом броуновского движения формирует случайную среду. Для обощённого телеграфного процесса строится стохастическое дифференциальное уравнение с пуассоновской компонентой. Это позволяет вместо одного уравнения в случайной среде рассмотреть систему двух стохастических дифференциальных уравнений с неслучайными коэффициентами. Для построенной таким образом системы доказаны теоремы существования и единственности решения как в сильном, так и в слабом смысле.

Работа содержит шесть параграфов. Во втором параграфе вводятся основные определения и обозначения. В параграфе три строится стохастическое уравнение для обобщенного телеграфного процесса. В параграфе четыре приводятся условия существования слабых решений системы стохастических уравнений. Сильные решения системы стохастических уравнений исследуются в параграфе пять. Шестой параграф содержит примеры стохастических уравнений в случайных средах для которых применимы полученные в статье результаты.

2. Обозначения, определения

Через R^l обозначим l- мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, $\mathcal{R}^l$ – σ-алгебра борелевских множеств в R^l, $\mathbf{1}(A)$ – индикатор события A. Далее, $\mathcal{M}_{m\times n}$ – пространство матриц размерности $m\times n$, $*$ – символ транспонирования матрицы, для $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$ квадрат нормы $||A||^2=\operatorname{tr} AA^*$. Буквой C будут обозначаться различные постоянные. Если нужно подчеркнуть от каких величин они зависят, эти величины будут указываться в скобках. Пространство непрерывных функций с равномерной метрикой на отрезке $[0,T]$ со значениями в R^d обозначим $\mathbb{C}_{[0,T]}(R^d)$, $\mathcal{B}_{[0,T]}(R^d)$ – борелевская σ-алгебра в этом пространстве, $\mathcal{B}_t=\sigma\{f\in\mathbb{C}_{[0,T]}(R^d):\ f(s),\ s\le t\}$. Символом $\mathbf{E}$ будет обозначаться математическое ожидание на соответствующем вероятностном пространстве.

На полном вероятностном пространстве $(\Theta,\mathcal{L},\mathbf{Q})$ задана последовательность одномерных одинаково распределенных независимых случайных величин $\eta_k=\eta_k(\theta),\ k=0,1,2,...$, с функцией распределения $F(x)$. Обозначим $F(A)=\int_A F(dx)$, $m_0=\mathbf{E}\eta_0=\int_{R^1} zF(dz)$. Для $p\ge 1$ положим $m_p=\mathbf{E}|\eta_0|^p$.

На стохастическом базисе $(\Omega^{(1)},\mathcal{F}^{(1)},\{\mathcal{F}_t^{(1)}\}_{t\ge 0},\mathbf{P}^{(1)})$ заданы независимые $\mathcal{F}_t^{(1)}$– согласованные $m-$ мерный винеровский процесс $w(t,\omega^{(1)})$ и пуассоновский процесс $\nu(t,\omega^{(1)})$ с параметром λ, $t\ge 0$. Определим обобщенный телеграфный процесс $\eta(t)$ равенством $\eta(t)=\eta(t,\theta,\omega^{(1)})=\eta_{\nu(t)}(\theta)$ [3, с. 28–29] и рассмотрим уравнение

$$\xi(t)=\xi_0+\int_0^t b(s,\xi(s),\eta(s))ds+\int_0^t \sigma(s,\xi(s),\eta(s))dw(s),\ t\in[0,T]. \quad (1)$$

В этом уравнении для $t\in[0;T]$, $x\in R^d$, $y\in R^1$ функции $b(s,x,y)\in R^d$, $\sigma(s,x,y)\in\mathcal{M}_{d\times m}$, ξ_0– неслучайная величина. Для того, чтобы в

(1) был определен стохастический интеграл проведем дополнительные построения.

Определим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$, $t \geq 0$, где $\Omega = \Theta \times \Omega^{(1)}$, $\omega = (\theta, \omega^{(1)})$, $\mathcal{F} = \mathcal{L} \times \mathcal{F}^{(1)}$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{L} \times \mathcal{F}_t^{(1)}$, $\mathbf{P} = \mathbf{Q} \times \mathbf{P}^{(1)}$. На этом пространстве определим процессы $w(t,\omega) = w(t,\omega^{(1)})$ и $\nu(t,\omega) = \nu(t,\omega^{(1)})$. Из [9, Следствие 1, с. 107] следует, что на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ процессы $w(t,\omega)$ и $\nu(t,\omega)$ являются $\mathcal{F}_t$-согласованными. Легко проверяется, что $w(t,\omega)$ и $\nu(t,\omega)$ являются независимыми винеровским и пуассоновским процессами, соответственно, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$. Аналогично, процесс $\eta(t,\omega)$ так же $\mathcal{F}_t$-согласован и $E|\eta(t)|^p = m_p$, $p \geq 1$.

В дальнейшем уравнение (1) рассматривается на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ с определенными выше винеровским процессом $w(t)$, пуассоновским процессом $\nu(t)$ и процессом $\eta(t)$.

Ниже в параграфе 3 получено стохастическое уравнение (4) для процесса $\eta(t)$. В работе рассматриваются сильные и слабые решения системы уравнений (1), (4). Сильное решение – это решение на исходном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$. Слабое решение – это решение на возможно другом вероятностном пространстве $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \{\widehat{\mathcal{F}_t}\}_{t\geq 0}, \widehat{\mathbf{P}})$ на котором существуют процессы $\widehat{\xi}(t), \widehat{\eta}(t)$, винеровский процесс $\widehat{w}(t)$, пуассоновская мера $\widehat{\mu}(t, A)$ и для которых равенства (1), (4) выполняются с вероятностью единица [2, с. 229–230]. Сильная единственность – это единственность по траекториям решений стохастических уравнений. Слабая единственность – это совпадение мер, порожденными процессами в соответствующих функциональных пространствах.

Обозначим $S_N = \{(x,y) : |x|^2 + y^2 \leq N^2,\ x \in R^d,\ y \in R^1\}$, $\tau_N = \inf\{t : (\xi(t), \eta(t)) \notin S_N\}$, $a(t,x,y) = \sigma(t,x,y)\sigma^*(t,x,y)$.

Введем условия для коэффициентов уравнения (1).

Условие I.

I_1. *Существует постоянная* Γ *такая, что*

$$|b(t,x,y)|^2 + ||\sigma(t,x,y)||^2 \leq \Gamma(1 + |x|^2 + |y|^2).$$

I_2. *Существует постоянная* $\gamma > 0$, *такая, что для любого* $z \in R^d$

$$(a(t,x,y)z, z) \geq \gamma |z|^2.$$

3. Стохастическое уравнение для обобщённого телеграфного процесса

Получим уравнение для процесса $\eta(t)$. Определим процесс

$$\mu(t,A)=\sum_{k=1}^{\nu(t)}\mathbf{1}(\eta_k\in A),$$

полагая, что сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{0}=0$.

Лемма 1. *На вероятностном пространстве* $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\mathbf{P})$ *процесс* $\mu(t,A)$ *является пуассоновой мерой на* $(R^1,\mathcal{R}^1)$ *с параметром* $\lambda tF(A)$:

$$\mathbf{E}e^{iu\mu(t,A)}=\exp\Bigl\{\lambda tF(A)(e^{iu}-1)\Bigr\}. \qquad (2)$$

Доказательство. Очевидно, случайные величины $\mu(t,A)$ являются $\mathcal{F}_t$-согласованными и из свойства процесса Пуассона следует, что случайная величина $\mu(t,A)-\mu(s,A)$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_s$. Пусть $A=\bigcup_k A_k,\ A_k\in\mathcal{R}^1,\ k=1,2,...,\ A_k\cap A_j=\emptyset$. Тогда

$$\mu(t,A)=\sum_{j=1}^{\nu(t)}\mathbf{1}(\eta_j\in A)=\sum_k\sum_{j=1}^{\nu(t)}\mathbf{1}(\eta_j\in A_k)=\sum_k\mu(t,A_k).$$

Значит, $\mu(t,A)$ является стохастической мерой на $(R^1,\mathcal{R}^1)$. Докажем, что она является пуассоновской мерой. Так как $\eta_k(\theta)$ и $\nu(t,\omega^{(1)})$ независимы, то

$$\mathbf{E}e^{iu\mu(t,A)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(\nu(t)=k)\mathsf{E}\exp\Bigl\{iu\sum_{j=1}^{k}\mathbf{1}(\eta_j\in A)\Bigr\}=\mathbf{P}(\nu(t)=0)$$

$$+\,e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\prod_{j=1}^{k}\mathbf{E}e^{iu\mathbf{1}(\eta_j\in A)}$$

$$=e^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\prod_{j=1}^{k}((e^{iu}-1)F(A)+1)$$

$$=e^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\Bigl(\lambda t((e^{iu}-1)F(A)+1)\Bigr)^k$$

$$=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\Bigl(\lambda t((e^{iu}-1)F(A)+1)\Bigr)^k=\exp\Bigl\{\lambda tF(A)(e^{iu}-1)\Bigr\}.$$

Полученная характеристическая функция является характеристической функцией распределения Пуассона с параметром $\lambda t F(A)$.

Лемма доказана. $\square$

Теорема 1. *Процесс* $\eta(t)$ *является решением уравнения*

$$\eta(t) = \eta_0 + \int_0^t \int (u - \eta(s-))\mu(ds, du). \tag{3}$$

Доказательство. Доказательство проведём методом математической индукции. Обозначим ϑ_1, $\vartheta_2, \ldots$ моменты скачков процесса $\nu(t)$.

Пусть $t \in [0; \vartheta_1)$. Докажем, что в этом случае справедливо равенство (3). В левой части (3) получаем $\eta(t) = \eta_0$. В правой части также получаем η_0, поскольку на этом временном промежутке $\mu(ds, du) = 0$.

Пусть $t = \vartheta_1$. В левой части (3) получаем $\eta(\vartheta_1) = \eta_1$. Рассмотрим правую часть. Имеем

$$\int_0^{\vartheta_1} \int u\mu(ds, du) = \int u\, \mu(\vartheta_1, du) = \int u \sum_{j=1}^{\nu(\vartheta_1)} \mathbf{1}(\eta_j \in du) = \eta_1,$$

и далее,

$$\int_0^{\vartheta_1} \int \eta(s-)\mu(ds, du) = \eta_0 \int_0^{\vartheta_1} \int \mu(ds, du) = \eta_0 \mu(\vartheta_1, R^1)$$
$$= \eta_0 \mathbf{1}(\eta_0 \in R^1) = \eta_0.$$

Подставив полученные результаты в правую часть равенства (1), убеждаемся, что она равна его левой части.

При $t \in [0; \vartheta_1]$ равенство (3) выполнено.

Предположим, равенство (3) выполнено при $t \in [0; \vartheta_n]$. Докажем, что тогда оно выполнено и при $t \in [0; \vartheta_{n+1}]$.

Пусть $t \in (\vartheta_n; \vartheta_{n+1})$. Тогда левая часть (3) имеет вид $\eta(t) = \eta_n$. Рассмотрим правую часть.

$$\eta_0 + \int_0^t \int (u - \eta(s-))\mu(ds, du) = \eta_0 + \int_0^{\vartheta_n} \int (u - \eta(s-))\mu(ds, du)$$
$$+ \int_{\vartheta_n}^t \int (u - \eta(s-))\mu(ds, du) = \eta_n + \int_{\vartheta_n}^t \int (u - \eta(s-))\mu(ds, du).$$

Интеграл в правой части последнего равенства равен нулю, т.к. на указанном временном промежутке мера $\mu(ds,du)=0$.

Пусть теперь $t=\vartheta_{n+1}$. В левой части (3) получаем $\eta(\vartheta_{n+1})=\eta_{n+1}$. Рассмотрим правую часть.

$$\eta_0+\int\limits_0^{\vartheta_{n+1}}\int(u-\eta(s-))\mu(ds,du)=\eta_n+\int\limits_{\vartheta_n}^{\vartheta_{n+1}}\int(u-\eta(s-))\mu(ds,du).$$

Теперь

$$\int\limits_{\vartheta_n+}^{\vartheta_{n+1}}\int u\,v(ds,du)=\sum_{j=\nu(\vartheta_n)}^{\nu(\vartheta_{n+1})}\int u\,\mathbf{1}(\eta_j\in du)=\eta_n+\eta_{n+1}.$$

Далее,

$$\int\limits_{\vartheta_n}^{\vartheta_{n+1}}\int\eta(s-)\,v(ds,du)=\eta_n\int\limits_{\vartheta_n}^{\vartheta_{n+1}}v(ds,R^1)=\eta_n\sum_{j=\nu(\vartheta_n)}^{\nu(\vartheta_{n+1})}\mathbf{1}(\eta_j\in R^1)=2\eta_n.$$

Подставив полученные результаты в правую часть равенства (3), убеждаемся, что она равна его левой части.

В итоге равенство (3) выполнено и при $t\in(\vartheta_n;\vartheta_{n+1}]$. Теорема 1 доказана. $\square$

Введем центрированную пуассоновскую меру

$$\tilde\mu(t,A)=\mu(t,A)-t\lambda F(A).$$

Следствие 1. *Процесс $\eta(t)$ является решением уравнения*

$$\eta(t)=\eta_0+\lambda\int_0^t(m_0-\eta(s))ds+\int\limits_0^t\int(u-\eta(s-))\tilde\mu(ds,du). \qquad (4)$$

4. Слабые решения системы уравнений (1), (4)

Рассмотрим слабые решения системы (1), (4). Существование такого решения при непрерывных по пространственным переменным коэффициентам известна [2, Теорема 1, глава 5, параграф 2, с. 357]. Сформулируем отмеченную теорему, учитывая линейность уравнения (4).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* I_1, $m_2 < \infty$ *и при каждом фиксированном* t *функции* $b(t,x,y)$, $\sigma(t,x,y)$ *непрерывны по переменным* (x,y). *Тогда система уравнений* (1), (4) *имеет слабое решение.*

Для диффузионных процессов слабые решения существуют для измеримых коэффициентов при невырожденной матрице диффузии. Отметим, что для системы уравнений (1), (4) матрица диффузии является вырожденной и поэтому ослабление условий существования слабых решений требует отдельного исследования. Используя специальный вид уравнения (4), докажем существование слабого решения для (1), (4) лишь при измеримых коэффициентах и невырожденности матрицы $a(t,x,z)$. Вначале докажем оценку Крылова для решения (1), (4).

В следующей лемме приведен результат теоремы 2 из [4]. Для ее формулировки введем следующие обозначения. Пусть $\rho(x)$, $x \in R^1$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $|x| \geq 1$ и $\int_{-1}^{1} \rho(|x|)dx = 1$. Для локально суммируемой функции $f(t,x)$, $t \in (-\infty,\infty)$, $x \in R^l$, $n < \infty$, положим

$$f_n(t,x) = \int_{R^1} \int_{R^l} \rho(|s|)\rho(|y|) f\left(t - \frac{s}{n}, x - \frac{y}{n}\right) dyds.$$

Как хорошо известно, что функции $f_n(t,x)$ бесконечно дифференцируемы.

Лемма 2. *Пусть дана неотрицательная функция* $f(t,x)$, *равная нулю при* $t \leq 0$ *и* $|x| \geq N$ *такая, что*

$$\int_0^\infty \int_{|x| \leq N} (f(t,x))^{l+1} dtdx < \infty.$$

На $(-\infty,\infty) \times R^l$ *существует ограниченная функция* $\psi(t,x) \leq 0$, *равная нулю при* $t < 0$, *для которой выполнены следующие неравенства.*

a) Функция $\psi(t,x)$ *выпукла вниз по* x при $|x| \leq 2N$, $t \in (-\infty,\infty)$.

b) При достаточно больших n *для любой симметричной неотрицательно определенной матрицы* A

$$C(l)\det(A)^{\frac{1}{l+1}} f_n(t,x) \leq -\frac{\partial \psi_n(t,x)}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{l} A_{ij} \frac{\partial^2 \psi_n(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

c) Для вектора $H \in R^l$, если $2|H| < kN$ *при достаточно больших* n $|(\nabla \psi_n, H)| \leq k|\psi_n|$.

d) Существует постоянная $C(l,N)$, *такая, что*

$$|\psi(t,x)| \le C(l,N)\left[\int_0^t \int_{|x|\le N} f^{l+1}(s,y)dyds\right]^{\frac{1}{l+1}}.$$

Теорема 3. (Оценка Крылова).*Пусть выполнено условие* I_1. *Тогда существует постоянная* $C(\xi_0,\Gamma,m_2,\mu,\lambda,d,N)$ *такая, что*

$$\mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau_N}(\det a(s,\xi(s),\eta(s)))^{\frac{1}{d+2}}|g(s,\xi(s),\eta(s))|ds$$
$$\le C(\xi_0,\Gamma,m_2,\mu,\lambda,d,N)||g||_{L_{d+2}([0,t]\times S_N)}. \qquad (5)$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на применении леммы 2 и следует идее доказательства [2, лемма 1, с. 562]. Очевидно, теорему достаточно доказать для функции $g(t,x,z)\ge 0$. Положим $f(t,x,z)=g(T-t,x,z)$ при $t\in[0,T]$ и $f(t,x,z)=0$ при $t\notin[0,T]$. Для функции $f(t,x,z)$ существует функция $\psi(t,x,z)$ из леммы 2. Строим бесконечно дифференцируемые функции $\psi_n(t,x,z)$ как указано перед этой леммой

$$\psi_n(t,x,z)=\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^{d+1}}\rho(|s|)\rho(u,v)\psi\left(t-\frac{s}{n},x-\frac{u}{n},z-\frac{v}{n}\right)dvduds,$$

где для $u\in R^d$, $v\in R^1$, $\rho(u,v)=\rho(\sqrt{|u|^2+v^2})$.

Применим формулу Ито к функции $\psi_n(T-t,\xi(t),\eta(t))$ при $t\in[0,T\wedge\tau_N]$:

$$\mathbf{E}\psi_n(T-T\wedge\tau_N,\xi(T\wedge\tau_N),\eta(T\wedge\tau_N))=\mathbf{E}\psi_n(T,\xi_0,\eta_0)$$
$$+\mathbf{E}\int_0^{T\wedge\tau_N}\left[-\frac{\partial\psi_n}{\partial t}(T-s,\xi(s),\eta(s))+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(s,\xi(s),\eta(s))\right.$$
$$\times\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x_i\partial x_j}(T-s,\xi(s),\eta(s))+\sum_{i=1}^d b_i(s,\xi(s),\eta(s))\frac{\partial\psi_n}{\partial x_i}(T-s,\xi(s),\eta(s))$$
$$\left.+\lambda\int_{R^1}\Big(\psi_n(T-s,\xi(s),\eta(s)+z-\eta(s))-\psi_n(T-s,\xi(s),\eta(s))\Big)F(dz)\right]ds.$$

В пункте b) леммы 2 положим $l=d+1$, $x_{d+1}=z$ и введем матрицу $A(t,x,z)$ размерности $(d+1)\times(d+1)$ у которой

$$A_{ij}(t,x,z)=\frac{1}{2}a_{ij}(t,x,z),\ \text{для } i,j=1,2,...,d,$$
$$A_{i,d+1}(t,x,z)=0,\ i=1,2,...,d,\ \ A_{d+1,j}(t,x,z)=0,\ j=1,2,...,d,$$
$$A_{d+1,d+1}(t,x,z)=\frac{1}{2}.$$

В этом случае $\det A = 2^{-(d+1)} \det a$. Согласно пункту а) леммы 2 функция $\psi(t,x,z)$ выпукла вниз по аргументу z. Тогда

$$\psi_n\left(t,x,\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
$$= \int_{R^1}\int_{R^{d+1}} \rho(|s|)\rho(u,v)\psi\left(t-\frac{s}{n}, x-\frac{u}{n}, \frac{z_1-v/n+z_2-v/n}{2}\right)dvduds$$
$$\le \frac{1}{2}\int_{R^1}\int_{R^{d+1}} \rho(|s|)\rho(u,v)\psi\left(t-\frac{s}{n}, x-\frac{u}{n}, z_1-v/n\right)dvduds$$
$$+\frac{1}{2}\int_{R^1}\int_{R^{d+1}} \rho(|s|)\rho(u,v)\psi\left(t-\frac{s}{n}, x-\frac{u}{n}, z_2-v/n\right)dvduds$$
$$= \frac{1}{2}\psi_n(t,x,z_1)+\frac{1}{2}\psi_n(t,x,z_2).$$

Т.е. бесконечно дифференцируемая функция $\psi_n(t,x,z)$ так же выпукла вниз по аргументу z. Отсюда, $\frac{\partial^2\psi_n(t,x,z)}{\partial z^2} \ge 0$. Используя этот факт, получим неравенство

$$\mathbf{E}\psi_n(T-T\wedge\tau_N, \xi(T\wedge\tau_N), \eta(T\wedge\tau_N)) \le \mathbf{E}\psi_n(T,\xi_0,\eta_0)$$
$$+\mathbf{E}\int_0^{T\wedge\tau_N}\Bigg[-\frac{\partial\psi}{\partial t}(T-s,\xi(s),\eta(s)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(s,\xi(s),\eta(s))$$
$$\times\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x_i\partial x_j}(T-s,\xi(s),\eta(s)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_n}{\partial^2 z}(T-s,\xi(s),\eta(s))$$
$$+\sum_{i=1}^{d+1}\Big|b_i(s,\xi(s),\eta(s))\Big|\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial x_i}(T-s,\xi(s),\eta(s))\right|$$
$$+\lambda\int_{R^1}\Big(\psi_n(T-s,\xi(s),\eta(s)+z-\eta(s))$$
$$-\psi_n(T-s,\xi(s),\eta(s))\Big)F(dz)\Bigg]ds.$$

Используем теперь свойство в) леммы 2. Тогда

$$\mathbf{E}\frac{C(d)}{2}\int_0^{T\wedge\tau_N}(\det a(s,\xi(s),\eta(s)))^{\frac{1}{d+2}} f(T-s,\xi(s),\eta(s))ds$$
$$\le \mathbf{E}\psi_n(T,\xi_0,\eta_0) - \mathbf{E}\psi_n(T-T\wedge\tau_N,\xi(T\wedge\tau_N),\eta(T\wedge\tau_N)) + B_1 + B_2. \quad (6)$$

Здесь

$$B_1 = \mathbf{E}\int_0^{T\wedge\tau_N}\left(\sum_{i=1}^{d+1}\Big|b_i(s,\xi(s),\eta(s))\Big|\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial x_i}(T-s,\xi(s),\eta(s))\right|ds,\right.$$

$$B_2 = \lambda \mathbf{E} \int_0^{T\wedge\tau_N} \left(\int_{R^1} \psi_n(T-s,\xi(s),z)F(dz) - \psi_n(T-s,\xi(s),\eta(s)) \right) ds.$$

Из условия I_1 следует оценка $|b_i(s,\xi(s),\eta(s))| < 3\Gamma(N\wedge 1)$ на промежутке $[0, T\wedge\tau_N]$. На основании свойства пункта c) леммы 2

$$\int_0^{T\wedge\tau_N} \left| b_i(s,\xi(s),\eta(s)) \right| \left| \frac{\partial\psi_n}{\partial x_i}(T-s,\xi(s),\eta(s)) \right| ds$$
$$\leq 3\Gamma \int_0^{T\wedge\tau_N} |\psi_n(s,\xi(s),\eta(s))| ds \leq 3\Gamma T \sup_{s,x,z} |\psi_n(s,x,z)|.$$

Учитывая, что $\sup_{s,x,z} |\psi_n(s,x,z)| \leq \sup_{s,x,z} |\psi(s,x,z)|$ и оценку пункта d) леммы 2, оценим B_1 :

$$B_1 \leq C(\Gamma, d, T)||f||_{L_{d+2}([0,T]\times S_N)}. \tag{7}$$

Аналогично,

$$B_2 \leq C(\Gamma, d, T, \lambda)||f||_{L_{d+2}([0,T]\times S_N)}. \tag{8}$$

Первые два слагаемые в правой части неравенства (6) также оцениваются через неравенство пункта d) леммы 2. Из (6)–(8) следует оценка (5) для положительной функции.

Теорема доказана. □

Следствие 2. *Пусть выполнено условие* **(I)**, $m_2 < \infty$. *Тогда существует постоянная* $C(\xi_0, \Gamma, m_2, \mu, \lambda, d, N, \gamma)$ *такая, что*

$$\mathbf{E} \int_0^{t\wedge\tau_N} |g(s,\xi(s),\eta(s))| ds \leq C(\xi_0, \Gamma, m_2, \mu, \lambda, d, N, \gamma)||g||_{L_{d+2}([0,t]\times S_N)}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $\mu_1(t,x,z) \leq \mu_2(t,x,z) \leq ... \leq \mu_d(t,x,z)$ – собственные числа матрицы $a(t,x,z)$. Из условия I_2 следует, что $\mu_1(t,x,z) \geq \gamma$. Т.к. $\det a(t,x,z) = \mu_1(t,x,z)\mu_2(t,x,z)...\mu_d(t,x,z)$, то $\det a(t,x,z) \geq \gamma^d$. Оценка (9) следует из оценки (5). Следствие доказано. □

Оценки, приведенные ниже в лемме 3, являются стандартными в теории стохастических уравнений.

Лемма 3.

1. *Пусть выполнено условие* I_1 *и* $m_{2p} < \infty$ *для некоторого* $p \geq 1$. *Тогда существует постоянная* $C(T, p, \Gamma, m_{2p})$ *такая, что*

$$\mathbf{E} \sup_{t\leq T} |\xi(t)|^{2p} \leq C(T, p, \Gamma, m_{2p})(1 + |\xi_0|^{2p}). \tag{10}$$

2. *Пусть выполнено условие* I_1 *и* $m_4 < \infty$. *Тогда существует постоянная* $C(T, \Gamma, m_4)$ *такая, что*

$$\mathbf{E} \sup_{s \le t \le T} |\xi(t) - \xi(s)|^4 \le C(T, \Gamma, m_4)(T - s)^2 (1 + |\xi_0|^4). \qquad (11)$$

3. *Пусть* $m_2 < \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{E} \sup_{t \le T} |\eta(t)|^2 \le C(T, \lambda, m_0)(1 + m_2). \qquad (12)$$

Доказательство. Из уравнения (1), применяя к интегралу Римана неравенство Коши–Буняковского, а к стохастическому интегралу неравенство Буркхольдера–Ганди, получим

$$\mathbf{E} \sup_{t \le T} |\xi(t)|^{2p} \le 3^{2p-1} \biggl[|\xi_0|^{2p} + \mathbf{E} \biggl(\int_0^T |b(s, \xi(s), \eta(s))| ds \biggr)^{2p}$$
$$+ C(p) \mathbf{E} \biggl(\int_0^T ||a(s, \xi(s), \eta(s))|| ds \biggr)^p \biggr] \le C(p, T) \biggl[|\xi_0|^{2p}$$
$$+ T^{p-1} \int_0^T \mathbf{E} \Bigl(|b(s, \xi(s), \eta(s))|^{2p} + ||a(s, \xi(s), \eta(s))||^p \Bigr) ds \biggr].$$

Теперь воспользуемся условием (I_1). Тогда

$$\mathbf{E} \sup_{t \le T} |\xi(t)|^{2p} \le C(p, T, \Gamma) \biggl[|\xi_0|^{2p} + \int_0^T \Bigl(1 + \mathbf{E} \sup_{s \le t} |\xi(s)|^{2p} + \mathbf{E} |\eta(s)|^{2p} \Bigr) ds \biggr].$$

Отсюда и из леммы Гронуолла получим оценку (10). Аналогично,

$$\mathbf{E} \sup_{s \le t \le T} |\xi(t) - \xi(s)|^4 \le 8(T - s)^3 \mathbf{E} \int_s^T |b(v, \xi(v), \eta(v))|^4 dv$$
$$+ 8 \mathbf{E} \sup_{s \le t \le T} \left| \int_s^t \sigma(v, \xi(v), \eta(v)) dw(v) \right|^4 \le C \biggl[(T - s)^3 \int_s^T \mathbf{E} |b(v, \xi(v),$$
$$\eta(v))|^4 dv + \biggl(\int_s^T \mathbf{E} ||a(v, \xi(v), \eta(v))|| dv \biggr)^2 \biggr]$$
$$\le C(\Gamma, T)(T - s) \int_s^T \mathbf{E}(1 + |\xi(v)|^4 + |\eta(v)|^4) dv.$$

Отсюда и оценки (10) следует оценка (11). Оценка (12) хорошо известна [2, с. 239]. Лемма доказана. □

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* **(I)**, $m_4 < \infty$. *Тогда система уравнений* (1), (4) *имеет слабое решение.*

Доказательство. Решение уравнения (4) сильное. Пусть $\mathbf{P}^{(1)}$ – мера на $(\mathbb{C}_{[0,T]}(R^d), \mathcal{B}_{[0,T]}(R^d), \mathcal{B}_t)$, относительно которой существует $\mathcal{B}_t$- согласованный винеровский процесс $\widehat{w}(t)$. Покажем, что на пространстве $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \left\{\widehat{\mathcal{F}}_t\right\}_{t\geq 0}, \widehat{\mathbf{P}})$, $\widehat{\Omega} = \Theta \times \mathbb{C}_{[0,T]}(R^d)$, $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{L} \times \mathcal{B}_{[0,T]}(R^d)$, $\widehat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{L} \times \mathcal{B}_t$, $\widehat{\mathbf{P}} = Q \times \mathbf{P}^{(1)}$, существует $\mathcal{F}_t$- согласованный процесс $\xi(t)$ и для процессов $(\widehat{w}(t), \xi(t))$ с вероятностью единица справедливо равенство (1).

Как перед леммой 2 с помощью свертки построим функции $b_n(t,x,z)$, $\sigma_n(t,x,z)$. Тогда выполняются следующие свойства.

$$|b_n(t,x,z)|^2 + ||\sigma_n(t,x,z)||^2 \leq \Gamma(1 + |x|^2 + |z|^2). \tag{13}$$

Для всяких n, N при $|x_i| \leq N, |z_i| \leq N$ $i = 1,2$, существуют постоянные $\Gamma(n,N)$ такие, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |b_n(t,x_2,z_2) - b_n(t,x_1,z_1)|^2 + ||\sigma_n(t,x_2,z_2) - \sigma_n(t,x_1,z_1)||^2 \\ \leq \Gamma(n,N)(|x_2 - x_1|^2 + |z_2 - z_1|^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Для почти всех $t \in [0,T]$ и почти всех $(x,z) : |x| \leq N$, $|z| \leq N$ при любом N

$$\lim_{n\to\infty}\Big(|b(t,x,z) - b_n(t,x,z)| + ||\sigma(t,x,z) - \sigma_n(t,x,z)||\Big) = 0. \tag{15}$$

Определим процесс $\xi_n(t)$ как решение уравнения

$$\xi_n(t) = \xi_0 + \int_0^t b_n(s, \xi_n(s), \eta(s))ds + \int_0^t \sigma_n(s, \xi_n(s), \eta(s))d\widehat{w}(s), \tag{16}$$

где процесс $\eta(t)$ есть решение уравнения (4). Коэффициенты уравнений (16), (4) удовлетворяют локальному условию Липшица и поэтому эти уравнения имеют единственные сильные решения $(\xi_n(t), \eta(t))$ на указанном вероятностном пространстве. Дальнейшие доказательство использует рассуждение из [2, с. 566–567].

Перепишем уравнение для процесса $\xi_n(t)$ в виде

$$\xi_n(t) = \xi_0 + \int_0^t b(s, \xi_n(s), \eta(s))ds + \int_0^t \sigma(s, \xi_n(s), \eta(s))d\widehat{w}(s) + \zeta_n(t), \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_n(t) = \int_0^t (b_n(s, \xi_n(s), \eta(s)) - b(s, \xi_n(s), \eta(s)))ds \\ + \int_0^t (\sigma_n(s, \xi_n(s), \eta(s)) - \sigma(s, \xi_n(s), \eta(s)))d\widehat{w}(s). \end{aligned}$$

Положим $\tau_{n,N} = \inf\{t : |\xi_n(t)|^2 + \eta^2(t) \geq N^2\}$. Тогда

$$\mathbf{E} \sup_{t \leq T \wedge \tau_{n,N}} |\zeta_n(t)|^2 \leq 2\mathbf{E} \int_0^{T \wedge \tau_{n,N}} h_n(s, \xi_n(s), \eta(s)) ds,$$

где

$$h_n(t,x,z) = T|b_n(t,x,z) - b(t,x,z)|^2 + 4||\sigma_n(t,x,z) - \sigma(t,x,z)||^2.$$

Согласно оценке (10)

$$\mathbf{E} \sup_{t \leq T \wedge \tau_{n,N}} |\zeta_n(t)|^2 \leq C(\xi_0, \Gamma, m, \mu, \lambda, d, N, \gamma) ||h_n||_{L_{2(d+2)}([0,t] \times S_N)}.$$

Функция $h_n(t,x,z)$ равномерно по n ограничена на множестве $[0,t] \times S_N$ и согласно (15) сходится к нулю. Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E} \sup_{t \leq T \wedge \tau_{n,N}} |\zeta_n(t)|^2 = 0. \tag{18}$$

Положим $\xi_{n,N}(t) = \xi_n(t \wedge \tau_{n,N})$. Из (17) следует равенство

$$\begin{aligned}\xi_{n,N}(t) = \xi_0 &+ \int_0^{t \wedge \tau_{n,N}} b(s, \xi_{n,N}(s), \eta(s)) ds \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_{n,N}} \sigma(s, \xi_{n,N}(s), \eta(s)) d\widehat{w}(s) + \zeta_n(t \wedge \tau_{n,N}).\end{aligned}$$

Из оценки (12) следует, что последовательность процессов $\{\xi_{n,N}(t)\}$ слабо компактна в пространстве $\mathbb{C}([0,T], R^d)$. Учитывая это, и равномерную сходимость $\zeta_n(t \wedge \tau_{n,N})$ к нулю по вероятности при $n \to \infty$, строим процессы $\xi_N(t)$ в $\mathbb{C}([0,T], R^d)$ которые удовлетворяют следующим условиям:

– процессы $\xi_N(t) \in S_N$ при $t \in [0,T]$ с вероятностью единица;
– если $|\xi_N(s)| = N$, то $\xi_N(s) = \xi_N(t)$ при $s \leq t \leq T$;
– если $\tau_N = \inf\{t : |\xi_N(t)| = N,\}$ то при $t < \tau_N$

$$\xi_N(t) = \xi_0 + \int_0^t b(s, \xi_N(s), \eta(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi_N(s), \eta(s)) d\widehat{w}(s).$$

Выберем последовательность $N_k \uparrow \infty$. Так как $\xi_{n,N_k}(t) = \xi_{n,N_{k+1}}(t)$ при $|\xi_{n,N_k}(t)| \leq N_k$, то процессы $\xi_{N_k}(t)$ можно выбрать такими, что $\xi_{N_k}(t) = \xi_{N_{k+1}}(t)$ при $t \leq \tau_{N_k}$. Процесс $\xi(t) = \xi_{N_k}(t)$ при $t \leq \tau_{N_k}$ является решением уравнения (1). Теорема доказана. $\square$

5. Сильные решения системы уравнений (1), (4)

В следующей теореме формулируются условия существования и единственности сильных решений у системы уравнений (1), (4). Используя специальный вид уравнения для процесса $\eta(t)$, получим более приемлемые в данной ситуации условия существования сильных решений, чем при непосредственном использовании соответствующих результатов из [12], [14, Теорема 170].

Теорема 5. *Пусть система уравнений* (1), (4) *имеет слабое решение. Справедливы следующие утверждения.*

1. Пусть для каждого $N < \infty$ при $|x_i| \le N$, $i = 1, 2$, $|y| \le N$, и $t \in [0, T]$ существует функции $K_N(t) \ge 0$ и возрастающая, непрерывная выпуклая вниз функция $\phi_N(v) \ge 0$, $v \ge 0$, такие, что

$$2(x_2 - x_1, b(t, x_2, y) - b(t, x_1, y)) + ||\sigma(t, x_2, y) - \sigma(t, x_1, y)||^2$$
$$\le K_N(t)\phi_N(|x_2 - x_1|^2),$$

и

$$\int_0^T K_N(t)dt < \infty, \quad \int_{0+} \frac{dv}{\phi_N(v)} = \infty.$$

Тогда система уравнений (1), (4) *имеет единственное сильное решение.*

2. *Пусть для любого $N < \infty$, $v \ge 0$, существуют неубывающие, непрерывные функции $\kappa_N(v)$, $\chi_N(v)$, такие, что $\kappa_N(0) = \chi_N(0) = 0$* и для всех $t \le N$, $|x_i| \le N$, $i = 1, 2$, $|y| \le N$,

$$|b(t, x_2, y) - b(t, x_1, y)| \le \kappa_N(|x_2 - x_1|),$$

$$||\sigma(t, x_2, y) - \sigma(t, x_1, y)|| \le \chi_N(|x_2 - x_1|), \quad \int_{0+} \frac{dv}{\chi_N^2(v)} = \infty. \tag{19}$$

Кроме того, пусть существует непрерывная выпуклая вниз функция $G_N(v)$ такая, что

$$G_N(v) \ge \kappa_N(v) + \frac{d-1}{2v}\chi_N^2(v), \qquad \int_{0+} \frac{dv}{G_N(v)} = \infty. \tag{20}$$

Тогда система уравнений (1), (4) *имеет единственное сильное решение.*

Доказательство. Для доказательства обоих пунктов установим единственность по траекториям возможных решений при предположениях теоремы. Затем воспользуемся тем, что если существует слабое решение уравнения и имеет место единственность по траекториям, то это решение является сильным [14, Теорема 137]. Пусть $\xi^{(1)}(t)$ и $\xi^{(2)}(t)$ два решения уравнения (1) на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbf{P})$.

Докажем пункт 1. Заметим, что

$$\xi^{(2)}(t) - \xi^{(1)}(t) = \int_0^t \Big(b(s, \xi^{(2)}(s), \eta(s)) - b(s, \xi^{(1)}(s), \eta(s)) \Big) ds$$

$$+ \int_0^t \Big(\sigma(s, \xi^{(2)}(s), \eta(s)) - \sigma(s, \xi^{(1)}(s), \eta(s)) \Big) dw(s). \qquad (21)$$

По формуле Ито и условию теоремы

$$\mathbf{E}|\xi^{(2)}(t \wedge \tau_N) - \xi^{(1)}(t \wedge \tau_N))|^2 = \mathbf{E} \int_0^{t \wedge \tau_N} \Big[2 \Big(\xi^{(2)}(s) - \xi^{(1)}(s),$$

$$b(s, \xi^{(2)}(s), \eta(s)) - b(s, \xi^{(1)}(s), \eta(s)) \Big) + ||\sigma(s, \xi^{(2)}(s), \eta(s))$$

$$- \sigma(s, \xi^{(1)}(s), \eta(s))||^2 \Big] ds$$

$$\leq \int_0^t K_N(s) \mathbf{E} \phi_N(|\xi^{(2)}(s) - \xi^{(1)}(s)|^2) \mathbf{1}(s \in [0, t \wedge \tau_N]) ds.$$

Отсюда и неравенства Иенсена имеем

$$\mathbf{E}|\xi^{(2)}(t \wedge \tau_N) - \xi^{(1)}(t \wedge \tau_N))|^2$$

$$\leq \int_0^t K_N(s) \phi_N(\mathbf{E}|\xi^{(2)}(s \wedge \tau_N) - \xi^{(1)}(s \wedge \tau_N)|^2) ds.$$

Из неравенства Бихари [1, теорема 3, с. 189], [14, Lemma 116] получим

$$\mathbf{E}|\xi^{(2)}(t \wedge \tau_N) - \xi^{(1)}(t \wedge \tau_N)|^2 = 0. \text{ для любого } t \geq 0.$$

Т.к. $\lim_{N \to \infty} \tau_N = \infty$, отсюда следует потраекторная единственность

$$\mathbf{P}\{\xi^{(2)}(t) = \xi^{(1)}(t)\} = 1, \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Рассмотрим пункт 2. Определим положительные числа h_i так, чтобы $1 > h_1 > h_2 > ... > h_n > ...$,

$$\int_{h_1}^1 \frac{dv}{\chi_N^2(v)} = 1, \ \int_{h_2}^{h_1} \frac{dv}{\chi_N^2(v)} = 2, ... \int_{h_n}^{h_{n-1}} \frac{dv}{\chi_N^2(v)} = n, ...$$

Очевидно, $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. При фиксированном N строим последовательность функций $q_n(v)$, $v \ge 0$, такую, что $q_n(0) = 0$ и $\int_{h_n}^{h_{n-1}} q_n(v)dv = 1$,

$$q_n(v) = \begin{cases} 0, & \text{для } v \notin (h_n, h_{n-1}) \\ \le \dfrac{2}{n\chi_N^2(v)}, & \text{для } v \in (h_n, h_{n-1}). \end{cases}$$

Для $x \ge 0$ положим

$$k_n(x) = \int_0^x dy \int_0^y q_n(u)du.$$

Тогда функция $k_n(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая и

$$k_n'(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } 0 \le x \le h_n \\ \in [0,1], & \text{для } h_n < x < h_{n-1}, \\ 1, & \text{для } x \ge h_{n-1}. \end{cases}$$

$$k_n''(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } 0 \le x \le h_n \\ \in \left[0, \dfrac{2}{n\chi_N^2(x)}\right], & \text{для } h_n < x < h_{n-1}, \\ 0, & \text{для } x \ge h_{n-1}. \end{cases}$$

Для $x \in R^d$ положим $L_n(x) = k_n(|x|)$. Функция $L_n(x) \uparrow |x|$ при $n \to \infty$. Обозначим $Z(t) = \xi^{(2)}(t) - \xi^{(1)}(t)$. Положим

$$B(s) = b(s, \xi^{(2)}(s), \eta(s)) - b(s, \xi^{(1)}(s), \eta(s)),$$
$$r(s) = \sigma(s, \xi^{(2)}(s), \eta(s)) - \sigma(s, \xi^{(1)}(s), \eta(s)), \quad R(s) = r(s)r^*(s).$$

В силу (19)

$$|B(s \wedge \tau_N)| \le \kappa_N(|Z(s \wedge \tau_N)|), \ \ ||r(s \wedge \tau_N)|| \le \chi_N(|Z(s \wedge \tau_N)|).$$

Из (21) и формулы Ито

$$\mathbf{E}L_n(Z(t \wedge \tau_N)) = \mathbf{E}\int_0^t \Big((B(s), \nabla L_n(Z(s)))$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\frac{\partial^2 L_n}{\partial x^2}(Z(s))R(s)\Big)\mathbf{1}(s \in [0, t \wedge \tau_N])ds, \tag{22}$$

где ∇ – символ градиента функции, а $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$ – матрица вторых производных функции $L(x)$.

В силу отмеченных свойств и введенных обозначений $|\nabla L_n(x)| \leq 1$ для всех $x \in R^d$. Поэтому

$$\left|\int_0^t \Big(B(s), \nabla L_n(Z(s))\Big)\mathbf{1}(s \in [0, t \wedge \tau_N])ds\right|$$
$$\leq \int_0^t \kappa_N(|\xi^{(2)}(s \wedge \tau_N) - \xi^{(1)}(s \wedge \tau_N)|)ds. \tag{23}$$

Прямым подсчетом устанавливаем, что

$$\mathrm{tr}\frac{\partial^2 L_n}{\partial x^2}(x) \leq q_n(|x|) + \frac{d-1}{|x|}\mathbf{1}(|x| \neq 0).$$

Поэтому при $s \in [0, t \wedge \tau_N]$

$$tr\frac{\partial^2 L_n}{\partial x^2}(Z(s))R(s) \leq \mathrm{tr}\frac{\partial^2 L_n}{\partial x^2}(Z(s))\mathrm{tr}R(s) \leq \left(q_n(|Z(s)|) + \frac{d-1}{|Z(s)|}\right)$$
$$\times \chi_N^2(|Z(s)|) \leq \left(\frac{2}{n\chi_N^2(|Z(s)|)} + \frac{d-1}{|Z(s)|}\right)\chi_N^2(|Z(s)|),$$

т.е.

$$tr\frac{\partial^2 L_n}{\partial x^2}(Z(s))R(s) \leq \frac{2}{n} + \frac{d-1}{|Z(s)|}\chi_N^2(|Z(s)|). \tag{24}$$

Из (22)–(24)

$$\mathbf{E}L_n(Z(t \wedge \tau_N)) \leq \frac{t}{n} + \mathbf{E}\int_0^t G_N(Z(s \wedge \tau_N))ds.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\mathbf{E}|\xi^{(2)}(t \wedge \tau_N) - \xi^{(1)}(t \wedge \tau_N)| \leq \mathbf{E}\int_0^t G_N(|\xi^{(2)}(s \wedge \tau_N) - \xi^{(1)}(s \wedge \tau_N)|)ds.$$

Применение неравенств Иенсена и Бихари, как и выше, заканчивает доказательство этого пункта.

Теорема доказана. □

В следующей теореме существование сильного решения уравнений (1), (4) доказывается при условиях коэрцитивности (25) и мотонности (26) коэффициентов уравнения (1). Доказательство утверждения следует доказательству теоремы 1 работы [5].

Теорема 6. *Пусть $m_2 < \infty$ и функции $b(t, x, y)$, $\sigma(t, x, y)$ непрерывны по x при каждых $t \in [0, T]$, $y \in R^1$. Определим*

$$M_N(t) = \sup_{|x|+|y| \leq N}\Big[|b(t, x, y)| + ||\sigma(t, x, y)||^2\Big].$$

Пусть существуют функции $K(t) \geq 0$ *и* $K_N(t) \geq 0$ *такие, что*

$$2(x, b(t,x,y)) + ||\sigma(t,x,y)||^2 \leq K(t)(1 + |x|^2 + |y|^2), \tag{25}$$

и при $|x_i| \leq N$, $i = 1, 2$, $|y| \leq N$, $t \in [0, T]$,

$$2(x_2 - x_1, b(t,x_2,y) - b(t,x_1,y)) + ||\sigma(t,x_2,y) - \sigma(t,x_1,y)||^2$$
$$\leq K_N(t)|x_2 - x_1|^2. \tag{26}$$

Кроме того,

$$\int_0^T (M_N(t) + K_N(t) + K(t))dt < \infty.$$

Тогда система уравнений (1), (4) *имеет единственное сильное решение.*

Доказательство. Определим процессы $\xi_n(t)$ как

$$\xi_n(0) = \xi_0$$
$$\xi_n(t) = \xi_n\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^t b\left(s, \xi_n\left(\frac{k}{n}\right), \eta(s)\right)ds$$
$$+ \int_{\frac{k}{n}}^t \sigma\left(s, \xi_n\left(\frac{k}{n}\right), \eta(s)\right)dw(s), \quad t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]. \tag{27}$$

Обозначим $[a]$ – целую часть числа a и положим $\chi(n,t) = \frac{[nt]}{n}$. Процесс из (27) удовлетворяет равенству

$$\xi_n(t) = \xi_0 + \int_0^t b\Big(s, \xi_n(\chi(n,t)), \eta(s)\Big)ds$$
$$+ \int_0^t \sigma\Big(s, \xi_n(\chi(n,t)), \eta(s)\Big)dw(s). \tag{28}$$

Определим процесс $p_n(t) = \xi_n(\chi(n,t)) - \xi_n(t)$ и запишем (28) в виде уравнения

$$\xi_n(t) = \xi_0 + \int_0^t b\Big(s, \xi_n(s) + p_n(s), \eta(s)\Big)ds$$
$$+ \int_0^t \sigma\Big(s, \xi_n(s) + p_n(s), \eta(s)\Big)dw(s). \tag{29}$$

Отметим, что

$$p_n(t) = -\int_{\chi(n,t)}^{t} b\Big(s, \xi_n(\chi(n,t)), \eta(s)\Big) ds$$

$$- \int_{\chi(n,t)}^{t} \sigma\Big(s, \xi_n(\chi(n,t)), \eta(s)\Big) dw(s). \tag{30}$$

Определим моменты остановок

$$\delta_n(N) = \inf\Big\{t \in [0,T] : |\xi_n(t)| \geq \frac{N}{3}\Big\},$$

$$r(N) = \inf\Big\{t \in [0,T] : |\eta(t)| \geq N\Big\},$$

$\delta_{n,m}(N) = \delta_n(N) \wedge \delta_m(N)$. При $t \leq \delta_n(N)$, процесс $|p_n(t)| \leq \frac{2N}{3}$.

Пусть

$$V_N(t) = \exp\Big\{-2\int_0^t K_N(s)ds\Big\}.$$

В силу формулы Ито для $t \leq \delta_{n,m}(N) \wedge r(N)$

$$|\xi_n(t) - \xi_m(t)|_N^2 V_N(t) = \int_0^t \Big[2\Big(\xi_n(s) - \xi_m(s)), b(s, \xi_n(s) + p_n(s), \eta(s))$$

$$- b(s, \xi_m(s) + p_m(s), \eta(s))\Big) + ||\sigma(s, \xi_n(s) + p_n(s), \eta(s)) - \sigma(s, \xi_m(s)$$

$$+ p_m(s), \eta(s))||^2 - 2K_N(s)|\xi_n(s) - \xi_m(s)|^2\Big] V_N(s)ds + \beta_{N,n,m}(t),$$

где $\beta_{N,n,m}(t)$ мартингал. При $s \leq \delta_{n,m}(N) \wedge r(N)$ из условия (26) получим, что подинтегральное выражение в последнем равенстве не больше

$$2(K_N(t) + M_N(t) + N)(|p_n(t)| + |p_m(t)|).$$

Следовательно, при $t \leq \delta_{n,m}(N) \wedge r(N)$

$$|\xi_n(t) - \xi_m(t)|^2 V_N(t) \leq 2\int_0^t \Big(K_N(s) + M_N(s) + N\Big)$$

$$\times (|p_n(s)| + |p_m(s)|))ds + \beta_{N,n,m}(t).$$

Отсюда, для произвольного марковского момента γ

$$\mathbf{E}|\xi_n(\gamma) - \xi_m(\gamma)|^2 V_N(\gamma) \mathbf{1}(\gamma \leq T \wedge \delta_{n,m}(N) \wedge r(N))$$

$$\leq 2\mathbf{E}\int_0^{T\wedge\delta_{n,m}(N)\wedge r(N)} \Big(K_N(s) + M_N(s) + N\Big)(|p_n(s)| + |p_m(s)|)ds. \tag{31}$$

Далее, из (30) и свойств стохастических интегралов получим для любых $\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$

$$\mathbf{P}\Big\{|p_n(t)| > 2\varepsilon, t \le \delta_n(N) \wedge r(N)\Big\}$$
$$\le \mathbf{P}\Big\{\varepsilon \le \Big|\int_{\chi(n,t)}^t b(s, \xi_n(\chi(n,t)), \eta(s))ds\Big|, t \le \delta_n(N) \wedge r(N)\Big\}$$
$$+ \mathbf{P}\Big\{\Delta < \int_{\chi(n,t)}^t ||\sigma(s, \xi_n(\chi(n,t)), \eta(s))||^2 ds, t \le \delta_n(N) \wedge r(N)\Big\} + \frac{\Delta}{\varepsilon^2}$$
$$\le \frac{\Delta}{\varepsilon^2} + \mathbf{1}\Big(\varepsilon \le \int_{\chi(n,t)}^t M_N(s)ds\Big) + \mathbf{1}\Big(\Delta \le \int_{\chi(n,t)}^t M_N(s)ds\Big).$$

Следовательно, случайная величина $|p_n(t)|\mathbf{1}(s \le \delta_n(N)) \wedge r(N)$ при фиксированном N сходится к нулю по вероятности при $n \to \infty$. Поскольку она ограничена числом N, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \int_0^T |p_n(t)|\mathbf{1}(t \le \delta_n(N) \wedge r(N))dt = 0. \tag{32}$$

Отсюда и (31) для произвольного марковского момента γ

$$\lim_{n\to\infty, m\to\infty} \mathbf{E}|\xi_n(\gamma) - \xi_m(\gamma)|^2 V_N(\gamma)\mathbf{1}(\gamma \le T \wedge \delta_{n,m}(N) \wedge r(N)) = 0. \tag{33}$$

Т.о. случайная величина $|\xi_n(\gamma) - \xi_m(\gamma)|^2 \mathbf{1}(\gamma \le T \wedge \delta_{n,m}(N) \wedge r(N))$ стремится к нулю по вероятности при $n \to \infty, m \to \infty$. Сомножитель $V_N(\gamma)$ опущен, т.к. он не зависит от n, m. Воспользуемся теперь леммой 1 работы [5]. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\sup_{t \le T\wedge\delta_n(N)\wedge\delta_m(N)\wedge r(N)} |\xi_n(t) - \xi_m(t)| > \varepsilon\Big\} = 0. \tag{34}$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\Big\{\delta_n(N) \wedge r(N) \le T\Big\} = 0. \tag{35}$$

Т.к. $m_2 < \infty$, то с вероятностью единица $r(N) \wedge T \uparrow T$ при $N \rightharpoonup \infty$ и для доказательства (35) достаточно показать, что

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\Big\{\delta_n(N) \le T\Big\} = 0. \tag{36}$$

Положим $V(t) = \exp\Big\{-\int_0^t K(s)ds\Big\}$. Аналогично (31), применяя формулу Ито к функции $F(t)|x|^2$, используя условие (25), получим для произвольного марковского момента γ

$$\mathbf{E}|\xi_n(\gamma)|^2V(\gamma)\mathbf{1}(\gamma \le T\wedge\delta_n(N)\wedge r(N)) \\ \le |\xi_0|^2+1+m_2+2\mathbf{E}\int_0^{T\wedge\delta_n(N)\wedge r(N)}(K(s)N+M_N(s))|p_n(s)|ds.$$

Отсюда и [5, лемма 1] заключаем, что для любого числа A

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\le T\wedge\delta_n(N)\wedge r(N)}|\xi_n(t)|^2V(t)\ge A\Big\} \\ \le \frac{1}{A^2}\Big(|\xi_0|^2+1+m_2+\mathbf{E}\int_0^{T\wedge\delta_n(N)\wedge r(N)}K(s)(N+2M_N(s))|p_n(s)|ds\Big).$$

Выбрав $A=\frac{N^2V(T)}{16}$, получим

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\le T\wedge\delta_n(N)\wedge r(N)}|\xi_n(t)|\ge \frac{N}{4}\Big\}\le \frac{256}{N^4V^2(T)}\Big(|\xi_0|^2+1+m_2 \\ +\mathbf{E}\int_0^{T\wedge\delta_n(N)\wedge r(N)}K(s)(N+2M_N(s))|p_n(s)|ds\Big).$$

Поэтому, согласно (32),

$$\lim_{N\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\le\delta_n(N)\wedge r(N)}|\xi_n(t)|\ge\frac{N}{4},\ \delta_n(N)\wedge r(N)\le T\Big\}=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\le\delta_n(N)}|\xi_n(t)|\ge\frac{N}{4},\ \delta_n(N)\le T\Big\}=0. \tag{37}$$

С другой стороны, по определению моментов $\delta_n(N)$,

$$\lim_{N\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\le\delta_n(N)}|\xi_n(t)|\le\frac{N}{4},\ \delta_n(N)\le T\Big\}=0, \tag{38}$$

т.к. под знаком вероятности стоит пустое множество. Из (37), (38) следует (36) и (35) . Теперь из (35) и (34) заключаем, что для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n,m\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\le T}|\xi_n(t)-\xi_m(t)|>\varepsilon\Big\}=0.$$

Отсюда, существует непрерывный случайный процесс $\xi(t)$ для которого

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\le T}|\xi_n(t)-\xi(t)|>\varepsilon\Big\}=0. \tag{39}$$

В силу непрерывности процессов $\xi_n(t)$, $\xi(t)$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\le T} |\xi_n(\chi(n,t)) - \xi(t)| > \varepsilon\right\} = 0. \qquad (40)$$

Учитывая (39), (40), непрерывность коэффициентов уравнения (1), переходя к пределу в равенстве (28), видим, что процесс $\xi(t)$ является решением уравнения (1). Существование решения установлено. Существование сильного решения и его единственность следует из пункта 1 теоремы 5.

Теорема доказана. □

Замечание. В формулировках теорем 4, 5 и 6 условия накладываются лишь на коэффициенты уравнения (1). Это естественно, так как в уравнение (4) не входит процесс $\xi(t)$. В процессе доказательства этих теорем использовалось лишь то, что уравнение (4) имеет единственное сильное решение и это решение имеет конечный момент нужного порядка. При выполнении этих условий утверждения теорем 4–6 остаются справедливыми и в случае, если уравнение (4) имеет более общий вид с коэффициентами, не зависящими от процесса $\xi(t)$.

6. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим пример [7, уравнение (7)], описывающий динамику фондовооружённости предприятия, функционирующего в случайной среде.

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \Big(|\eta(s)|^{q-1}\,\eta(s)\,|\xi(s)|^{p-1}\,\xi(s) + c\xi(s)\Big)\,ds$$
$$+ \int_0^t \sigma\xi(s)dw_1(s) + \int_0^t \delta dw_2(s). \qquad (41)$$

Здесь $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $p + q \le 1$, $c \in R^1$, $\sigma > 0$ – коэффициент волатильности фондовооружённости предприятия, $\delta > 0$ – коэффициент волатильности среды, в которой функционирует предприятие, $m_4 < \infty$.

Покажем, что выполнено условие **I**.

Имеем,

$$|b(t,x,y)|^2 + \|\sigma(t,x,y)\|^2 = \big||y|^{q-1}y|x|^{p-1}x + cx\big|^2 + \sigma^2x^2 + \delta^2$$
$$\le 2y^{2q}x^{2p} + (\sigma^2 + 2c^2)x^2 + \delta^2.$$

Воспользуемся неравенством Юнга.
Если $p+q=1$, то $y^{2q}x^{2p} \le \frac{y^2}{q} + \frac{x^2}{p}$.
Если $p+q<1$, то $y^{2q}x^{2p} \le \frac{1}{1-p-q} + \frac{y^2}{q} + \frac{x^2}{p}$. В итоге получаем

$$|b(t,x,y)|^2 + \|\sigma(t,x,y)\|^2 \le \Gamma(1+|x|^2+|y|^2),$$

то есть выполнено условие I_1.

Поскольку $a(t,x,y) = \sigma^2 x^2 + \delta^2$, то условие I_2 для этого примера следует из условия $\delta > 0$.

Из Теоремы 4 следует существование слабого решения уравнения (41).

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t b(\eta(s))\,|\xi(s)|^{p-2}\,\xi(s)ds + \int_0^t \sigma(\eta(s))\,|\xi(s)|^{0.5p}\,dw(s). \quad (42)$$

Здесь $p \ge 2$, $b(y)$ и $\sigma(y)$ неслучайные локально ограниченные функции на R^1, $\mathbf{E}\,|\eta(t)|^2 = m_2 < \infty$. Сделаем предположение

$$2b(y) + \sigma^2(y) \le 0. \quad (43)$$

Покажем, что выполнены условия Теоремы 6. Имеем,

$$2(x, b(t,x,y)) + \|\sigma(t,x,y)\|^2 = (2b(y) + \sigma^2(y))|x|^p \le 0$$

и условие (25) выполнено. Проверим условие (26). Применяя формулу Адамара, аналогично [6, с. 109], получим

$$\begin{aligned}
&2(x_2 - x_1, b(t,x_2,y) - b(t,x_1,y)) + \|\sigma(t,x_2,y) - \sigma(t,x_1,y)\|^2 \\
&= 2b(y)(x_2 - x_1)\left[|x_2|^{p-1}x_2 - |x_1|^{p-1}x_1\right] + \sigma^2(y)\left[|x_2|^{0.5p} - |x_1|^{0.5p}\right]^2 \\
&= (x_2 - x_1)^2\Bigg[2(p-1)b(y)\int\limits_0^1 |x_1 + s(x_2 - x_1)|^{p-2}\,ds \\
&+ 0.25p^2\sigma^2(y)\left(\int\limits_0^1 |x_1 + s(x_2 - x_1)|^{0.5(p-2)}\,ds\right)^2\Bigg] \\
&\le \left(2(p-1)b_N + 0.25p^2\sigma_N^2\right)(3N)^{p-2}|x_2 - x_1|^2.
\end{aligned}$$

Здесь: $|x_i| \le N, i = 1,2$, $|y| \le N$, $b_N = \sup\limits_{|y| \le N} |b(y)|$, $\sigma_N^2 = \sup\limits_{|y| \le N} \sigma^2(y)$.

Из полученного неравенства следует, что

$$M_N(t) = b_N + \sigma_N^2, K_N(t) = \left(2(p-1)b_N + 0.25p^2\sigma_N^2\right)(3N)^{p-2}.$$

Условия Теоремы 6 выполнены и уравнение (42) при условии (43) имеет единственное сильное решение.

Пример 3. Рассмотрим модель динамики плотности популяции в случайной среде (модель Wright–Fisher) [13, с. 8, (3.19), (3.38)].

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(s)\xi_+(s)(1-\xi(s))_+ ds + \int_0^t \sigma\sqrt{\xi_+(s)(1-\xi(s))_+}dw(s). \tag{44}$$

Покажем, что при $m_2 < \infty$ выполнены условия пункта 2 Теоремы 5. Прежде всего отметим, что коэффициенты уравнения непрерывны по своим переменным.

Обозначим $h(x) = x_+(1-x)_+$. Легко видно, что $0 \le h(x) \le 0.25$, $-1 \le h'(x) \le 1$.

Линейная ограниченность:

$$|b(t,x,y)|^2 + \|\sigma(t,x,y)\|^2 \le 0.0625y^2 + 0.25\sigma^2.$$

Значит, выполнено условие I_1. Тогда согласно Теореме 2 система (44), (4) имеет слабое решение.

Локальная липшицевость коэффициента дрейфа: для $|y| \le N$,

$$|b(t,x_2,y) - b(t,x_1,y)| = |y|\,|h(x_2) - h(x_1)| \le |y||x_2 - x_1| \le N|x_2 - x_1|.$$

Выберем $k_N(v) = Nv$.

Для доказательства справедливости условия, наложенного на коэффициент диффузии, воспользуемся неравенством:

$$|\sqrt{u} - \sqrt{v}| \le \sqrt{|u-v|},\ u \ge 0,\ v \ge 0.$$

Тогда

$$|\sigma(t,x_2,y) - \sigma(t,x_1,y)| \le \sigma\sqrt{|h(x_2) - h(x_1)|} \le \sigma\sqrt{|x_2 - x_1|}.$$

Положим $\chi_N(v) = \sqrt{v}$. Эта функция удовлетворяет условию пункта 2 Теоремы 5. Отметим, что в данном примере коэффициент диффузии не является даже локально липшицевым. Согласно Теореме 5 уравнение (44) имеет единственное сильное решение.

Пример 4. Модель Гестона [10] предполагает, что $S(t)$ – цена актива – определяется стохастическим процессом

$$dS(t) = rS(t)\,dt + S(t)\sqrt{v_+(t)}\,dw^{(1)}(t),\ \ S(0) = S_0 > 0, \tag{45}$$

где $v(t)$ – волатильность актива, задаваемая уравнением

$$dv(t) = \beta(D - v(t))\,dt + k\sqrt{v_+(t)}\left(\rho dw^{(1)}(t) + \sqrt{1-\rho^2}dw^{(2)}(t)\right),$$

$$v(0) = v_0 > 0. \tag{46}$$

Здесь $w^{(1)}(t)$, $w^{(2)}(t)$ – независимые винеровские процессы. Как обычно, для функции $f(t)$ обозначим $f_-(t) = -\min(f(t), 0)$, $f_+(t) = \max(f(t), 0)$. Параметры, использованные выше, имеют следующий смысл:

r – коэффициент роста цены;

ρ – детерминированный коэффициент, $\rho \in [-1, 1]$;

β – скорость возвращения к равновесной вариации (дисперсии доходности);

D – равновесная вариация (дисперсия доходности);

k – величина, определяющая дисперсию волатильности $v(t)$.

В исходной модели Гестона коэффициент r является числом. Его знак определяет направление треда, а его модуль определяет величину скорости изменения стоимости. Естественно предположить, что тренд меняется с течением времени в случайнык моменты времени. Будем считать, что в уравнение (45) вместо числа r стоит выражение $r(\eta(t))$, функция $r(y)$ неслучайна. Аналогично, будем считать, что коэффициент β имеет вид $\beta = g(\eta(t))$, где $g(y)$ неслучайная непрерывная по $y \in \mathbf{R}^1$ функция и существует постоянная $L > 0$ для которой $0 \le g(y) \le L$. Обозначим $\widetilde{w}(t) = \rho w^{(1)}(t) + \sqrt{1-\rho^2}w^{(2)}(t)$. Процесс $\widetilde{w}(t)$ является винеровским и уравнение (46) теперь имеет вид

$$dv(t) = g(\eta(t))(D - v(t))\,dt + k\sqrt{v_+(t)}\,d\widetilde{w}(t)),$$

$$v(0) = v_0 > 0. \tag{47}$$

Существует слабое решение уравнения (47) так как коэффициенты удовлетворяют условиям Теоремы 2. Проверим условие 2 Теоремы 5. Имеем,

$$g(y)\,|(D - v_2) - (D - v_1)| \le L|v_2 - v_1|,$$

то есть, $k_N(v) = Lv$.

$$|\sqrt{v_{2+}} - \sqrt{v_{1+}}| \le \sqrt{|v_{2+} - v_{1+}|},$$

и $\chi_N(v) = \sqrt{v}$.

Так как для (47) $d = 1$, то $G_N(v) = k_N(v) = Lv$ и уравнение (47) имеет единственное сильное решение. Докажем, что это решение неотрицательно. Определим функцию:

$$\varphi(x,\epsilon)=\begin{cases} x^2-\dfrac{\epsilon^2}{6}, \quad x<-\epsilon; \\ -\dfrac{x^4}{2\epsilon^2}-\dfrac{4x^3}{3\epsilon},\ -\epsilon\le x<0; \\ 0, \qquad x\ge 0. \end{cases}$$

Эта функция неотрицательна, дважды непрерывно дифференцируема по x, монотонно убывает на отрицательной полуоси и

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\varphi(x,\epsilon)=x^2\mathbf{1}(x\le 0).$$

По формуле Ито получаем

$$\varphi(v(t),\epsilon)=D\int\limits_0^t \varphi'_x(v(s),\epsilon)g(\eta(s))ds-\int\limits_0^t g(\eta(s))\varphi'_x(v(s),\epsilon)v(s)ds$$

$$+\,0.5\int\limits_0^t \varphi''_{x^2}(v(s),\epsilon)v_+(s)ds+k\int\limits_0^t \varphi'_x(v(s),\epsilon)\sqrt{v_+(s)}dw(s).$$

Два последние слагаемые равны нулю, так $\varphi(v,\epsilon)$ и v_+ не могут быть отличны от нуля одновременно. Так как $g(y)\ge 0$, $\theta>0$, $\varphi'_x(x,\varepsilon)\le 0$, то первое слагаемое в правой части неположительно. Так как $\varphi'_x(v,\varepsilon)v=\varphi'_x(v,\varepsilon)v_-\ge 0$, то и второе слагаемое в правой части неположительно. Тогда получаем $\varphi(v(t),\epsilon)=0$. Перейдя к пределу по $\varepsilon\downarrow 0$ получаем для любого $t\in[0,T]$ с вероятностью единица

$$0=v^2(t)\mathbf{1}(v(t)\le 0)=(v_-(t))^2.$$

Поэтому, для любого $t\in[0,T]$ с вероятностью единица $v_-(t)=0$, то есть решение задачи (47) неотрицательно. Определим процесс

$$Z(t)=\ln S_0+\int_0^t\left(r(\eta(s))-\frac{v(s)}{2}\right)ds+\int_0^t\sqrt{v(s)}dw^{(1)}(s).$$

С помощью формулы Ито убеждаемся, что процесс $S(t)=\exp\{Z(t)\}$ является решением модифицированного уравнения (45)

$$S(t)=S_0+\int_0^t r(\eta(s))S(s)\,ds+\int_0^t S(s)\sqrt{v(s)}\,dw^{(1)}(s),$$

где процесс $v(t)$ – решение уравнения (47).

Литература

[1] Э. Беккенбах, З. Беллман, *Неравенства*, М., Мир, 1965.

[2] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, К., Наукова Думка, 1982.

[3] В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах*, М., Наука, 1980.

[4] Н. В. Крылов, *Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения* // Сиб. матем. журнал, **17** (1976), No. 2, 291–303.

[5] Н. В. Крылов, *Простое доказательство существования решения уравнения Ито с монотонными коэффициентами* // Теория вероятностей и ее применения, **35** (1999), No. 3, 576–580.

[6] Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский, *Об эволюционных стохастических уравнениях* // Итоги науки и техники, **14** (1979), М., ВИНИТИ, 71–147.

[7] В. А. Курзенев, Е. Б. Лычагина, *Стохастическое моделирование динамики экономических систем* // Управленческое консультирование, (2013), No. 5, 78–83.

[8] А. А. Леваков, *Стохастические дифференциальные уравнения*, Минск, БГУ, 2009.

[9] Ж. Неве, *Математические основы теории вероятностей*, М., Мир, 1969.

[10] S. Heston, *A closed form solutions for options with stochastic volatility* // Review of Financial Studies, **6** (1993), 327–343.

[11] A. Kohatsu-Higa, J. A. Leon, D. Nualart, *Stochastic differential equations with random coefficients* // Bernoulli, **3** (1997), No. 2, 233–245.

[12] G. Kulinich, S. Kushnirenko, *Strong uniqueness of solutions of stochastic differential equations with jumps and non-Liptshitz random coefficients* // Modern Stochastics: Theory and Applications, (2014), No. 1, 65–72.

[13] C. Mueller, *Some tools and results for parabolic stochastic partial differential equations* // Proceedings of a summer school in probability, University of Utah, Editors Davar Khoshnevisan and Firas Rassoul-Agha, 2009, Lecture Notes in Mathematics, **1962**, Springer, 111–144.

[14] R. Situ, *Theory of Stochastic Differential Equations With Jumps and Applications*, Springer, 2005.

[15] V. P. Zubchenko, *Properties of solutions of stochastic differential equations with random coefficients* // Theor. Probability and Math. Statist., (2011), No. 82, 11–26.

Сведения об авторах

Сергей Яковлевич Махно,
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск, Украина
E-Mail: smahno@gmail.com

Сергей Анатольевич Мельник
melniks1953@gmail.com