Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 3, 399 – 417

О глобальном поведении гомеоморфизмов метрических пространств

Евгений А. Севостьянов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В работе изучаются гомеоморфизмы метрических пространств, более общие, чем квазиконформные отображения. Доказано, что семейства указанных отображений при определённых условиях на границы соответствующих областей являются равностепенно непрерывными в их замыкании.

1. Введение

В настоящей работе речь идёт об изучении гомеоморфизмов, представляющих собой квазиконформные отображения с весом (см. [1–5] и [6]). Рассматриваемые отображения также находятся в русле изучения обобщённых квазиизометрий, многие из свойств которых установлены в сравнительно недавних работах [7–9] и [10]. В данной статье мы исследуем локальное поведение так называемых кольцевых Q-гомеоморфизмов в области метрического пространства, а также их поведение в замыкании области метрического пространства (см., напр., [11] и [12]). Основоположниками указанных исследований являются Някки и Палка, полностью описавшие ситуацию квазиконформных отображений в евклидовом случае ([13,14]). Для отображений с неограниченной характеристикой аналогичные вопросы рассмотрены автором в евклидовом пространстве [15]. Более того, частично рассмотрена и ситуация метрических пространств (см. [16]), где некоторые из приведённых ниже утверждений установлены в частном случае. Отметим, кроме того, статью [6], где получены значительные результаты о граничном поведении Q-гомеоморфизмов. Хотя здесь не изучались вопросы, связанные с локальным и глобальным поведением отображений, именно здесь данный объект (Q-гомеоморфизмы) впервые рассмотрен в метрических пространствах.

Статья поступила в редакцию 07.06.2017

ISSN 1810 – 3200.

Перейдём к изложению содержательной части работы и её основных результатов. Хорошо известно, что отображения классов Соболева и Орлича–Соболева в пространстве $\mathbb{R}^n$ удовлетворяют соотношениям вида

$$M(f(\Gamma)) \leqslant \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\eta^n(|x-x_0|)dm(x) \qquad (1.1)$$

для произвольной измеримой по Лебегу функции $\eta : [\varepsilon, \varepsilon_0] \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(t)dt \geqslant 1$, где Γ – семейство кривых, соединяющих сферы с центром в точке x_0 и радиусов ε и ε_0, m – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, а M – конформный модуль семейств кривых (см., напр., [17, следствие 5] и [18, теорема 1]). Наша ближайшая цель – изучить некоторые свойства отображений аналогичным тем, что удовлетворяют соотношениям (1.1), в метрических пространствах. В настоящей статье основное внимание уделяется локальному поведению отображений и поведению их в замыкании заданной области.

В дальнейшем (X, d, μ) и (X', d', μ') – метрические пространства с метриками d и d' и борелевскими мерами μ и μ'. Под *областью* G в пространстве X следует понимать *открытое линейно связное множество* в X. *Кривой* γ в X называется непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to X$. *Длиной кривой* γ *на отрезке* $[a, b]$ *называется величина*

$$l(\gamma) := \sup \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))\,,$$

где sup берётся по всем возможным разбиениям $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n := b$. Если $l(\gamma) < \infty$, кривая называется спрямляемой и, значит, корректно определена функция длины $s_\gamma(t)$, означающая длину кривой $\gamma_{[a,t]}$, $t \in [a, b]$. В таком случае, имеет место представление

$$\gamma(t) = \gamma^0 \circ s_\gamma(t)\,,$$

где γ^0 называется *нормальным представлением* кривой γ (см., напр., [19, гл. 7, соотношение (7.2)]). *Интегралом* от борелевской функции $\rho : G \to [0, \infty]$ называется величина

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| = \int\limits_{0}^{l(\gamma)} \rho(\gamma^0(t))dt\,.$$

Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ. Борелева функция $\rho : X \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в X, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant 1$$

для всех (локально спрямляемых) кривых $\gamma \in \Gamma$ (т.е., произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ). В этом случае мы пишем: $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

Пусть $p \geqslant 1$ – фиксированное число, тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{X} \rho^p(x) d\mu(x)\,.$$

При этом, если $\operatorname{adm}\Gamma = \varnothing$, то полагаем: $M_p(\Gamma) = \infty$ (см. [20, разд. 6 на с. 16]).

Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае,

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad M_p(\Gamma_1) \leqslant M_p(\Gamma_2) \tag{1.2}$$

(см. [21, теорема 1]).

Пусть $E,\ F \subset X$ – произвольные множества. В дальнейшем через $\Gamma(E,F,X)$ мы обозначаем семейство всех кривых $\gamma : [a,b] \to X$, которые соединяют E и F в X, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in X$ при $t \in (a,\, b)$. Пусть G и G' – области с конечными хаусдорфовыми размерностями $\alpha \geqslant 2$ и $\alpha' \geqslant 2$ в метрических пространствах (X,d,μ) и (X',d',μ'), соответственно, и пусть $Q : G \to [0,\infty]$ – измеримая функция. Всюду далее

$$B(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}\,, S(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}\ ,$$

$$A = A(x_0,r_1,r_2) = \{x \in X : r_1 < d(x,x_0) < r_2\}\ . \tag{1.3}$$

Зафиксируем $p,q \geqslant 1$ и будем называть гомеоморфизм $f : G \to G'$ *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0 \in G$ относительно p и q-модулей*, если при любых $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0,\partial G)$ и для любых сфер $S_1 = S(x_0,r_1)$ и $S_2 = S(x_0,r_2)$ выполнено неравенство

$$M_p(f(\Gamma(S_1,S_2,A))) \leqslant \int\limits_{A} Q(x)\cdot\eta^q(d(x,x_0))d\mu(x) \tag{1.4}$$

для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geqslant 1\,, \tag{1.5}$$

где $A = A(x_0, r_1, r_2)$.

Пусть $(X,\, d)$ и $(X\,', d\,')$ — метрические пространства с расстояниями d и $d\,'$, соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f\colon X \to X\,'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X (т.е., равномерно на любых компактных подмножествах X) к непрерывной функции $f\colon\, X \to X\,'$.

Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X\,'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $d\,'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех таких x, что $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$. Согласно одной из версий теоремы Арцела–Асколи (см., напр., [20, пункт 20.4]), если $(X,\, d)$ – сепарабельное метрическое пространство, а $(X\,',\, d\,')$ – компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X \to X\,'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.

Следующее определение может быть найдено, напр., в [6, разд. 4]. Будем говорить, что интегрируемая в $B(x_0, r)$ функция $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in G$, $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu(B(x_0,\, \varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, d\mu(x) < \infty,$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\mu(B(x_0,\, \varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\, \varepsilon)} \varphi(x)\, d\mu(x)$.

Пусть (X, d, μ) – метрическое пространство с метрикой d, наделённое локально конечной борелевской мерой μ. Следуя [19, раздел 7.22] будем говорить, что борелева функция $\rho\colon X \to [0, \infty]$ является *верхним градиентом* функции $u\colon X \to \mathbb{R}$, если для всех спрямляемых кривых γ, соединяющих точки x и $y \in X$ выполняется неравенство $|u(x) - u(y)| \leqslant \int\limits_{\gamma} \rho\, |dx|$. Будем также говорить, что в указанном пространстве X выполняется $(1; p)$-неравенство Пуанкаре, если найдутся постоянные $C\geqslant 1$ и $\tau\geqslant 1$ так, что для каждого шара $B\subset X$, произвольной ограниченной непрерывной функции $u\colon \tau B\rightarrow {\mathbb R}$ и любого её верхнего градиента ρ выполняется следующее неравенство:

$$\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_{B}|u-u_B|d\mu(x)\leqslant C\cdot({\rm diam}\,B)\left(\frac{1}{\mu(\tau B)}\int\limits_{\tau B}\rho^p d\mu(x)\right)^{1/p}\,,$$

где $u_B:=\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_{B}ud\mu(x)$. Метрическое пространство (X,d,μ) назовём *$\widetilde{Q}$-регулярным по Альфорсу* при некотором $\widetilde{Q}\geqslant 1$, если при каждом $x_0\in X$, некоторой постоянной $C\geqslant 1$ и произвольного $R<{\rm diam}\,X$

$$\frac{1}{C}R^{\widetilde{Q}}\leqslant \mu(B(x_0,R))\leqslant CR^{\widetilde{Q}}.$$

Здесь иногда берутся замкнутые шары $\overline{B(x_0,R)}$, что ввиду предельных свойств меры не является принципиальным (см. [22, теорема 9.1, гл. I]). Как известно, α-регулярные по Альфорсу пространства имеют хаусдорфову размерность α (см. [19, с. 61–62]). Более того, нетрудно видеть, что в таких пространствах области G также имеют хаусдорфову размерность α (см. там же). Условимся говорить, что метрическое пространство X *локально связно*, если для произвольной окрестности U произвольной точки $x_0\in X$ найдётся окрестность $V\subset U$, являющаяся связной (см. [23, I.49.6]). Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть G – область в локально связном и локально компактном метрическом пространстве (X,d,μ) с конечной хаусдорфовой размерностью $\alpha\geqslant 2$, а $(X^{\,\prime},d^{\,\prime},\mu^{\,\prime})$ – метрическое пространство, которое является $\alpha^{\,\prime}$-регулярным по Альфорсу, и в котором выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре, $p\in (\alpha^{\,\prime}-1, \alpha^{\,\prime}]$.*

Пусть $B_R\subset X^{\,\prime}$ – некоторый фиксированный шар радиуса R. Обозначим через $\mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$ семейство кольцевых Q-гомеоморфизмов $f\colon G\rightarrow B_R\setminus K_f$ в точке $x_0\in G$ относительно p и q-модулей области G на некоторую область $f(G)\subset X^{\,\prime}$ таких, что

$$\sup\limits_{x,y\in K_f}d^{\,\prime}(x,y)\geqslant\delta>0\,,$$

где $K_f\subset B_R$ – некоторый континуум. Тогда семейство отображений $\mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$ является равностепенно непрерывным в точке $x_0\in G$, если $q\in (1, \alpha]$ и $Q\in FMO(x_0)$.

Как будет видно из дальнейших рассуждений, приведённый результат о равностепенной непрерывности отображений распространяется также на точки замыкания области. При этом, здесь требуются определённые дополнительные условия на границу области. В связи с этим, напомним некоторые определения. Область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subset U$ такая, что множество $V \cap D$ связно (см. [23, I.49.6]). Аналогично, область D будет называться *локально линейно связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subset U$ такая, что множество $V \cap D$ линейно связно. Согласно [24], область D в $\mathbb{R}^n$ будем называть *областью квазиэкстремальной длины относительно p-модуля*, сокр. *QED-областью относительно p-модуля*, если

$$M_p(\Gamma(E, F, X)) \leqslant A \cdot M_p(\Gamma(E, F, D)) \qquad (1.6)$$

для конечного числа $A \geqslant 1$ и всех континуумов E и F в D. Пусть $p, q \geqslant 1$, D – область в метрическом пространстве (X, d, μ) с конечной хаусдорфовой размерностью $\alpha \geqslant 2$, $Q : X \to [0, \infty]$ – измеримая функция, $Q(x) \equiv 0$ при всех $x \notin D$. Отображение $f : D \to X$ будем называть *кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p и q-модулей,* если для некоторого $r_0 = r(x_0)$, произвольных кольца $A = A(x_0, r_1, r_2)$, центрированного в точке x_0, радиусов: r_1, r_2, $0 < r_1 < r_2 < r_0 = r(x_0)$ и любых континуумов $E_1 \subset \overline{B(x_0, r_1)} \cap D$, $E_2 \subset (X \setminus B(x_0, r_2)) \cap D$ отображение f удовлетворяет соотношению

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(E_1,\, E_2,\, D\right)\right)\right) \leqslant \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^q(d(x, x_0))\, d\mu(x) \qquad (1.7)$$

для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой что имеет место соотношение (1.5). Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2. *Предположим, G – область в метрическом пространстве (X, d, μ) с локально конечной борелевской мерой μ и конечной хаусдорфовой размерностью $\alpha \geqslant 2$, а (X', d', μ') – метрическое пространство, являющееся α'-регулярным по Альфорсу, в котором выполнено $(1; p)$-неравенство Пуанкаре, $p \in (\alpha' - 1, \alpha']$. Пусть также область G локально линейно связна в точках границы, а область $G' \subset B_R$ является QED-областью относительно p-модуля, где B_R – некоторый шар в X', такой что $\overline{B_R}$ – компакт в X'. Тогда произвольный кольцевой Q-гомеоморфизм $f : G \to G'$ в точке $b \in \partial G$ относительно p и q-модулей такой, что $f(G) = G'$, $q \in (1, \alpha]$, имеет непрерывное продолжение в точку b при условии, что $Q \in FMO(b)$.*

Обозначим через $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$ семейство, состоящее из всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f\colon G \to G'$ в каждой точке $x_0 \in \overline{G}$ относительно p и q-модулей таких, что $f(a_0) = a_1 \neq b_1 = f(b_0)$, $f(G) = G'$. Основной результат настоящей работы заключает в себе следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть G – область в локально связном и сепарабельном метрическом пространстве (X,d,μ) с конечной хаусдорфовой размерностью $\alpha\geqslant 2$, локально линейно связная в каждой точке своей границы, а $(X^{\,\prime},d^{\,\prime},\mu^{\,\prime})$ – метрическое пространство, $\alpha^{\prime}$-регулярное по Альфорсу, в котором выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре, $p\in(\alpha^{\,\prime}-1,\alpha^{\,\prime}]$. Предположим, область $G^{\,\prime}\subset B_R$ является QED-областью относительно p-модуля, $G^{\,\prime}\subset B_R$, B_R – некоторый фиксированный шар в $X^{\,\prime}$, такой, что $\overline{B_R}$ компакт, причём найдётся невырожденный континуум $K\subset B_R\setminus G^{\,\prime}$.*

Пусть $Q\in FMO(\overline{G})$ и $q\in(1,\alpha]$. Тогда каждое отображение семейства $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G,G^{\,\prime})$ продолжается по непрерывности на ∂G, при этом, семейство $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(\overline{G},\overline{G^{\,\prime}})$, состоящее из всех продолженных таким образом отображений $f:\overline{G}\rightarrow\overline{G^{\,\prime}}$, является равностепенно непрерывным в каждой точке $x_0\in\overline{G}$.

2. О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов внутри области

Результаты настоящего раздела установлены в работе [16] в частном случае $p=\alpha$, $q=\alpha^{\,\prime}$, где $\alpha,\alpha^{\,\prime}$ – хаусдорфовы размерности пространств X и $X^{\,\prime}$, соответственно. Как известно, эффективным методом исследования кольцевых Q-отображений в $\mathbb{R}^n$ является метод "сингулярных параметров", т.е., метод, позволяющий связать поведение заданной характеристики $Q(x)$ с поведением модуля соответствующего семейства кривых. Применим этот метод и к исследованию отображений в метрических пространствах. Следующая лемма может быть полезной при исследовании свойства равностепенной непрерывности Q-гомеоморфизмов, удовлетворяющих (1.4), в наиболее общей ситуации.

Лемма 2.1. *Пусть G – область в метрическом пространстве (X,d,μ) с конечной хаусдорфовой размерностью $\alpha\geqslant 2$, а $(X^{\,\prime},d^{\,\prime},\mu^{\,\prime})$ – также, некоторое метрическое пространство с конечной хаусдорфовой размерностью $\alpha^{\,\prime}\geqslant 2$. Пусть $p,q\geqslant 1$ и $f\colon G\rightarrow X^{\,\prime}$ – кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0\in G$ относительно p и q-модулей, отображающий область G на некоторую область $f(G)\subset X^{\,\prime}$, кроме того, пусть $r_0>0$ таково, что шар $B(x_0,r_0)$ лежит со своим замыканием в G. Предположим, что для некоторого числа $0<\varepsilon_0<r_0$, некоторого $\varepsilon_0^{\prime}\in(0,\varepsilon_0)$ и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_{\varepsilon}(t)\}$, $\psi_{\varepsilon}\colon(\varepsilon,\varepsilon_0)\rightarrow[0,\infty]$, $\varepsilon\in\left(0,\varepsilon_0^{\prime}\right)$, выполнено*

условие

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi_\varepsilon^q(d(x,x_0))\,d\mu(x)\leqslant F(\varepsilon,\varepsilon_0)\qquad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0'),\quad(2.1)$$

где $F(\varepsilon,\varepsilon_0)$ *– некоторая заданная функция и*

$$0<I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi_\varepsilon(t)dt<\infty\qquad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0').\qquad(2.2)$$

Тогда для сфер $S_1=S(x_0,\varepsilon)$ *и* $S_2=S(x_0,\varepsilon_0)$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0'$ *выполнено неравенство*

$$M_p(f(\Gamma(S_1,S_2,A)))\leqslant F(\varepsilon,\varepsilon_0)/I^q(\varepsilon,\varepsilon_0)\qquad\forall\,\varepsilon\in\left(0,\,\varepsilon_0'\right),\qquad(2.3)$$

где $A=\{x\in G:\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0\}$.

Доказательство. Рассмотрим семейство измеримых функций

$$\eta_\varepsilon(t)=\psi_\varepsilon(t)/I(\varepsilon,\varepsilon_0),\quad t\in(\varepsilon,\,\varepsilon_0)\,.$$

Заметим, что для $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0')$ выполнено равенство $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\eta_\varepsilon(t)\,dt=1$. Тогда из определения кольцевого Q-гомеоморфизма в точке x_0 относительно p и q-модулей, и соотношений (2.1) получаем неравенство (2.3). $\Box$

Справедливо следующее утверждение (см. [25, предложение 4.7]).

Предложение 2.1. *Пусть* X *–* α*-регулярное по Альфорсу метрическое пространство с мерой, в котором выполняется* $(1;p)$*-неравенство Пуанкаре,* $\alpha\geqslant 1$, $p\in(\alpha-1,\alpha]$. *Тогда для произвольных континуумов* E *и* F, *содержащихся в шаре* $B(x_0,R)$, *и некоторой постоянной* $C>0$ *выполняется неравенство*

$$M_p(\Gamma(E,F,X))\geqslant\frac{1}{C}\cdot\frac{\min\{\operatorname{diam}E,\operatorname{diam}F\}}{R^{1+p-\alpha}}\,.$$

Теперь сформулируем и докажем утверждение о равностепенной непрерывности кольцевых Q-гомеоморфизмов между метрическими пространствами в “максимальной” степени общности.

Лемма 2.2. *Пусть* G *– область в локально связном и локально компактном метрическом пространстве* (X,d,μ) *с конечной хаусдорфовой размерностью* $\alpha\geqslant 2$, *а* (X',d',μ') *– метрическое пространство,*

α'-регулярное по Альфорсу, в котором выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре, $p\in(\alpha'-1,\alpha']$.

Пусть $r_0>0$ таково, что шар $B(x_0,r_0)$ лежит со своим замыканием в G и $0<\varepsilon_0<r_0$. Предположим также, что для некоторого числа $\varepsilon_0'\in(0,\varepsilon_0)$ и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon\colon(\varepsilon,\varepsilon_0)\to(0,\infty)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0')$, выполнено условие (2.1), где некоторая заданная функция $F(\varepsilon,\varepsilon_0)$ удовлетворяет условию $F(\varepsilon,\varepsilon_0)=o(I^q(\varepsilon,\varepsilon_0))$, а $I(\varepsilon,\varepsilon_0)$ определяется соотношением (2.2).

Пусть $B_R\subset X'$ – некоторый фиксированный шар радиуса R. Обозначим через $\mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$ семейство кольцевых Q-гомеоморфизмов $f\colon G\to B_R\setminus K_f$ в точке $x_0\in G$ относительно p и q-модулей таких, что $q\in(1,\alpha]$ и $\sup\limits_{x,y\in K_f}d'(x,y)\geqslant\delta>0$, где $K_f\subset B_R$ – некоторый континуум. Тогда семейство отображений $\mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$ является равностепенно непрерывным в точке $x_0\in G$.

Доказательство. Пусть $x_0\in G$, $f\in\mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$. Поскольку пространство X локально связно и локально компактно, можно выбрать последовательность шаров $B(x_0,\varepsilon_k)$, $k=0,1,2,\ldots$, $\varepsilon_k\to0$ при $k\to\infty$, таких что $V_{k+1}\subset\overline{B(x_0,\varepsilon_k)}\subset V_k$, где V_k – континуумы в G. Заметим, что $f(V_k)$ и K_f – континуумы в B_R (в частности, $f(V_k)$ – континуум как непрерывный образ континуума, см. [23, теорема 1, III, § 41 и теорема 3, I, § 46]). Тогда по предложению 2.1 при некоторой постоянной $C>0$ получим:

$$M_p(K_f,f(V_k),X'))\geqslant\frac{1}{C}\cdot\frac{\min\{\operatorname{diam}K_f,\operatorname{diam}f(V_k)\}}{R^{1+p-\alpha'}}\,. \tag{2.4}$$

Для кривой $\gamma:[a,b]\to X$ положим, как обычно,

$$|\gamma|=\{x\in X:\exists\, t\in[a,b]:\gamma(t)=x\}\,.$$

Заметим, что при $k\geqslant1$ произвольная кривая $\gamma\in\Gamma(K_f,f(V_k),X')$ соединяет $f(B(x_0,\varepsilon_0))$ и $X'\setminus f(B(x_0,\varepsilon_0))$, поэтому найдётся точка $y_1\in|\gamma|\cap f(S(x_0,\varepsilon_0))$ и $t_1\in(0,1)$ такие, что $\gamma(t_1)=y_1$ и $|\gamma|_{[0,t_1)}|\subset f(B(x_0,\varepsilon_0))$ (см. [26, предложение 13.3] либо [23, теорема 1.I.46]). Обозначим $\gamma_1:=\gamma|_{[0,t_1)}$, и пусть $\alpha_1=f^{-1}(\gamma_1)$. Заметим, что $|\alpha_1|\subset\overline{B(x_0,\varepsilon_0)}$. Заметим далее, что α_1 целиком не лежит ни в $\overline{B(x_0,\varepsilon_{k-1})}$, ни в $X\setminus\overline{B(x_0,\varepsilon_{k-1})}$, поэтому найдётся $t_2\in(0,t_1)$ такое, что $\alpha_1(t_2)\in S(x_0,\varepsilon_{k-1})$ (см. [23, теорема 1.I.46]) и $|\alpha_{[t_2,t_1]}|\subset X\setminus\overline{B(x_0,\varepsilon_{k-1})}$. Положим $\alpha_2=\alpha_1|_{[t_2,t_1]}$. Заметим, что $\gamma_2:=f(\alpha_2)$ является подкривой γ. Исходя из сказанного,

$$\Gamma(K_f,f(V_k),X')>\Gamma(f(S(x_0,\varepsilon_{k-1})),f(S(x_0,\varepsilon_0)),f(A))\,,$$

где $A=\{x\in X:\varepsilon_{k-1}<d(x,x_0)<\varepsilon_0\}$, откуда ввиду соотношения (1.2)

$$M_p(\Gamma(K_f,f(V_k),X'))\leqslant M_p(\Gamma(f(S(x_0,\varepsilon_{k-1})),f(S(x_0,\varepsilon_0)),f(A)))\,. \tag{2.5}$$

Тогда из соотношений (2.4) и (2.5) вытекает, что

$$M_p(\Gamma(f(S(x_0,\varepsilon_{k-1})),f(S(x_0,\varepsilon_0)),f(A))) \geqslant \frac{1}{C}\cdot\frac{\min\{\operatorname{diam}K_f,\operatorname{diam}f(V_k)\}}{R^{1+p-\alpha'}}\,. \tag{2.6}$$

С другой стороны, из леммы 2.1 и условия $F(\varepsilon,\varepsilon_0)=o(I^q(\varepsilon,\varepsilon_0))$ вытекает, что

$$M_p(\Gamma(f(S(x_0,\varepsilon_{k-1})),f(S(x_0,\varepsilon_0)),f(A)))\to 0$$

при $k\to\infty$, поэтому для любого $\sigma>0$ найдётся $k_0\in\mathbb{N}=k_0(\sigma)$ такой, что при всех $k\geqslant k_0$

$$M_p(\Gamma(f(S(x_0,\varepsilon_{k-1})),f(S(x_0,\varepsilon_0)),f(A)))<\sigma\,.$$

В таком случае, из (2.6) вытекает, что при указанных $k\in\mathbb{N}$

$$\min\{\operatorname{diam}K_f,\operatorname{diam}f(V_k)\}<\sigma. \tag{2.7}$$

Поскольку по условию $\operatorname{diam}K_f\geqslant\delta>0$ для всех f из рассматриваемого семейства отображений, то $\min\{\operatorname{diam}K_f,\operatorname{diam}f(V_k)\}=\operatorname{diam}f(V_k)$ начиная с некоторого номера $k_1\geqslant k_0$, $k_1=k_1(\sigma)$. Тогда из (2.7) вытекает, что

$$\operatorname{diam}f(V_k)<\sigma \tag{2.8}$$

при всех $k\geqslant k_1$. Из включений $V_{k+1}\subset\overline{B(x_0,\varepsilon_k)}\subset V_k$ следует, что неравенство (2.8) выполнено также в шаре $\overline{B(x_0,\varepsilon_k)}$ при $k\geqslant k_1(\sigma)$. Положим $\varepsilon(\sigma):=\varepsilon_{k_1}$. Окончательно, для числа $\sigma>0$ найдётся $\varepsilon(\sigma)>0$ такое, что при $d(x,x_0)<\varepsilon(\sigma)$ выполнено $d'(f(x),f(x_0))<\sigma$, что и означает равностепенную непрерывность семейства отображений $\mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$ в точке x_0. $\square$

Доказательство теоремы 1.1 вытекает из леммы 2.2 и [26, лемма 13.2].

Действительно, согласно [26, лемма 13.2], условие $Q\in FMO(y_0)$ влечёт, что при некотором $\varepsilon_0>0$ и $\varepsilon\to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<d(y,y_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^q(d(y,y_0))\,d\mu(y)=O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\,,$$

где $\psi(t) = \left(t \log \frac{1}{t}\right)^{-\alpha/q} > 0$ и $1 < q \leqslant \alpha$. Как и прежде, определим $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt$, тогда

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt > \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

В таком случае, заключаем, что условия (2.1)–(2.2), фигурирующие в лемме 2.2, выполнены и, значит, из этой леммы вытекает требуемое утверждение. □

3. О непрерывном продолжении гомеоморфизмов в метрическом пространстве

Аналог следующей леммы доказывался В.И. Рязановым и Р.Р. Салимовым в работе [6] для случая, когда границы отображённых областей сильно достижимы, либо являются слабо плоскими (см. также статью [27]). Указанные условия на границы мы заменяем ниже требованием вида (1.6), при этом, здесь присутствуют также некоторые дополнительные ограничения на сами метрические пространства. Приведённое ниже утверждение установлено в [27] (см. также [6]) в частном случае, когда $p = \alpha'$, $q = \alpha$. В случае произвольных p и q наличие упомянутой связи, насколько нам известно, не установлено.

Лемма 3.1. *Пусть G – область в метрическом пространстве (X, d, μ) с конечной хаусдорфовой размерностью $\alpha \geqslant 2$, а (X', d', μ') – метрическое пространство, являющееся α'-регулярным по Альфорсу, в котором выполнено $(1; p)$-неравенство Пуанкаре, $p \in (\alpha'-1, \alpha']$. Пусть также область G локально линейно связна в точках границы, а область $G' \subset B_R$ является QED-областью относительно p-модуля, где B_R – некоторый шар в X', такой что $\overline{B_R}$ – компакт в X'.*

Предположим также, что найдётся $\varepsilon_0 > 0$ и некоторая положительная измеримая функция $\psi(t)$, $\psi : (0, \varepsilon_0) \to (0, \infty)$, такая что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \tag{3.1}$$

и при $\varepsilon \to 0$ и некотором $q \in (1, \alpha]$

$$\int\limits_{A(b,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x) \cdot \psi^q(d(x, b))\, d\mu(x) = o(I^q(\varepsilon, \varepsilon_0))\,, \tag{3.2}$$

где $A := A(b, \varepsilon, \varepsilon_0)$ *определено в* (1.3). *Тогда произвольное кольцевое* Q*-отображение* $f : G \to G'$ *в точке* $b \in \partial G$ *относительно* p *и* q*-модулей, такое, что* $f(G) = G'$, *имеет непрерывное продолжение в точку* b.

Доказательство. Поскольку $G' \subset B_R$ и $\overline{B_R}$ – компакт в X', предельное множество $C(f, b)$ не пусто.

Предположим противное, а именно, что отображение f не имеет непрерывного продолжения в точку b. Тогда найдутся, по крайней мере, две последовательности $x_i,\ x_i' \in G,\ i = 1, 2, \ldots$, такие, что $x_i \to b$, $x_i' \to b$ при $i \to \infty$, $f(x_i) \to y$, $f(x_i') \to y'$ при $i \to \infty$ и $y' \neq y$. Отметим, что y и $y' \in \partial D'$, так как f – гомеоморфизм (см. [26, предложение 13.5]). Заметим, что в этом случае найдётся $\delta > 0$ такое, что $d'(f(x_i), f(x_i')) \geqslant \delta > 0$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Соединим точки x_i и x_i' кривой C_i, целиком лежащей в $B(b, 2^{-i})$, что возможно ввиду локальной связности области G в точке b. Пусть $C_i' = f(C_i)$, тогда $\operatorname{diam} C_i' \geqslant \delta > 0$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $G \setminus \overline{B(b, \varepsilon_0)} \neq \varnothing$. Выберем произвольную точку $z_0 \in G \setminus \overline{B(b, \varepsilon_0)}$ и соединим её с точкой b локально спрямляемой кривой, лежащей в G (что возможно ввиду [26, предложение 13.2]). Тогда у этой кривой существует подкривая, лежащая в $G \setminus \overline{B(b, \varepsilon_0)}$ ввиду [26, предложение 13.3] (см. по этому поводу также [23, теорема 1.I.46]). Эту подкривую обозначим через K и заметим, что она представляет собой некоторый фиксированный континуум в $G \setminus \overline{B(b, \varepsilon_0)}$; тогда при больших $i \in \mathbb{N}$ имеем: $K \subset G \setminus \overline{B(b, 2^{-i})}$.

Тогда, с одной стороны, поскольку G' является QED-областью относительно p-модуля, то для некоторой постоянной $A \geqslant 1$

$$M_p(\Gamma(C_i', f(K), G')) \geqslant \frac{1}{A} \cdot M_p(\Gamma(C_i', f(K), X')\,). \tag{3.3}$$

Поскольку X' является α'-регулярным по Альфорсу и, кроме того, в X' выполнено $(1; p)$-неравенство Пуанкаре, ввиду предложения 2.1

$$M_p(\Gamma(C_i', f(K), X') \geqslant \frac{1}{C} \cdot \frac{\min\{\operatorname{diam} f(K), \operatorname{diam} C_i'\}}{R^{1+p-\alpha'}} \geqslant \delta_1 > 0\,, \tag{3.4}$$

где δ_1 не зависит от i. Из (3.3) и (3.4) вытекает, что

$$M_p(\Gamma(C_i', f(K), G')) \geqslant \delta_2 > 0\,, \tag{3.5}$$

где δ_2 не зависит от i.

С другой стороны, рассмотрим семейство кривых Γ_i, соединяющих K и C_i. Рассмотрим функцию

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-i}, \varepsilon_0), & t \in (2^{-i}, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-i}, \varepsilon_0)\,, \end{cases}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt$, удовлетворяет условию нормировки вида (1.5) при $r_1 := 2^{-i}$, $r_2 := \varepsilon_0$. В силу определения кольцевого Q-отображения $f : G \to G'$ в точке $b \in \partial G$ относительно p и q-модулей, а также соотношений (3.1)–(3.2), будем иметь:

$$M_p\left(f\left(\Gamma_i\right)\right) = M_p(\Gamma(C_i', f(K), G')) \leqslant \Delta(i)\,, \tag{3.6}$$

где $\Delta(i) \to 0$ при $i \to \infty$. Однако, (3.6) противоречит (3.5), что и доказывает утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 1.2 вытекает из леммы 3.1 на основании рассуждений, аналогичных рассуждениям, сделанных при доказательстве теоремы 1.1. □

4. О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов в замыкании области

Обозначим через $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$ семейство, состоящее из всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f\colon G \to G'$ в каждой точке $x_0 \in \overline{G}$ относительно p и q-модулей, таких, что $f(a_0) = a_1 \neq b_1 = f(b_0)$, $f(G) = G'$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть G – область в локально связном и сепарабельном метрическом пространстве (X, d, μ) с конечной хаусдорфовой размерностью $\alpha \geqslant 2$, локально линейно связная в каждой точке своей границы, а (X', d', μ') – метрическое пространство, α'-регулярное по Альфорсу, в котором выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре, $p \in (\alpha' - 1, \alpha']$. Предположим, область $G' \subset B_R$ является QED-областью относительно p-модуля, B_R – некоторый фиксированный шар в X', $\overline{B_R}$ – компакт в X', причём найдётся невырожденный континуум $K \subset B_R \setminus G'$.*

Предположим, для каждой точки $x_0 \in \overline{G}$, некоторого числа $\varepsilon_0' \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0)$, и семейства $\{\psi_\varepsilon(t)\}$ измеримых по Лебегу функций $\psi_\varepsilon\colon (\varepsilon, \varepsilon_0) \to (0, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, выполнено условие (2.1), где некоторая заданная функция $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$ удовлетворяет условию

$$F(\varepsilon, \varepsilon_0) = o(I^q(\varepsilon, \varepsilon_0))\,, q \in (1, \alpha]\,,$$

а $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определяется соотношением (2.2).

Тогда каждое отображение семейства $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$ продолжается по непрерывности на ∂G, при этом, семейство отображений $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(\overline{G}, \overline{G'})$, состоящее из всех продолженных таким образом отображений $f : \overline{G} \to \overline{G'}$ является равностепенно непрерывным в каждой точке $x_0 \in \overline{G}$.

Доказательство. Заметим, что G – локально компактно. Действительно, так как $\overline{G'} \subset B_R$ и $\overline{B_R}$ – компакт в X', то $\overline{G'}$ также компакт как замкнутое подмножество компактного пространства $\overline{B_R}$. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ шары $\overline{B(y_0, \varepsilon)}$ компактны при $y_0 \in \overline{G'}$. С другой стороны, поскольку $f(G) = G'$ при произвольном $f \in \mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$, то какова бы ни была точка $x_0 \in G$, для точки $y_0 = f(x_0)$ множество $f^{-1}(\overline{B(y_0, \varepsilon)})$ компактно как непрерывный образ компакта и, одновременно, является окрестностью точки x_0.

Кроме того, заметим, что G' имеет хаусдорфову размерность α', что вытекает из α'-регулярности по Альфорсу пространства X' (см. рассуждения на с. 61 в [19]).

В таком случае, равностепенная непрерывность семейства продолженных отображений $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(\overline{G}, \overline{G'})$ во внутренних точках области G является утверждением леммы 2.2, а возможность непрерывного на границу по непрерывности – леммы 3.1. Осталось доказать равностепенную непрерывность семейства $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(\overline{G}, \overline{G'})$ в точках ∂G.

Предположим противное, тогда найдётся $x_0 \in \partial G$ и число $a > 0$ такое, что для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существуют точка $x_m \in \overline{G}$ и элемент f_m семейства $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(\overline{G}, \overline{G'})$ такие, что $d(x_0, x_m) < 1/m$ и

$$d'\left(f_m(x_m), f_m(x_0)\right) \geqslant a\,. \tag{4.1}$$

Ввиду возможности непрерывного продолжения каждого f_m на границу G, мы можем считать, что $x_m \in G$.

В силу локальной линейной связности области G в точке x_0 найдётся последовательность окрестностей V_m точки x_0 с $\operatorname{diam} V_m \to 0$ при $m \to \infty$, такие что множества $G \cap V_m$ являются областями и $x_m \in G \cap V_m$. Т.к. граничные точки области, локально связной на границе являются достижимыми из G некоторым локально спрямляемым путём, см. [26, предложение 13.2], мы можем соединить точки x_m и x_0 кривой $\gamma_m(t) : [0, 1] \to G$ такой, что $\gamma_m(0) = x_0$, $\gamma_m(1) = x_m$ и $\gamma_m(t) \in V_m$ при $t \in (0, 1)$. Можно считать, что $|\gamma_m| \subset B(x_0, 1/m)$. Обозначим через C_m образ кривой $\gamma_m(t)$ при отображении f_m. Из соотношения (4.1) вытекает, что

$$\operatorname{diam} C_m \geqslant a \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}\,. \tag{4.2}$$

Соединим точки a_0 и $b_0 \in G$ из условия леммы кривой $\beta : [0, 1] \to G$, лежащей в G, такой что $\beta(0) = a_0$ и $\beta(1) = b_0$. Можно считать, что $\operatorname{dist}(|\beta|, \partial G) > \varepsilon_0(x_0)$, где $\varepsilon_0(x_0)$ – из условия леммы, а, как обычно, $|\beta| = \{x \in G : \exists\, t \in [0, 1] : \beta(t) = x\}$ – носитель кривой β. Поскольку семейство $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(\overline{G}, \overline{G'})$ является равностепенно непрерывным в G, $\overline{B_R}$ – компакт, а G – сепарабельно, $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(\overline{G},\overline{G'})$ является нормальным ввиду критерия Арцела–Асколи (см. [20, пункт 20.4]). В таком случае, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что найдётся непрерывное отображение $f: G\rightarrow B_R$, такое что $\sup\limits_{x\in|\beta|} d^{\,\prime}(f_m(x), f(x))\rightarrow 0$ при $m\rightarrow\infty$. Тогда $f(|\beta|)$ – компакт в $X^{\,\prime}$ как образ компакта $|\beta|\subset G$ при непрерывном отображении f.

Возможны две ситуации: 1) $f(|\beta|)\subset G^{\,\prime}$, тогда полагаем $B:=f(|\beta|)$; 2) $f(|\beta|)\cap\partial G^{\,\prime}\ne\varnothing$. В этом случае полагаем $t_0:=\{\sup\limits_{t\in[0,1]} t: f(\beta(r))\in G^{\,\prime}$ при всех $r\in[0,t]\}$. Возьмём теперь произвольное $s_0<t_0$ и положим $B:=f(|\beta_{[0,s_0]}|)$. Очевидно, в обеих из двух ситуаций B – невырожденный континуум в $G^{\,\prime}$, при этом, существует компакт $C=|\beta_{[0,s_0]}|$, $0<s_0\leqslant 1$, такой что $f(C)=B$. Тогда ввиду локально равномерной сходимости f_m к f найдётся $k_0\in\mathbb{N}$ такой, что

$$\operatorname{diam}(f_m(C))>\frac{\operatorname{diam}(f(C))}{2}:=\delta_0>0\quad\forall\, m\geqslant k_0\,. \tag{4.3}$$

Рассмотрим теперь семейство кривых $\Gamma_m=\Gamma(f_m(C), C_m, G^{\,\prime})$. Поскольку по условию $G^{\,\prime}$ является QED-областью, а пространство $X^{\,\prime}$ является $\alpha^{\,\prime}$-регулярным по Альфорсу, в котором выполнено $(1;p)$-неравенство Пуанкаре, то ввиду предложения 2.1, (4.2) и (4.3), будем иметь:

$$M_p(\Gamma_m)\geqslant\frac{1}{A}\cdot M_p(\Gamma(f_m(C), C_m, X^{\,\prime})) \tag{4.4}$$

$$\geqslant\frac{1}{AC}\cdot\frac{\min\{\operatorname{diam} f_m(C),\operatorname{diam} C_m\}}{R^{1+p-\alpha^{\,\prime}}}\geqslant M_1>0\,,$$

где M_1 – некоторая постоянная, которая не зависит от $m\in\mathbb{N}$. С другой стороны, так как f_m – гомеоморфизм, то $\Gamma_m=\Gamma(f_m(C), C_m, G^{\,\prime})$ $=f_m(\Gamma(C,|\gamma_m|,G)$, причём $C\subset G\setminus\overline{B(x_0,\varepsilon_0)}$, а $|\gamma_m|\subset B(x_0,1/m)$. Тогда по определению кольцевого Q-гомеоморфизма в точке x_0 относительно p и q-модулей

$$M_p(\Gamma_m)=M_p(\Gamma(f_m(C), C_m, G^{\,\prime}))=M_p(f_m(\Gamma(C),|\gamma_m|,G))$$

$$\leqslant\int\limits_{A(x_0,\frac{1}{m},\varepsilon_0)} Q(x)\cdot\eta^q(d(x,x_0))d\mu(x) \tag{4.5}$$

для каждой измеримой функции $\eta:(\frac{1}{m},\varepsilon_0)\rightarrow[0,\infty]$, такой что $\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\varepsilon_0}\eta(r)dr\geqslant 1$. Заметим, что функция

$$\eta(t)=\begin{cases}\psi(t)/I(1/m,\varepsilon_0), & t\in(1/m,\varepsilon_0),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(1/m,\varepsilon_0)\,,\end{cases}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt$, удовлетворяет условию нормировки вида (1.5) при $r_1 := 1/m$, $r_2 := \varepsilon_0$, поэтому из условий (4.5) и (2.1) вытекает, что

$$M_p(\Gamma_m) \leqslant \alpha(1/m) \to 0 \tag{4.6}$$

при $m \to \infty$, где $\alpha(\varepsilon)$ – некоторая неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при $\varepsilon \to 0$, которая существует ввиду условия (2.1). Однако, соотношение (4.6) противоречит (4.4). Полученное противоречие указывает на то, что исходное предположение (4.1) было неверным, и, значит, семейство отображений $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(\overline{G}, \overline{G'})$ равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in \partial G$. $\square$

Доказательство теоремы 1.3 вытекает из леммы 4.1 на основании рассуждений, аналогичных рассуждениям, сделанных при доказательстве теоремы 1.1. $\square$

5. Заключительные замечания

Большая часть условий, присутствующих в основных результатах статьи, по-видимому, являются только достаточными. Тем не менее, опишем некоторые требования, которые можно обозначить, как "близкие к необходимым".

Прежде всего, в теоремах 1.1, 1.2 и 1.3 нельзя, вообще говоря, отказаться от условия $Q \in FMO$, заменив его более слабым требованием $Q \in L^p$, каким бы большим ни было число $p \geqslant 1$. Для простоты рассмотрим $X = X' = \mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой метрикой и Лебеговой мерой. Пусть, кроме того, $q = p = n$. В этом случае отображение, удовлетворяющее оценке (1.7) будем называть просто "кольцевым Q-гомеоморфизмом". Ниже приведён результат, относящийся к равностепенной непрерывности (по поводу устранения особенности см., напр., [26, предложение 6.3]).

Положим $D := \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, $D' := B(0, 2) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathfrak{A}_Q$ семейство всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $g : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ в точке 0. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Для каждого $p \geqslant 1$ найдётся функция $Q : \mathbb{B}^n \to [1, \infty]$, $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$ и последовательность $g_m \in \mathfrak{A}_Q$ такая, что каждый элемент g_m имеет непрерывное продолжение в точку $x_0 = 0$, при этом, семейство $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в точке $x_0 = 0$.*

Доказательство теоремы 5.1 может быть найдено в [16, теорема 8]. □

В условиях теоремы 1.3, даже в случае $Q(x) \equiv 1$, от условия фиксации, по крайней мере, одной внутренней точки области D каждым гомеоморфизмом f соответствующего семейства отображений, отказаться нельзя. Сказанное выше показывает следующий пример семейства конформных ($Q(x) \equiv 1$) отображений на плоскости: $f_t(z) = \frac{z-t}{1-tz}$, которое при каждом фиксированном $t \in (-1, 1)$ переводит область $D = \mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}$ на $D' = \mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}$, см., напр., [28, соотношение (12), гл. V, § 1]. При этом, при каждом фиксированном $z \in \mathbb{B}^2$, $f_t(z) \to -1$ при $t \to 1$, в то же время, $f_t(1) = 1$ при всех $t \in (-1, 1)$, откуда следует, что семейство $f_t(z)$ не является равностепенно непрерывным в точке $z_0 = 1$. Относительно необходимости фиксации двух и более точек области мы ничего не можем сказать – это условие может относиться к методу доказательства и, таким образом, не быть необходимым.

Настоящая статья опубликована в виде электронного препринта, см. [29].

Литература

[1] Andreian Cazacu C., *On the length-area dilatation* // Complex Var. Theory Appl., **50** (2005), No. 7–11, 765–776.

[2] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, *On conformal dilatation in space* // Intern. Journ. Math. and Math. Scie., **22** (2003), 1397–1420.

[3] M. Cristea, *Local homeomorphisms having local ACL^n inverses* // Compl. Var. and Ellipt. Equat., **53** (2008), No. 1, 77–99.

[4] V. Ya. Gutlyanskiĭ, A. Gol'berg, *On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space* // J. d' Anal. Math., **109** (2009), 233–251.

[5] V. Ya. Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, E. Yakubov, *The Beltrami equations and prime ends* // Ukr. Mat. Visn., **12** (2015), No. 1, 27–66; transl. in Journal of Mathematical Sciences, **210** (2015), No. 1, 2–51.

[6] В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Слабо плоские пространства и границы в теории отображений* // Укр. матем. вестник, **4** (2007), No. 2, 199–234.

[7] Р. Р. Салимов, *О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля* // Дальневост. матем. журн., **14** (2014), No. 2, 257–269.

[8] Р. Р. Салимов, *О липшицевости одного класса отображений* // Мат. заметки, **94** (2013), No. 4, 591–599.

[9] A. L. Golberg, R. R. Salimov, E. A. Sevost'yanov, *Normal Families of Discrete Open Mappings with Controlled p-Module* // Contemporary Mathematics, **667** (2016), 83–103.

[10] A. L. Golberg, R. R. Salimov, E. A. Sevost'yanov, *Singularities of discrete open mappings with controlled p-module* // J. Anal. Math, **127** (2015), 303–328.

[11] V. Ryazanov, E. Sevost'yanov, *Toward the theory of ring Q-homeomorphisms* // Israel J. Math., **168** (2008), 101–118.

[12] Е. А. Севостьянов, *Теория модулей, ёмкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление* // Укр. матем. вестник, **28** (2007), No. 6, 582–604.

[13] R. Näkkia, B. Palka, *Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings* // Proc. Amer. Math. Soc., **37** (1973), No. 2, 427–433.

[14] R. Näkki, *Prime ends and quasiconformal mappings* // J. Anal. Math, **35** (1979), 13–40.

[15] E. A. Sevost'yanov, *Equicontinuity of homeomorphisms with unbounded characteristic* // Siberian Advances in Mathematics, **23** (2013), No. 2, 106–122.

[16] Е. А. Севостьянов, *О локальном и граничном поведении отображений в метрических пространствах* // Алгебра и анализ, **28** (2016), No. 6, 118–146.

[17] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории классов Орлича-Соболева* // Алгебра и анализ, **25** (2013), No. 6, 50–102.

[18] Е. А. Севостьянов, *Обобщение одной леммы Е.А. Полецкого на классы пространственных отображений* // Укр. матем. ж., **61** (2009), No. 7, 969–975.

[19] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on metric spaces*, New York, Springer Science+Business Media, 2001.

[20] J. Väisälä., *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math. **229**, Berlin etc., Springer–Verlag, 1971.

[21] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion* // Acta Math., **98** (1957), 171–219.

[22] С. Сакс, *Теория интеграла*, М., ИЛ, 1949.

[23] К. Куратовский, *Топология*, Т. 2, М., Мир, 1969.

[24] F. W. Gehring, O. Martio, *Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings* // J. d'Anal. Math., **24** (1985), 181–206.

[25] T. Adamowicz, N. Shanmugalingam, *Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **35** (2010), 609–626.

[26] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.

[27] Е. С. Смоловая, *Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах* // Укр. мат. журн., **62** (2012), No. 5, 682–689.

[28] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Москва, Наука, 1968.

[29] E.A. Sevost'yanov, *On equicontinuity of homeomorphisms in a closure of a domain in metric space* // www. arxiv. org, arXiv:1502.07932, 16 p.

Сведения об авторах

Евгений Александрович Севостьянов

Житомирский государственный университет имени Ивана Франко, Житомир, Украина

E-Mail: esevostyanov2009@gmail.com