Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 4, 456 – 471

Разделяющее преобразование и экстремальные задачи о неналегающих односвязных областях

Александр К. Бахтин

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В данной работе изучается известная проблема о максимуме функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

где $B_0, \ldots, B_n$ попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ различные точки окружности, $\gamma \in (0, n]$, $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки a. В случае односвязных областей и $n = 2, 3, 4$ получено решение этой проблемы для максимального на данный момент интервала значений параметра γ.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Внутренний радиус области, непересекающиеся области, лучевые системы точек, управляющий функционал, разделяющее преобразование, квадратичный дифференциал, функция Грина.

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — одноточечная компактификация комплексной плоскости или сфера Римана, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{R}^{+} = (0, \infty)$. Величина $r(B, a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами являются важным направлением геометрической теории функций см. [1–23].

В данной работе изучается одна известная задача такого рода [1]:

Задача 1. При любом фиксированном значении $\gamma \in (0, n]$ найти максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 29.11.2017

ISSN 1810 – 3200. © Інститут прикладної математики і механіки НАН України

где B_0, B_1, B_2,...,B_n, $n \geqslant 2$, — произвольная система взаимно непересекающихся областей, точки $|a_k| = 1$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, и описать все экстремали.

Задача 1 в качестве открытой проблемы была поставлена в работе [1]. В настоящее время эта проблема не решена, но в некоторых частных случаях ее решение удалось получить. В данной работе эта проблема изучается при $n = 2, 3, 4$ для случая односвязных областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ на основе метода разделяющего преобразования. Но предварительно мы докажем один вспомагательный результат.

Система точек $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$, называется n-лучевой системой точек, если $|a_k| \in \mathbb{R}^{+}$, $k = \overline{1, n}$, и $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$.

Пусть $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$.

Следующее утверждение обобщает один результат из [5].

Лемма 1. *Пусть $n \geqslant 2$, $n > \gamma > 0, \Delta > 0$ и $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$ — n-лучевая система точек такая, что $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leq 1$. Тогда для любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$ такого, что $r^{\gamma}(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \geq \Delta$ справедливо неравенство*

$$r(B_0, 0) \leq n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} \cdot \Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}}. \tag{2}$$

Лемма 1 обобщает аналогичный результат из работы [5] на случай n-лучевых систем точек.

Доказательство. Пусть $d(E)$ — трансфинитный диаметр компактного множества $E \subset \mathbb{C}$. Тогда справедливо соотношение

$$r(B_0, 0) = r\left(B_0^{+}, \infty\right) = \frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^{+})} \leq \frac{1}{d(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^{+})}, \tag{3}$$

где $B^{+} = \{z; \frac{1}{z} \in B\}$. В силу известной теоремы Пойа [13, с. 292], справедливо неравенство $mE \leq \pi d^2(E)$, где mE обозначает лебегову меру компактного множества E. Отсюда немедленно получаем, что $d(E) \geq \left(\frac{1}{\pi} mE\right)^{\frac{1}{2}}$. Тогда из (3) следует, что

$$r(B_0, 0) \leq \frac{1}{d(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^{+})} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi} m(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^{+})}} = \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} m\overline{B}_k^{+}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Для ограниченной односвязной области B, $a \in B$ рассмотрим класс всех регулярных функций $\varphi(z)$, $\varphi(a)=0$, $\varphi'(a)=1$, заданных в области B и площадь образа области B при отображении произвольной функцией $\varphi(z)$. Из теоремы о минимизации площади [13, с. 34], следует, что

$$\iint\limits_{B} |\varphi'(z)|^2 dxdy \geq \pi r^2\left(B,a\right), \tag{5}$$

где $r\left(B,a\right)$ — конформный радиус области B относительно точки a.

Полагая $\varphi_1(z)=(z-a)$ из (5) следует, что

$$S(B)=m(B)\geq \pi r^2\left(B,a\right). \tag{6}$$

Из неравенства (4) непосредственно вытекает, что

$$r\left(B_0,0\right) \leq \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} m\overline{B}_k^{+}\right]^{-\frac{1}{2}} \leq \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} mB_k^{+}\right]^{-\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{k=1}^{n} r^2\left(B_k^{+},a_k^{+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует неравенство

$$r\left(B_0,0\right) \leq \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} r^2\left(B_k^{+},a_k^{+}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

С учетом соотношения $r\left(B_k^{+},a_k^{+}\right)=\frac{r(B_k,a_k)}{|a_k|^2}$ приходим к неравенству

$$r\left(B_0,0\right) \leq \left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2(B_k,a_k)}{|a_k|^4}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Отсюда и из предположения леммы 1 вытекает соотношение

$$\Delta \leq r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leq \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2(B_k,a_k)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Тогда не трудно получить следующее неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \geq \Delta\cdot\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}. \tag{8}$$

Из неравенства Коши автоматически получаем соотношение

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\geq\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Отсюда, используя неравенство $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\leq 1$, нетрудно получить, что

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}\geq\left[n\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{\gamma}{2}}\geq n^{\frac{\gamma}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\right]^{\frac{\gamma}{n}}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) непосредственно следует, что

$$\begin{aligned}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}} &\geq n^{\frac{\gamma}{2}}\left[\Delta\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}\right]^{\frac{\gamma}{n}}\\ &= n^{\frac{\gamma}{2}}\Delta^{\frac{\gamma}{n}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma^2}{2n}}.\end{aligned}$$

Далее получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\geq n\Delta^{\frac{2}{n}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{n}}.$$

И наконец получаем, что

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{n-\gamma}{n}}\geq n\Delta^{\frac{2}{n}}.$$

Тогда

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{2}}\geq\left(n\Delta^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{n}{2(n-\gamma)}}=n^{\frac{n}{2(n-\gamma)}}\Delta^{\frac{1}{n-\gamma}}.$$

Отсюда и из соотношения (7) следует искомое неравенство

$$r\left(B_0,0\right)\leq n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}}\cdot\Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}}.$$

□

Теперь рассмотрим приложения леммы 1 к исследованию задачи 1 при $n = 2, 3, 4$.

Теорема 1. *Пусть* $n \in \{2, 3, 4\}$, $\gamma_2 = 1,66$, $\gamma_3 = 2,1$, $\gamma_4 = 2,5$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$. *Тогда для произвольной системы различных точек единичной окружности* $\{a_k\}_{k=1}^n$ *и любых взаимно непересекающихся односвязных областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$ *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k), \qquad (10)$$

где Λ_k, λ_k, $k = \overline{0,n}$, $\lambda_0 = 0$ — *круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2. \qquad (11)$$

Доказательство. В силу работы [5, с. 26] теорему 1 при $n = 2$ необходимо доказать только при $1,6 \leq \gamma \leq 1,66$.

При $n = 2$ и $\gamma_2 = 1,66$ используя величину значения экстремального функционала [4, с. 256], имеем

$$\Delta = I_2^0(1,66) = \frac{4\gamma^{\frac{\gamma}{2}}}{(1-\frac{\gamma}{4})^{2+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \Bigg|_{\gamma=1,66} \approx 0,53773.$$

Из леммы 1 получаем

$$r(B_0, 0) \leq 2^{-\frac{1}{0,34}} (0,53773)^{-\frac{1}{0,34}} = 0,807375,$$

$$r^{0,66}(B_0, 0) = 0,868299.$$

Предполагая $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{1,66}}$ ($\alpha_0 = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \alpha_k$) с учетом известного неравенства Голузина [13, с. 165], получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} I_2(1,66) &\leq r^{1,66}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{2} r(B_k, a_k) \\ &= r^{0,66}(B_0, 0)\, (r(B_0, 0)\, r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2)) \\ &\leq 0,862204 \cdot \frac{128}{81\sqrt{3}} sin\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{1,66}}) = 0,50427, \end{aligned}$$

$$I_2^0(1,66) = 0,53773.$$

Таким образом для $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{1{,}66}}$ и $\gamma_2 = 1,66$

$$I_2(1,66) \leq I_2^0(1,66) = 0,53773.$$

После того как установлено неравенство $I_2(1,66) < I_2^0(1,66)$ при $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{1{,}66}}$ необходимо также показать, что $I_2(\gamma) < I_2^0(\gamma)$ при $\gamma \in [1,6; 1,66)$ и $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

В дальнейшем существенно используется свойство монотонного убывания функции

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}$$

при каждом $n \geq 2$ на промежутке $1 \leq \gamma \leq n$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{1}{n} \ln \frac{4\gamma}{n^2 - \gamma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right).$$

Покажем, что при $1 \leq \gamma \leq n$, $\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma < 0$.

Обозначим $\frac{\sqrt{\gamma}}{n} = x$, тогда $\frac{\gamma}{n^2} = x^2$, $\gamma = n^2x^2$, $\sqrt{\gamma} = nx$ и $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Воспользовавшись известными формулами

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - ... - \frac{x^n}{n} - ...$$

$$\ln\frac{1-x}{1+x} = -2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + ... + \frac{1}{2k+1}x^{2k} + ...\right)$$

получим, что

$$\left[\ln I_n^0(\gamma)\right]'_\gamma = \frac{1}{n} \ln \frac{4x^2}{1-x^2} + \frac{1}{nx} \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$= \frac{1}{n} \ln 4 + \frac{1}{n} \ln x^2 - \frac{1}{n} \ln(1-x^2) + \frac{1}{nx} \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$= \frac{2}{n} \ln 2 + \frac{2}{n} \ln x + \frac{1}{n} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}\right) - \frac{2}{n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2m+1}\right)$$

$$\leq -\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\ln 2+\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{3}\right)x^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)x^4$$

$$+...+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{2k+1}\right)x^{2k}+...$$

$$=\frac{2}{n}\left(-1+\ln 2-\frac{1}{2}\ln n\right)+\frac{1}{n}\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{n}\frac{1}{10}x^4+...+\frac{1}{n}\frac{1}{k(2k+1)}x^{2k}+...$$

$$\leq \frac{2}{n}\left[(-1+0,693-\frac{1}{2}\ln n)+\frac{1}{6}\frac{x^2}{1-x^2}\right]\leq -\frac{2}{n}(0,653)<0.$$

Следовательно $\left(\ln I_n^0(\gamma)\right)'_\gamma<0$, $n\geq 2$, $1\leq\gamma\leq n$.

Таким образом $I_n^0(\gamma)$ монотонно убывает по γ при всех $n\geq 2$ на промежутке $1\leq\gamma\leq n$.

В силу убывания $I_2^0(\gamma)$ на $1\leq\gamma\leq 2$ для $\gamma\in[1,65;1,66)$ справедливы неравенства

$$I_2^0(\gamma)>I_2^0(1,66),$$

$$\left[2I_2^0(\gamma)\right]^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}>\left[2I_2^0(1,66)\right]^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}>\left[2I_2^0(1,66)\right]^{\frac{0,63}{0,37}},$$

так как функция $\frac{\gamma-1}{2-\gamma}$ возрастает на $[1,2]$, а величина $\left(2I_2^0(1,66)\right)>1$.

Тогда для $\alpha_0\geq\frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ $(\alpha_0=\max[\alpha_1,\alpha_2])$.

$$I_2^0(\gamma)\leq\left[2I_2^0(\gamma)\right]^{-\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}\frac{128}{81\sqrt{3}}\sin\pi(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}})$$

$$\leq\left[2I_2^0(1,66)\right]^{-\frac{0,63}{0,37}}\frac{128}{81\sqrt{3}}\sin\pi(1-\frac{1}{\sqrt{1,66}})$$

$$=0,522141<0,53773\approx I_2^0(1,66)\leq I_2^0(\gamma).$$

Далее, учитывая, что $I_2^0(1,63)\approx 0,548904$, аналогично получаем для промежутка $1,60\leq\gamma\leq 1,63$ и $\alpha\geq\frac{2}{\sqrt{\gamma}}$

$$I_2^0(\gamma)\leq\left[2I_2^0(\gamma)\right]^{-\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}\frac{128}{81\sqrt{3}}\sin\pi(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}})$$

$$\leq\left[2I_2^0(1,65)\right]^{-\frac{0,6}{0,4}}\frac{128}{81\sqrt{3}}\sin\pi(1-\frac{1}{\sqrt{1,63}})$$

$$= 0,499309 < 0,548904 = I_2^0(1,63) \leq I_2^0(\gamma).$$

Таким образом при $1,60 \leq \gamma \leq 1,66$ и $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ экстремальных конфигураций не существует. Остается исследовать случай $0 < \alpha_0 < \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Аналогично работам [4,5] применяя разделяющее преобразование к оценке функционала $I_n(\gamma)$ получаем

$$I_n(\gamma) \leq \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2 \gamma}(D_k^{(0)}, 0) r(D_k^{(1)}, -i) r(D_k^{(2)}, i)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $D_k^{(0)}$ — область полученная в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{\Gamma}_k)$ содержащей точку $\zeta = 0$ со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. $D_k^{(1)}$ — область полученная в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \bigcap \overline{\Gamma}_k)$ содержащей точку $\pi_k(a_k)$ со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. $D_k^{(2)}$ — область полученная в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{\Gamma}_k)$ содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$ со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, где $\pi_k(w)$ есть та однозначная ветвь многозначной аналитической функции $\zeta = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $\theta_k = \arg a_k$, $\alpha_k = \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, которая реализует однолистное отображение области $\Gamma_k =: \{w : \arg \alpha_k < \arg w < \arg \alpha_{k+1}\}$ на правую полуплоскость $Re\zeta > 0$, $k = \overline{1,n}$.

В работе [8] полностью исследована задача о максимуме функционала

$$r^{\sigma}(B_k^{(0)}, 0) r(B_k^{(1)}, -i) r\left(B_k^{(2)}, i\right)$$

на тройках попарно непересекающихся областей B_0, B_1, B_2, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $a_k = (-1)^k i$, $k = 1, 2$ и получено следующее точное неравенство

$$r^{\sigma}(B_k^{(0)}, 0) r(B_k^{(1)}, -i) r(B_k^{(2)}, i)$$
$$\leq P(\sigma) := 2^{\sigma^2+6} \sigma^{\sigma^2} (2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} (2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2}, \qquad \sigma \in (0, 2],$$

где знак равенства достигается, когда области B_0, B_1, B_2 являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\sigma^2)w^2 - \sigma^2}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2.$$

На основании выше приведенных рассуждений и аналогично работам [4, 5] получаем неравенство

$$I_n(\gamma) \leq \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^n \left[\prod_{k=1}^{n} P(\alpha_k\sqrt{\gamma})\right]^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

и необходимое условие экстремума правой части неравенства (12) в следующем виде

$$\frac{P'(\alpha_k^0\sqrt{\gamma})}{P(\alpha_k^0\sqrt{\gamma})} = \frac{P'(\alpha_p^0\sqrt{\gamma})}{P(\alpha_p^0\sqrt{\gamma})}, \qquad \alpha_k^0 < \alpha_p^0 < \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \tag{13}$$

$$\frac{P'(\alpha_k^0\sqrt{\gamma})}{P(\alpha_k^0\sqrt{\gamma})} \leq \frac{P'(2)}{P(2)}, \qquad \alpha_k^0 < \alpha_p^0 = \frac{2}{\sqrt{\gamma}},$$

где $\prod\limits_{k=1}^{n} P(\alpha_k^0\sqrt{\gamma}) = \max\limits_{\sum\alpha_k=2, 0<\alpha_k\leq\frac{2}{\sqrt{\gamma}}} \prod\limits_{k=1}^{n} P(\alpha_k\sqrt{\gamma})$ и $x_k^0 = \alpha_k^0\sqrt{\gamma}$ — экстремальные точки реализующие максимум правой части (12). График функции $t(x) = [\log P(x)]'$ представлен на Рис. 1.

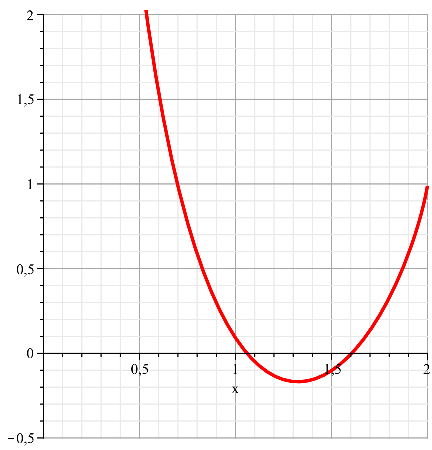

Рис. 1: График функции $t(x)$

Функция $t(x) = [\log P(x)]'$ монотонно убывает на отрезке $(0, y_0)$ и монотонно возрастает на промежутке $(y_0, 2), y_0 \approx 1,32466$. Поэтому уравнение $t = [\log P(x)]'$, $t \in [t(y_0), 1]$ имеет два решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Непосредственные вычисления представлены в виде следующей таблицы

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$
1	1	0,69733	2,0000	
2	0,54	0,814413	1,883985	2,581315
3	0,26	0,915658	1,768098	2,582511
4	0,08	1,006181	1,664642	2,580300
5	-0,03	1,083141	1,578639	2,58482
6	-0,10	1,152867	1,502748	2,585889
7	-0,145	1,223411	1,488081	2,580948
8	-0,165	1,286883	1,362736	2,586147
9	-0,16817	1,32464	1,32466	2,611543

Из анализа таблицы значений функции $t = [\log P(x)]'$ следует, что $\min\limits_{t\in[t(y_o),1]}(x_1(t)+x_2(t)) = \sigma_0 > 2,58.$

Тогда для $1,6 \le \gamma \le 1,66$ экстремальные точки $x_1^0 = \alpha_1^0\sqrt{\gamma}$, $x_2^0 = \alpha_2^0\sqrt{\gamma}$ принадлежат интервалу $(0, y_0]$ так, как

$$2\sqrt{\gamma} = x_1^0 + x_2^0 < 2\sqrt{1,66} < 2,58.$$

Отсюда с учетом необходимого условия экстремума (13) приведенного выше, получаем что

$$x_1^0 = x_2^0 = \frac{2\sqrt{\gamma}}{2} = \sqrt{\gamma}, \quad 1,6 \le \gamma \le 1,66.$$

Подытоживая предыдущие рассуждения получаем из (12) и свойств разделяющего преобразования, следующую цепочку соотношений при всех $\gamma \in [1,6; 1,66]$

$$I_2(\gamma) \le \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^2 \left[\prod_{k=1}^{2} P(\alpha_k\sqrt{\gamma})\right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{\gamma}} P(\sqrt{\gamma})$$

$$= I_2^0(\gamma) = [r(\Lambda_0, 0)]^\gamma \prod_{k=1}^{2} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

где Λ_k и λ_k, $k = \overline{0,2}$, $\lambda_0 = 0$ — круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2.$$

При $n = 2$ теорема доказана.

При $n = 3$ теорему 1 достаточно доказать только для значений γ из промежутка $2 \leq \gamma \leq 2,1$ так, как для $\gamma \in [1;2]$ это доказано в работе [5].

Полагая, как и выше, в лемме 1

$$\Delta = I_3^0(2,1) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{(\frac{4}{9}\gamma)^{\frac{\gamma}{3}}}{(1-\frac{\gamma}{9})^{3+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{3}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{3}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \Bigg|_{\gamma=2,1}.$$

Так как $I_3^0(2,1) \approx 0,284609$, то

$$r(B_0,0) \leq 0,647423, \quad [r(B_0,0)]^{2,1} \leq 0,401324.$$

Аналогично предыдущему при $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2,1}}$, $\alpha_0 = \max\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ используя теорему Голузина [13, с. 165], получаем оценку

$$I_3^0(\gamma) \leq [r(B_0,0)]^{2,1} \frac{64}{81\sqrt{3}} |a_1-a_2||a_1-a_3||a_2-a_3|$$

$$\leq 0,401324 \frac{64}{81\sqrt{3}} \cdot 8 \sin\pi(1-\frac{1}{\sqrt{2,1}}) \sin^2\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{2,1}}) \approx 0,26509.$$

Следовательно $I_3(2,1) < I_3^0(2,1)$ при $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2,1}}$.

Отсюда следует, что $I_3(\gamma) < I_3^0(\gamma)$ при $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Действительно, из монотонности убывания функции $I_3(\gamma)$ следует неравенство $I_3^0(\gamma) > I_3(\gamma)$ при $2,06 \leq \gamma < 2,1$. Тогда легко видеть, что

$$\left[3^{1,5} I_3^0(\gamma)\right]^{-\frac{\gamma}{n-\gamma}} < \left[3^{1,5} I_3^0(2,1)\right]^{-\frac{\gamma}{n-\gamma}} < \left[3^{1,5} I_3^0(2,1)\right]^{-\frac{2,06}{3-2,06}}.$$

Аналогично предыдущему для $2,06 \leq \gamma < 2,1$ и $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2,1}}$ получаем неравенства

$$I_3^0(\gamma) \leq [r(B_0,0)]^{\gamma} \frac{64}{81\sqrt{3}} 8\sin\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\sin^2\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$$

$$\leq \left[3^{1,5} I_3^0(2,1)\right]^{-\frac{2,06}{0,94}} \frac{64}{81\sqrt{3}} 8\sin\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2,1}}\right)\sin^2\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2,1}}\right)$$

$$= [5,196152 \cdot 0,284609]^{-2,191489} 3,649424 \cdot 0,826964 \cdot 0,218873$$

$$= (1,471187)^{-2,191489} \cdot 0,660546 = 0,429099 \cdot 0,660546$$

$$= 0,283403 < 0,284609 = I_3^0(2,1) < I_3^0(\gamma).$$

Для интервала $2 \le \gamma < 2,06$ получаем аналогичные неравенства

$$I_3^0(\gamma) \le [r(B_0,0)]^{\gamma} \frac{64}{81\sqrt{3}} 8\sin\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\sin^2\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$$

$$\le \left[3^{1,5} I_3^0(2,06)\right]^{-\frac{2}{3-2}} \frac{64}{81\sqrt{3}} 8\sin\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2,06}}\right)\sin^2\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2,06}}\right)$$

$$= [1,518747]^{-2} 3,649424 \cdot 0,815007 \cdot 0,210274$$

$$= 0,43354 \cdot 3,649424 \cdot 0,815007 \cdot 0,210274 \le 0,271145$$

$$< I_3^0(2,06) = 0,292283 < I_3^0(\gamma).$$

Таким образом получаем, что на всем промежутке $2 \le \gamma < 2,1$ при условии $\alpha_0 \ge \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ выполняется неравенство $I_3(\gamma) < I_3^0(\gamma)$.

Остается рассмотреть случай когда $0 < \alpha_0 < \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Но в этом случае теорема 1 следует из теоремы 2 работы [16].

В случае $n = 4$ теорему 1 как видно из работы [23] следует доказать только для $2,09 \le \gamma < 2,5$.

В этом случае в качестве Δ в лемме 1 возьмем величину

$$I_4^0(2,5) = \frac{(\frac{\gamma}{4})^{\frac{\gamma}{4}}}{(1-\frac{\gamma}{16})^{4+\frac{\gamma}{4}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{4}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{4}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}\Bigg|_{\gamma=2,5}.$$

Тогда справедливы соотношения

$$I_4(2,5) \approx 0,116258, \quad r(B_0,0) \le [16 I_4^0(2,5)]^{-\frac{1}{1,5}} = 0,661157,$$

$$[r(B_0,0)]^{2,5} \le 0,355436.$$

Тогда также как в теореме 5.2.3 из [4] получим неравенство при условии, что $\alpha_0 \ge \frac{2}{\sqrt{2,5}}$

$$I_4(2,5) \le 0,355436 \cdot 16 \cdot \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{3}\right)^3$$

$$\le 5,686977\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{2}{\sqrt{2,5}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2,5}}\right)^3$$

$$\le 0,105827 < 0,116258 = I_4^0(2,5).$$

Отсюда следует неравенство $I_4(\gamma) < I_4^0(\gamma)$ при $2 \le \gamma \le 2,5$ и $\alpha_0 \ge \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Действительно, в силу монотонного убывания величины $I_4^0(\gamma)$ и возрастания функции $\frac{\gamma}{4-\gamma}$ при $\gamma \in [1,4]$ справедливы следующие неравенства для $2,45 \le \gamma \le 2,5$

$$\left[16I_4^0(\gamma)\right]^{\frac{\gamma}{n-\gamma}} > \left[16I_4^0(2,5)\right]^{\frac{\gamma}{n-\gamma}} > \left[16I_4^0(2,5)\right]^{\frac{2,45}{1,55}}.$$

Тогда легко видеть, что при $2,45 \leq \gamma \leq 2,5$ и $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$

$$I_4(\gamma) \leq \left[16I_4^0(\gamma)\right]^{-\frac{\gamma}{4-\gamma}} 32\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^3$$

$$\leq \left[16I_4^0(2,5)\right]^{-\frac{2,45}{1,55}} \frac{256}{27}\frac{1}{\sqrt{2,5}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2,5}}\right)^3$$

$$\leq 0,11163 < I_4^0(2,5) \leq I_4^0(\gamma).$$

Далее при $2,3 \leq \gamma \leq 2,45$ и $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ аналогично получаем

$$I_4(\gamma) \leq \left[16I_4^0(\gamma)\right]^{-\frac{\gamma}{4-\gamma}} \frac{256}{27}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^3$$

$$\leq \left[16I_4^0(2,45)\right]^{-\frac{2,3}{1,7}} 9,481481\frac{1}{\sqrt{2,45}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2,45}}\right)^3 = 0,11824$$

$$< I_4^0(2,45) \leq I_4^0(\gamma).$$

Осталось изучить промежуток $2 \leq \gamma \leq 2,3$ для которого аналогично получаем

$$I_4(\gamma) \leq \left[16I_4^0(2,3)\right]^{-1} 9,481481\frac{1}{\sqrt{2,3}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2,3}}\right)^3$$

$$= 0,117459 < 0,131466 = I_4^0(2,3) \leq I_4^0(\gamma).$$

Таким образом для всех $\gamma \in [2;2,5]$ при условии $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ справедливо неравенство $I_4(\gamma) \leq I_4^0(\gamma)$.

Следовательно при $2 \leq \gamma \leq 2,5$ и $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ экстремальных конфигураций нет. Остается рассмотреть ситуацию когда $0 < \alpha_0 < \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. В этом случае учитывая 12 и 13 и теорему 2 работы [16] получаем утверждение теоремы 1.

Теорема 1 доказана. □

Рассмотрим другое применение леммы 1 к обобщенной задаче 1.

Задача 2. При фиксированном $\gamma \in [0,n]$ найти максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k), \tag{14}$$

где $A_n := \{a_k\}_{k=1}^n, n \geq 2$ — произвольная n-лучевая система такая, что $M^\gamma(A_n) \leq 1$ и $M^0(A_n) \leq 1$, а $\{B_k\}_{k=0}^n$, произвольная система попарно непересекающихся областей, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$. Где

$$\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})},$$

$$\mathcal{M}^{(0)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) \cdot |a_k|.$$

При $n = 2$ для односвязных областей справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\gamma_2 = 1,2$, $\gamma \in (1;\gamma_2]$. Тогда для произвольной 2-лучевой системы точек $A_2 := \{a_k\}_{k=1}^2$, $M^{(\gamma)}(A_2) \leq 1$, $M^{(0)}(A_2) \leq 1$ и любой системы взаимно непересекающихся односвязных областей $\{B_k\}_{k=0}^2$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, 2$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ справедливо неравенство*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{2} r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^{2} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

где $\{\Lambda_k\}_{k=0}^2$, $\{\lambda_k\}_{k=0}^2, \lambda_0 = 0$ круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2}\, dw^2.$$

Доказательство. Отметим, что здесь нельзя воспользоваться спецификой единичной окружности как в теореме 1.

Аналогично доказательству теоремы 5.2.3 работы [4] и используя лемму 1 получаем цепочку неравенств при $\gamma = 1,2$ и $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$

$$I_2(1,2) = r^{1,2}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{2} r(B_k, a_k)$$

$$\leq \left[2I_2^0(1,2)\right]^{-\frac{1,2}{0,8}} \prod_{k=1}^{2} r(B_k, a_k) \leq 0,67691 \leq 0,761634 = I_2^0(1,2).$$

Покажем теперь, что $I_2(\gamma) < I_2^0(\gamma)$ при $1,1 \leq \gamma \leq 1,2$ и $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Действительно

$$I_2(\gamma) \le \left[2I_2^0(\gamma)\right]^{-\frac{\gamma}{n-\gamma}} 16\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$$
$$\le \left[2I_2^0(2,1)\right]^{-\frac{1,1}{0,9}} 16\frac{1}{\sqrt{1,2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1,2}}\right)$$
$$= 0,760799 < 0,761634 = I_2^0(1,2) \le I_2^0(\gamma).$$

Далее при $1 \le \gamma \le 1,1$ и $\alpha_0 \ge \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ получим неравенства

$$I_2(\gamma) \le \left[2I_2^0(1,1)\right]^{-1} 16\frac{1}{\sqrt{1,1}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1,1}}\right)$$
$$= 0,426907 < 0,8315 = I_2^0(1,1) \le I_2^0(\gamma).$$

Таким образом при $1 \le \gamma \le 1,2$ и $\alpha_0 \ge \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ получаем соотношение $I_2(\gamma) \le I_2^0(\gamma)$ и следует изучить ситуацию $0 < \alpha_0 \le \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Но в этом случае теорема следует из работы [16]. □

В заключение хочу поблагодарить рецензента за очень внимательное прочтение работы и ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению изложения результатов данной работы.

Литература

[1] В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук, **49** (295) (1994), No. 1, 3–76.

[2] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Владивосток, Дальнаука ДВО РАН, 2009.

[3] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

[4] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці ін-ту мат-ки НАН України, 2008.

[5] А. К. Бахтин. *Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей* // Зб. пр. Інституту математики НАН України, **14** (2017), No. 1, 25–33.

[6] Г. П. Бахтина, А. К. Бахтин, *Разделяющее преобразование и задачи о неналегающих областях* // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту мат-ки НАН України, Київ, Ін-т матем. НАН України, **3** (2006), No. 4, 273–281.

[7] В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, **168** (1988), 48–66.

[8] Л. В. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневосточный матем. сборник, **2** (1996), 96–98.

[9] Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы* // Зап. науч. сем. ПОМИ, **276** (2001), 253–275.

[10] Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., Издательство иностр. лит., 1962.

[11] Г. П. Бахтина, *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей* // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа, Киев, Ин-т математики АН УССР (1984), 21–27.

[12] М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, **5** (1934), 159–245.

[13] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М., Наука, 1966.

[14] Г. В. Кузьмина, *Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров* // Зап. науч. сем. ПОМИ, **302** (2003), 52–67.

[15] Е. Г. Емельянов, *К задаче о максимуме произведения степеней кон- формных радиусов неналегающих областей* // Зап. науч. семин. ПОМИ, **286** (2002), 103–114.

[16] A. K. Bakhtin, I. V. Denega, *Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane* // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, **62** (2012), No. 2, 83–92.

[17] I. V. Denega, *Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles* // Annales universitatis Mariae Curie-Skladovska, Lublin-Polonia, **LXVII** (2013), No. 1, 11–22.

[18] A. Bakhtin, I. Dvorak, I. Denega, *Separating transformation and extremal decomposition of the complex plane* // Bulletin de la societe des sciences et des lettres de Lodz, Recherches sur les deformations, **LXVI** (2016), No. 2, 13–20.

[19] G. V. Kuz'mina. *Geometric function theory. Jenkins results. The method of modules of curve families* // Аналитическая теория чисел и теория функций. Зап. научн. сем. ПОМИ, **445** (2016), No. 31, 181–249.

[20] A. Bakhtin, L. Vygivska, I. Denega, *N-Radial Systems of Points and Problems for Non-Overlapping Domains* // Lobachevskii Journal of Mathematics, **38** (2017), No. 2, 229–235.

[21] A. K. Bahtin, Ya. V. Zabolotnii, *Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains* // Ukr. Mat. Visn., **13** (2016), No. 2, 148–156; transl. in Journal of Mathematical Sciences, **221** (2017), No. 5, 623–629.

[22] А. К. Бахтин, *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств* // Доп. НАН України, (2006), No. 10, 7–13.

[23] О. К. Бахтін, І. Я. Дворак, Я. В. Заболотний. *Оцінки добутку внутрішніх радіусів п'яти взаємно неперетинних областей* // Укр. мат. журн., **69** (2017), No. 2, 261–267.

Сведения об авторах

Александр Константинович Бахтин

Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: abahtin@imath.kiev.ua