Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 4, 481 – 495

Предельный профиль решений квазилинейных параболических уравнений с пологим обострением

Евгения А. Евгеньева

(*Представлена И. И. Скрыпником*)

Аннотация. В работе исследуются энергетические (слабые) решения $u(t,x)$ класса уравнений с модельным представителем

$$(|u|^{p-1}u)_t - \Delta_p(u) = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega,\, \Omega \in \mathbb{R}^n,\, n \geqslant 1,\, p > 0$$

с условием обострения энергии:

$$\mathcal{E}(t) := \int_\Omega |u(t,x)|^{p+1}dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1}dxd\tau \to \infty \ \text{ при } t \to T,$$

где Ω — ограниченная гладкая область. В случае пологого обострения, а именно при условии

$$\mathcal{E}(t) \leqslant F_\alpha(t) := \omega_0(T-t)^{-\alpha} \quad \forall\, t < T,\, \omega_0 > 0,\, \alpha > \frac{1}{p+1},$$

получена точная оценка профиля решения $u(t,x)$ в окрестности времени обострения $t = T$.

2010 MSC. 35K59, 35B44, 35K58, 35K65.

Ключевые слова и фразы. Квазилинейные параболические уравнения, обостряющийся режим, энергетическое решение.

1. Введение и формулировка основного результата

Пусть Ω — ограниченная связная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ с C^2–гладкой границей $\partial\Omega$. В цилиндрической области $Q = (0,T) \times \Omega$, $1 \leqslant T < \infty$ рассматриваем поведение при $t \to T$ произвольного энергетического решения $u(t,x)$ задачи

$$(|u|^{p-1}u)_t - \sum_{i=1}^n (a_i(t,x,u,\nabla u))_{x_i} = 0 \qquad \text{в } Q, \quad p = \text{const} > 0, \tag{1.1}$$

Статья поступила в редакцию 21.10.2017

ISSN 1810 – 3200.

$$u(0,x) = u_0 \ \text{ в } \Omega, \quad u_0 \in L_{p+1}(\Omega), \tag{1.2}$$

из класса U_F, который будет определен ниже. Здесь $a_i(t,x,s,\xi)$, $i = 1,2,...,n,$ — непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям коэрцитивности и роста:

$$d_0|\xi|^{p+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,s,\xi)\xi_i; \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \bar{Q}\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n;\ d_0 = \text{const} > 0; \tag{1.3}$$

$$|a_i(t,x,s,\xi)| \leqslant d_1|\xi|^p; \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \bar{Q}\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n; \\ i = 1,...,n;\ d_1 = \text{const} < \infty. \tag{1.4}$$

Определение 1.1. *Функцию $u(t,x) \in C_{loc}([0,T); L_{p+1}(\Omega))$ будем называть слабым (энергетическим) решением задачи* (1.1)–(1.2) *если*

i) $u(t,\cdot) \in L_{p+1,\ loc}([0,T); W^1_{p+1}(\Omega))$;

ii) $(|u(t,\cdot)|^{p-1}u(t,\cdot))_t \in L_{\frac{p+1}{p},\ loc}([0,T); (W^1_{p+1}(\Omega,\partial\Omega))^*)$;

iii) интегральное тождество

$$\int_0^\tau \langle (|u|^{p-1}u)_t, \eta\rangle dx + \int_0^\tau \int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,u,\nabla u)\eta_{x_i} dxdt = 0 \tag{1.5}$$

выполнено для произвольной функции
$\eta(t,\cdot) \in L_{p+1}((0,\tau); W^1_{p+1}(\Omega,\partial\Omega))$ *с любым* $\tau < T$*;*

iv) выполнено начальное условие (1.2).

Здесь $W^1_{p+1}(\Omega,\Gamma)$ — замыкание в норме пространства $W^1_{p+1}(\Omega)$ множества гладких функций f таких, что $f = 0$ на $\Gamma \in \partial\Omega$.

В качестве класса U_F, где F — произвольная неубывающая функция: $F(t) \to \infty$ при $t \to T$, рассматриваем множество энергетических решений $u(t,x)$ задачи (1.1)–(1.2) таких, что:

$$E^{(u)}(t) + h^{(u)}(t) \\ := \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dxd\tau + \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |u(\tau,x)|^{p+1} dx \leqslant F(t) \\ \forall t < T. \tag{1.6}$$

Например, как несложно проверить (см. лемма 6.2.1 в [11]), множество решений задачи (1)–(2), удовлетворяющих условиям Дирихле

$$u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = f(t,x) \to \infty \quad \text{при } t \to T, \tag{1.7}$$

принадлежит множеству U_F с функцией F следующего вида:

$$F(t) := \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |f(\tau,x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x f(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau$$
$$+ \left(\int_0^t \left(\int_\Omega |f(\tau,x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} d\tau \right)^{q+1} \to \infty \quad \text{при } t \to T. \quad (1.8)$$

Многими авторами изучались условия локализации решений задач с обостряющимися граничными данными. А именно, определялись условия на граничный режим, при которых область сингулярности (blow-up set) решения содержалась в области определения Ω. Так, например, задача Дирихле с обостряющимися данными типа (1.7) для уравнения пористой среды

$$u_t = (u^m)_{xx} \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times (0,\infty), \quad m > 1, \quad 0 < T < 1, \quad (1.9)$$

активно изучалась В. А. Галактионовым и А. А. Самарским (1982 [1]), Б. Гилдингом и М. Херреро (1988 [2]), К. Кортазаром и М. Элгуета (1989 [3]). В указанных работах были получены критерии локализации для разных классов граничных режимов, описаны структура и размер области сингулярности решений. В частности, в работе [3] изучена также задача Неймана для уравнения (1.9). В [4,5] изучены условия локализации для уравнений более общей, чем (1.9), структуры.

Все исследования в этой области до конца 90-х годов основывались на специальных техниках сравнения, главная идея которых состояла в построении автомодельного решения и сравнении его с соответствующим решением задачи. Такой подход является не достаточно универсальным. Так, например, для рассматриваемой задачи (1.1), (1.2), (1.7) невозможно построить автомодельное решение.

В 1999 году А. Е. Шишковым и А. Г. Щелковым в работе [6] был впервые предложен новый метод исследования локализованных режимов с обострением. Он состоит в эффективной оценке энергии, связанной с решением задачи, на бесконечном семействе полос, накапливающихся около времени обострения T. Этот метод в последствии был развит в серии работ В. А. Галактионова и А. Е. Шишкова в 2003–2006 годах ([7–10]). Метод энергетических оценок не связан с техникой сравнения, является более универсальным и охватывает широкий класс уравнений (включая квазилинейные параболические и псевдопараболические уравнения второго и высоких порядков в многомерных областях).

С применением описанного метода были получены точные условия локализации граничного режима для задачи (1.1), (1.2), (1.7). А именно, доказано (см. Th.1.1 в [7] и Th.6.4.1 в [11]), что для произвольного решения u с условиями на граничный режим F, определенный в (1.8),

$$F(t) \leqslant F_0(t) := \exp\left(\omega(T-t)^{-\frac{1}{p}}\right) \quad \forall\, t < T,\, \omega = \mathrm{const} > 0, \tag{1.10}$$

имеет место следующее свойство: существуют константы $c > 0$, $C < \infty$, зависящие только от n, p такие, что

$$h^{(u)}(t,s) + E^{(u)}(t,s) = h(t,s) + E(t,s) := \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{p+1} dx$$
$$+ \int_0^t \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau \leqslant C < \infty \quad \forall\, t < T,\, \forall\, s > c\,\omega^{\frac{p}{p+1}}, \tag{1.11}$$

где $\Omega(s) = \{x \in \Omega : d(x) := \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > s\}$, $s \in (0, s_\Omega)$, где значение $s_\Omega > 0$ определяет кривизну области Ω, т.е. такое, что функция $d(\cdot) \in C^2(\Omega \setminus \Omega(s))$ $\forall s \leqslant s_\Omega$ и, соответственно, $\partial\Omega(s)$ является C^2–гладкой кривой на $0 < s \leqslant s_\Omega$. Как известно, существование такого значения следует из условия гладкости для $\partial\Omega$. Таким образом, обостряющийся режим (1.10) является локализованным S-режимом (см. терминологию в [4]) и имеет область сингулярности $\Omega_{bl} \subset \Omega \setminus \Omega\left(c\omega^{\frac{p}{p+1}}\right)$. Граничный режим (1.10) является критическим случаем в том смысле, что если рассматривать функцию F следующего типа

$$F(t) \leqslant \exp\left(\omega(t)(T-t)^{-\frac{1}{p}}\right) \quad \forall\, t < T, \tag{1.12}$$

то при $\omega(t) \to \infty$ при $t \to T$ он становится нелокализованным (HS-режим) и всегда $\Omega_{bl} = \Omega$. С другой стороны, в случае, когда $\omega(t) \to 0$ при $t \to T$, область сингулярности всегда будет концентрироваться на границе, т.е. $\Omega_{bl} \subset \partial\Omega$ (LS-режим).

Помимо условий локализации интересно также описать геометрию профиля решения задачи в случае LS-режима. В предыдущей работе [12] была впервые получена точная оценка решений задачи (1.1), (1.2) из класса U_F с функцией F близкой к критической. А именно, показано, что при условии

$$\begin{gathered} E(t) + h(t) \leqslant F(t) \leqslant F_\mu(t) := \exp\left(\omega_0(T-t)^{-\frac{1}{p+\mu}}\right) \quad \forall t < T, \\ \omega_0 = \mathrm{const} > 0,\, \mu = \mathrm{const} > 0 \end{gathered} \tag{1.13}$$

имеет место следующая оценка:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant c_1 \exp\left(c_2 \omega_0^{\frac{p+\mu}{\mu}} s^{-\frac{p+1}{\mu}}\right) \ \forall\, s > 0, \tag{1.14}$$

где $h(t,s)$, $E(t,s)$ из (1.11). Целью данной работы является проследить поведение решения для пологих степенных режимов. В этом контексте имеем следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть $u(t,x)$ — произвольное энергетическое решение задачи* (1.1)–(1.2), *принадлежащее классу U_F с функцией F:*

$$F(t) = F_\alpha(t) := \omega_0(T-t)^{-\alpha} \quad \forall\, t < T, \tag{1.15}$$

где $\omega_0 > 0$, $\alpha > \frac{1}{p+1}$ — произвольные константы. Тогда существует константа $G < \infty$, зависящая только от p, n, d_0, d_1, и значение $\hat{s} > 0$ такие, что выполняется следующая равномерная априорная оценка:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant G\omega_0 s^{-\alpha(p+1)} \quad \forall\, t < T, \forall\, s \in (0,\hat{s}), \tag{1.16}$$

где $h(t,s)$, $E(t,s)$ — энергетические функции, определенные в (1.11).

Замечание 1.1. Условие на α ($\alpha > \frac{1}{p+1}$) является чисто техническим. В предстоящих работах планируется снять это ограничение и исследовать поведение энергетических функций для любой степенной функции F.

2. Доказательство теоремы 1.1

Из определения (1.11) следует монотонное убывание и непрерывность функции $J_T(s) := E(T,s) + h(T,s)$ по s. Более того, известно, (см. следствие из теоремы 6.3.1 в [11]), что в условиях теоремы $J_T(s) \to \infty$ при $s \to 0$ и $J_T(s) < \infty$ $\forall\, s > 0$. А значит найдется такое значение $\bar{s} \in (0, s_\Omega)$, что для всех s из интервала $(0,\bar{s})$ будет выполнено следующее конструктивное условие:

$$E(T,s) + h(T,s) > 2\omega_0 T^{-\alpha_1}\xi^{-\alpha}, \tag{2.1}$$

где $\xi \in (0,1)$ будет определена позже, α_1 — произвольное значение из промежутка $\left(\frac{1}{p+1}, \alpha\right)$. Теперь зафиксируем точку $\tilde{s} \in (0,\bar{s}]$. Очевидно, что в этой точке также выполнено условие (2.1).

Далее будем разбивать промежуток $[0,T)$ последовательностью точек $\{t_j\}$ ($j = 1, 2, ..., t_0 = 0$, $t_j \to T$ при $j \to \infty$) на промежутки $[t_{j-1}, t_j)$ длиной $\Delta_j := t_j - t_{j-1} > 0$. Эту последовательность $\{t_j\}$ определим специальным образом, а именно, введем в рассмотрение непрерывную функцию $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot) : [0,t'] \to [t_1, T]$, которую зададим следующим соотношением:

$$\big(\Gamma_{\tilde{s}}(t) - t\big)^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\Big(E(\Gamma_{\tilde{s}}(t),\tilde{s}) - E(t,\tilde{s}) + \sup_{t<\tau<\Gamma_{\tilde{s}}(t)} h(\tau,\tilde{s})\Big). \tag{2.2}$$

Значения $t_1 = t_1(\tilde{s}) = \Gamma_{\tilde{s}}(0)$ и t' определяются из соотношений:

$$t_1^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \left(E(t_1, \tilde{s}) + \sup_{0<\tau<t_1} h(\tau, \tilde{s}) \right), \tag{2.3}$$

$$(T - t')^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \Big(E(T, \tilde{s}) - E(t', \tilde{s}) + \sup_{t'<\tau<T} h(\tau, \tilde{s}) \Big). \tag{2.4}$$

В силу определения (2.3) и оценки (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \left(E(t_1, \tilde{s}) + \sup_{0<\tau<t_1} h(\tau, \tilde{s}) \right) t_1^\alpha &= \frac{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}{\xi^\alpha} \\ &< \frac{1}{2} \left(E(T, \tilde{s}) + \sup_{0<\tau<T} h(\tau, \tilde{s}) \right) T^\alpha \quad \forall \tilde{s} \in (0, \bar{s}]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Таким образом, в силу строгой монотонности функции $R_{\tilde{s}}(t) := (E(t, \tilde{s}) + h(t, \tilde{s}))t^\alpha$ следует, что $t_1(\tilde{s}) < T$ $\forall \tilde{s} \in (0, \bar{s}]$. Отметим также, что из определения (2.4) следует, что

$$t' < T \text{ если } \sup_{t \to T} (E(t, \tilde{s}) + h(t, \tilde{s})) < \infty, \tag{2.6}$$

$$t' = T \text{ если } \sup_{t \to T} (E(t, \tilde{s}) + h(t, \tilde{s})) = \infty. \tag{2.7}$$

Итак, можем заключить, что функция $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$ определяет строго монотонную возрастающую последовательность $\{t_j\}$ следующим соотношением:

$$t_j := \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j-1}), \quad j = 1, 2, ..., \quad t_0 = 0. \tag{2.8}$$

Более того, эта последовательность является бесконечной и $t_j \to T$ при $j \to \infty$ в случае (2.7). В случае же (2.6) последовательность конечна и существует число j_0 такое, что

$$t_{j_0} = \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j_0-1}) > t', \quad t_{j_0-1} \leqslant t'. \tag{2.9}$$

Для удобства определим значение j_∞ следующим образом:

$$j_\infty = \begin{cases} j_0, & \text{для случая (2.6);} \\ \infty, & \text{для случая (2.7).} \end{cases}$$

Отметим, что при таком определении последовательности $\{t_j\}$ смещения $\Delta_j = \Delta_j(\tilde{s}) = t_j - t_{j-1}$ будут задаваться следующим образом:

$$\Delta_j^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \big(E(t_j, \tilde{s}) - E(t_{j-1}, \tilde{s}) + \sup_{t_{j-1}<\tau<t_j} h(\tau, \tilde{s}) \big). \tag{2.10}$$

Далее покажем, что последовательность $\{\Delta_j\}$ убывающая, более того, докажем, что $\Delta_{j+1} \leqslant \xi\Delta_j$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$, где $\xi \in (0,1)$ из (2.2). В силу определения (2.2) функции $\Gamma_{\tilde{s}}(t)$ и оценки (1.15) имеем следующее неравенство:

$$\Delta_j^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}}\big(E(t_j,\tilde{s}) - E(t_{j-1},\tilde{s}) + \sup_{t_{j-1}<\tau<t_j} h(\tau,\tilde{s})\big)$$
$$\leqslant \frac{\xi^\alpha \omega_0 (T-t_j)^{-\alpha}}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \leqslant \xi^\alpha T^{-(\alpha-\alpha_1)}(T-t_j)^{-\alpha} \quad \forall j \leqslant j_\infty. \tag{2.11}$$

Далее в силу условия $T \geqslant 1$ из формулировки задачи получаем:

$$\Delta_j = \Delta_j(\tilde{s}) \geqslant \xi^{-1} T^{1-\frac{\alpha_1}{\alpha}}(T-t_j) \geqslant \xi^{-1}(T-t_j) \geqslant \xi^{-1}\Delta_{j+1} \quad \forall j \leqslant j_\infty.$$

То есть,

$$\Delta_{j+1} \leqslant \xi\Delta_j \quad \forall\, j \leqslant j_\infty. \tag{2.12}$$

По сформированной последовательности $\{t_j\}$ определим послойные энергетические функции $E_j(s)$ и $h_j(s)$ следующим образом:

$$E_j(s) := E(t_j,s) - E(t_{j-1},s), \quad h_j(s) := \sup_{t_{j-1}<\tau<t_j} h(\tau,s) \quad \forall\, j \leqslant j_\infty. \tag{2.13}$$

Очевидно, что для этих функций $E_j(s)$, $h_j(s)$ имеет место лемма 3.1, а значит справедлива система (3.2), (3.3). Теперь нашей целью является получение функционального неравенства для энергетических функций $E(t,s)$, $h(t,s)$. Для этого будем анализировать систему (3.2), (3.3). Сначала введем весовые энергетические функции:

$$A_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} E_j(s), \quad H_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} h_j(s). \tag{2.14}$$

Для них стартовая система (3.2), (3.3) перепишется:

$$\begin{aligned} &A_j(s) + H_j(s) \leqslant \overline{C}_1 H_{j-1}(s) + C_2 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}A_j(s)\right), \\ &H_j(s) \leqslant \lambda_j H_{j-1}(s) + C_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}A_j(s)\right) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $\overline{C}_1 = C_1\xi^{\alpha_1}$, $H_0(s) = \Delta_0^{\alpha_1} h_0(s)$, $\Delta_0 = \xi^{-1}\Delta_1$,

$$\lambda_j := (1+\gamma)\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1} \leqslant \lambda := (1+\gamma)\xi^{\alpha_1} < 1, \quad j = 1,2,\ldots. \tag{2.16}$$

Отметим, что (2.16) — первое требование для выбора константы ξ. Очевидно, что

$$\lambda_j\lambda_{j-1}\ldots\lambda_{i+1}\Delta_i^{\frac{1}{p+1}} = (1+\gamma)^{j-i}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}} \quad \forall\, j > i.$$

Учитывая это, проитерируем неравенства (2.15). В результате получаем:

$$A_j(s)+H_j(s)\leqslant \overline{C}_1(1+\gamma)^{j-1}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_0}\right)^{\alpha_1}H_0(s)+\overline{C}_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}}\big(-A_j'(s)\big)\right)\quad \forall\, j\leqslant j_\infty,\ \forall\, s\in(\tilde{s},\bar{s}), \tag{2.17}$$

где $\overline{C}_3=\max\{C_2\gamma^{\frac{1}{p+1}},(1+\gamma)^{-1}\overline{C}_1C_3\}$. Далее будем сводить полученную систему (2.17) к системе вида (3.4). Для этого введем новые энергетические функции следующим образом:

$$U_j(s):=\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}}\left(A_i(s)+H_i(s)\right)\quad j=1,2,\dots. \tag{2.18}$$

Очевидны соотношения:

$$U_j(s)-A_j(s)-H_j(s)=\theta^{(j)}U_{j-1}(s),\quad j=1,2,\dots, \tag{2.19}$$

где

$$\theta^{(j)}:=(1+\gamma)\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}}\leqslant\theta_0:=(1+\gamma)\xi^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}}<1. \tag{2.20}$$

Условием (2.20) накладываются более жесткие окончательные требования на выбор константы ξ. Таким образом для новых функций $U_j(s)$ справедлива следующая система:

$$U_j(s)\leqslant\overline{C}_1\lambda^{j-1}H_0(s)+\theta_0U_{j-1}(s)+\overline{C}_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}(-U_j'(s))$$
$$\forall\, s\in(\tilde{s},\bar{s}). \tag{2.21}$$

Определим теперь начальные данные для них. Оценим $U_j(\tilde{s})$:

$$\begin{aligned}U_j(\tilde{s})&=\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}}\Delta_i^{\alpha_1}\left(E_i(\tilde{s})+h_i(\tilde{s})\right)\\&=\omega_0\xi^{-\alpha}T^{\alpha-\alpha_1}\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}}\Delta_i^{-(\alpha-\alpha_1)}\\&=\omega_0\xi^{-\alpha}T^{\alpha-\alpha_1}\Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)}\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{1}{p+1}}\\&\leqslant G_1\omega_0\Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)}\quad\forall\, j\leqslant j_\infty,\end{aligned} \tag{2.22}$$

где $G_1 = \xi^{-\alpha} T^{\alpha-\alpha_1}(1-\theta_0)^{-1}$. Далее определим значение $\bar{b} = \overline{C}_1 \lambda \overline{H}_0(s)$ и перепишем систему (2.21), (2.22) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\overline{U}_j(s) := U_j(s) - \bar{b} \leqslant \theta_0 \overline{U}_{j-1}(s) + \overline{C}_3 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} (-\overline{U}'_j(s)), \\ &\overline{U}_j(\tilde{s}) \leqslant G_1 \omega_0 \Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Для анализа полученной системы применим лемму 3.2. Получим следующую равномерную оценку:

$$\overline{U}_j(s) \leqslant G_2 \omega_0 \psi(s - \tilde{s}) \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}), \quad \psi(s) := s^{-(\alpha-\alpha_1)(p+1)}$$
$$G_2 := \left(\frac{\overline{C}_3(\alpha-\alpha_1)(p+1)}{e(1-\theta_0)} \right)^{(\alpha-\alpha_1)(p+1)} G_1. \tag{2.24}$$

Для $U_j(s)$ соответственно имеем оценку:

$$U_j(s) \leqslant G_2 \omega_0 \psi(s - \tilde{s}) + \bar{b} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}). \tag{2.25}$$

Далее определим значение $s_1 > \tilde{s}$ следующим образом:

$$\psi(s_1 - \tilde{s}) = G_3^{-1} \omega_0^{-1} \bar{b}, \tag{2.26}$$

тогда (2.25) перепишется:

$$U_j(s) \leqslant 2G_2\, \omega_0 \psi(s - \tilde{s}) \quad \forall\, s : \tilde{s} < s < s_2 := \min\{s_1, \bar{s}\}. \tag{2.27}$$

Вспоминая определения (2.18) и (2.14), получаем следующую оценку:

$$E_j(s) + h_j(s) \leqslant \Delta_j^{-\alpha_1} U_j(s) \leqslant 2G_2 \omega_0 \psi(s - \tilde{s}) \Delta_j^{-\alpha_1} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_2). \tag{2.28}$$

Теперь получим оценку для энергетических функций $E(t,s)$ и $h(t,s)$. Для этого зафиксируем значение $i \leqslant j_\infty$ и просуммируем неравенство (2.28) по j от 1 до i. В силу (2.10) получим

$$\begin{aligned} E(t_i, s) + h(t_i, s) &\leqslant 2G_2 \omega_0 \psi(s - \tilde{s}) \sum_{j=1}^{i} \Delta_j^{-\alpha_1} \\ &\leqslant 2G_2 \omega_0 \psi(s - \tilde{s}) \Delta_i^{-\alpha_1} \sum_{j=1}^{i} (\xi^{\alpha_1})^{j-1} \leqslant \frac{2G_2}{1-\xi^{\alpha_1}} \omega_0 \psi(s - \tilde{s}) \Delta_i^{-\alpha_1} \\ &= G_3 \omega_0^{\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha}} \psi(s - \tilde{s}) \left(E(t_i, \tilde{s}) + h(t_i, \tilde{s}) \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_2), \end{aligned}$$
$$\text{где } G_3 = 2\xi^{\alpha_1}(1-\xi^{\alpha_1})^{-1} T^{-\frac{(\alpha-\alpha_1)\alpha_1}{\alpha}} G_2. \tag{2.29}$$

Следующий шаг доказательства — получение оценки типа (2.29) для произвольной точки $t < T$. Для этого отметим, что функция $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$, определенная в (2.2), непрерывно, монотонно и взаимнооднозначно отображает любой отрезок $[t_{j-1}, t_j]$ на $[t_j, t_{j+1}]$ $\forall\, j \leqslant j_\infty - 1$. Зафиксируем точку $\bar{t} \in [t_1, T)$. Пусть для определенности $\bar{t} := \bar{t}_k \in (t_k, t_{k+1}]$ при некотором $k \leqslant j_\infty - 1$. Тогда единственным образом восстановится последовательность $\{\bar{t}_i\}$, $i \leqslant j_\infty$ такая, что:

$$\bar{t}_{i+1} = \Gamma_{\tilde{s}}(\bar{t}_i) \quad \forall\, i \leqslant j_\infty, \quad \bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1}], \quad \bar{t}_0 \in (0, t_1].$$

Этой последовательностью определяются новые смещения $\{\overline{\Delta}_i\}$:

$$\overline{\Delta}_i^{-\alpha} := (\bar{t}_i - \bar{t}_{i-1})^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \Big(E(\bar{t}_i, \tilde{s}) - E(\bar{t}_{i-1}, \tilde{s}) + \sup_{\bar{t}_{i-1} < t < \bar{t}_i} h(t, \tilde{s}) \Big). \tag{2.30}$$

Аналогично проверяется, что $\overline{\Delta}_{i+1} \leqslant \xi \overline{\Delta}_i$ $\forall\, i \leqslant j_\infty - 1$. По этим смещениям определяются соответствующие энергетические функции $\overline{E}_i(s)$ и $\overline{h}_i(s)$. Далее повторяем рассуждения (2.14)–(2.29). Отличие будет состоять только в том, что в качестве начальной функции выступает функция $\overline{h}_0(s) := h(\bar{t}_0, s)$. Оценим $\overline{H}_0(s)$, используя условие (1.15):

$$\overline{H}_0(s) = (\xi^{-1}\Delta_1)^{\alpha_1} \overline{h}_0(s) \leqslant \xi^{-\alpha_1} \omega_0 \left(\frac{\bar{t}_1 - \bar{t}_0}{T - \bar{t}_0} \right)^{\alpha_1} \leqslant \xi^{-\alpha_1} \omega_0.$$

В результате получаем следующую оценку типа (2.29):

$$E(\bar{t}_i, s) + h(\bar{t}_i, s) \leqslant G_3 \omega_0^{\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha}} \psi(s - \tilde{s}) \left(E(\bar{t}_i, \tilde{s}) + h(\bar{t}_i, \tilde{s}) \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_3), \tag{2.31}$$

где G_3 из (2.29), $s_3 := \min\{\bar{s}_1, \bar{s}\}$, где значение $\bar{s}_1$ определяется следующим соотношением:

$$\psi(\bar{s}_1 - \tilde{s}) = G_3^{-1} \omega_0^{-1} \bar{\bar{b}}, \text{ где } \bar{\bar{b}} := \overline{C}_1 \lambda \overline{H}_0(s).$$

Теперь в силу того, что выбор точки $\bar{t}_k$ был произвольным, получаем оценку для всех $t < T$:

$$E(t, s) + h(t, s) \leqslant G_3 \omega_0^{\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha}} (s - \tilde{s})^{-(\alpha-\alpha_1)(p+1)} \left(E(t, \tilde{s}) + h(t, \tilde{s}) \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, t < T, \quad \forall\, s, \tilde{s} : 0 < \tilde{s} < s < s_3. \tag{2.32}$$

Таким образом мы получили функциональное неравенство для энергетических функций. Для его анализа применим лемму 3.3. Получаем следующую оценку:

$$E(t, s) + h(t, s) \leqslant 2^{\frac{\alpha^2(p+1)}{\alpha-\alpha_1}} G_3^{\frac{\alpha}{\alpha-\alpha_1}} \omega_0 s^{-\alpha(p+1)} \quad \forall\, t < T, \forall\, s \in (0, s_3). \tag{2.33}$$

Получили утверждение теоремы с $G = 2^{\frac{\alpha^2(p+1)}{\alpha-\alpha_1}} G_3^{\frac{\alpha}{\alpha-\alpha_1}}$, $\hat{s} = s_3$.

3. Приложения

Лемма 3.1. *Пусть $u(t,x)$ — энергетическое решение задачи (1.1) — (1.2), (1.3), (1.4). И положим, что промежуток $[0,T)$ разбит некоторой монотонно возрастающей последовательностью точек $\{t_j\}$ ($j=1,2,...,$ $t_0=0$, $t_j \to T$ при $j\to\infty$) на промежутки $[t_{j-1},t_j)$ длиной $\Delta_j := t_j - t_{j-1} > 0$. Тогда для послойных энергетических функций $E_j(s)$ и $h_j(s)$, определенных следующим образом:*

$$\begin{aligned} &E_j(s) := \int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(t,x)|^{p+1}dxdt,\\ &h_j(s) := \sup_{t_{j-1}\leqslant t<t_j}\int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{p+1}dx \quad \forall s>0,\\ &\Omega(s) = \{x\in\Omega : \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > s\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

справедлива следующая система дифференциальных неравенств:

$$E_j(s)+h_j(s) \leqslant C_1 h_{j-1}(s) + C_2\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}E_j(s)\right), \quad j=1,2,..., \tag{3.2}$$

$$h_j(s) \leqslant (1+\gamma)h_{j-1}(s) + C_3\gamma^{-\frac{1}{p+1}}\Delta_j^{\frac{1}{p+1}}\left(-\frac{d}{ds}E_j(s)\right), \quad j=1,2,..., \tag{3.3}$$

для почти всех $s\in(0,s_\Omega)$ и произвольного $\gamma : 0<\gamma<1$. Положительные константы $C_1<\infty$, $C_2<\infty$, $C_3<\infty$ зависят только от известных параметров задачи и не зависят, в частности от γ и от ω_0.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.2.3 из [11].

Лемма 3.2. *Пусть некоторое семейство неотрицательных абсолютно непрерывных монотонно невозрастающих функций $\{M_j(s)\}$, $j\in\mathbb{N}$, удовлетворяет системе дифференциальных неравенств:*

$$\begin{aligned} &M_j(s) \leqslant \lambda M_{j-1}(s) + (1-\lambda)k_j(-M_j'(s)) \quad \forall\, s\geqslant \bar s,\\ &M_j(\bar s) \leqslant \exp K_j \quad \forall\, j\in\mathbb{N}, \quad M_0(s) := 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\lambda\in(0,1)$, а последовательность $\{k_j\}$ стремится монотонно к 0 при $j\to\infty$. Пусть также

$$K_j = f(k_j) = a + b\ln(k_j^{-1}). \tag{3.5}$$

Тогда для решений $M_j(s)$ справедлива следующая равномерная априорная оценка:

$$M_j(s) \leqslant \overline{N}(s) := b^b e^{a-b}(s-\bar s)^{-b} \quad \forall\, j\in\mathbb{N}, \forall\, s\geqslant \bar s. \tag{3.6}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую систему:

$$\overline{M}_j(s) = -k_j\overline{M}_j'(s) \quad \forall\, s \geqslant \bar{s}, \quad \overline{M}_j(\bar{s}) = \exp K_j, \tag{3.7}$$

где последовательность $\{k_j\}$ из (3.4), а $\{K_j\}$ такая, что $\{K_j^{-1}\}$ и $\{k_jK_j\}$ монотонно стремятся к 0 при $j \to \infty$. Интегрируя (3.7), получаем

$$\overline{M}_j(s) = \exp\Big(K_j - k_j^{-1}(s-\bar{s})\Big) \quad \forall\, j \in \mathbb{N}, \forall\, s \geqslant \bar{s}. \tag{3.8}$$

Функции $\overline{M}_j(s)$ монотонно убывают по s, а значит могут иметь между собой не более одной точки пересечения. Очевидно, что соседние функции $\overline{M}_j(s)$ и $\overline{M}_{j+1}(s)$ пересекаются в точке $s_j := \bar{s} + \frac{K_j - K_{j-1}}{k_j^{-1} - k_{j-1}^{-1}} > \bar{s}$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Несложно показать, что при заданных условиях на $\{k_j\}$ и $\{K_j\}$ получаем, что $\{s_j\}$ монотонно стремится к $\bar{s}$ при $j \to \infty$. Введем теперь в рассмотрение функцию $\widetilde{M}_j(s)$, определенную следующим образом:

$$\widetilde{M}_j(s) := \max_{i \leqslant j}\{\overline{M}_i(s)\}.$$

Зная структуру последовательности $\{\overline{M}_i(s)\}$, можем утверждать, что

$$\widetilde{M}_j(s) = \begin{cases} \overline{M}_1(s), & \text{если } s \geqslant s_1; \\ \overline{M}_2(s), & \text{если } s \in [s_2, s_1); \\ \dots & \\ \overline{M}_j(s), & \text{если } s \in [\bar{s}, s_{j-1}). \end{cases} \tag{3.9}$$

Далее перейдем непосредственно к анализу решений заданной системы неравенств (3.4). Используя индукцию, докажем, что выполняется оценка:

$$M_j(s) \leqslant \widetilde{M}_j(s) \quad \forall\, j \leqslant i, \forall\, s \geqslant \bar{s}. \tag{3.10}$$

При $j = 1$ оценка проверяется непосредственным интегрированием неравенства (3.4). Положим, что оценка (3.10) выполняется для $j-1$. Пусть она не выполнена для j. Тогда найдется такой интервал (a,b), $a > \bar{s}$, что имеет место

$$M_j(s) > \widetilde{M}_j(s) \quad \forall\, s \in (a,b) \quad \text{и} \quad M_j(a) = \widetilde{M}_j(a). \tag{3.11}$$

Пусть для определенности $a \in [s_l, s_{l-1})$, $l < j$, тогда (3.11) можно переписать

$$M_j(s) > \overline{M}_l(s) \quad \forall\, s \in (a, \min\{s_{l-1}, b\}) \quad \text{и} \quad M_j(a) = \overline{M}_l(a). \tag{3.12}$$

Далее, в силу монотонного возрастания последовательности $\{\widetilde{M}_i(s)\}$ по i и в силу справедливости оценки (3.10) для $j-1$, имеем:

$$\widetilde{M}_j(s) \geqslant \widetilde{M}_{j-1}(s) \geqslant M_{j-1}(s),$$

а значит, в силу предположения (3.11),

$$M_{j-1}(s) \leqslant M_j(s) \quad \forall\, s \in [a,b).$$

Тогда система (3.4) для M_j перепишется следующим образом:

$$M_j(s) \leqslant -k_j M_j'(s) \quad \forall\, s \in [a, \min\{s_{l-1}, b\}), \quad M_j(a) = \overline{M}_l(a). \tag{3.13}$$

Решая систему, получаем:

$$M_j(s) \leqslant \overline{M}_l(s) \quad \forall\, s \in [a, \min\{s_{l-1}, b\}),$$

что противоречит предположению (3.11) и доказывает оценку (3.10).

Рассмотрим теперь более широкое, чем (3.8) семейство функций $\{\overline{N}_\tau(s)\}$, зависящее от непрерывного параметра $\tau > 0$, такое, что $\overline{N}_{k_j}(s) = \overline{M}_j(s)$. Отметим, что заданная в (3.5) последовательность $\{K_j\}$ удовлетворяет условиям из (3.7). А значит функции $\overline{N}_\tau(s)$ имеют вид:

$$\overline{N}_\tau(s) = e^a \tau^{-b} \exp\left(-\tau^{-1}(s-\bar{s})\right).$$

Найдем теперь огибающую $\overline{N}(s)$ для этого семейства.

$$\frac{\partial \overline{N}_\tau(s)}{\partial \tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\tau}(s) = \frac{s-\bar{s}}{b} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \overline{N}(s) = \overline{N}_{\bar{\tau}(s)}(s) = b^b e^{a-b}(s-\bar{s})^{-b}. \tag{3.14}$$

Учитывая, что $\bar{\tau}$ является точкой максимума, можем утверждать, что

$$\forall\, s \geqslant \bar{s} \quad \exists\, \bar{\tau}(s): \quad \overline{N}(s) := \overline{N}_{\bar{\tau}(s)}(s) \geqslant \overline{N}_\tau(s) \quad \forall\, \tau > 0,$$

а значит найденная функция $\overline{N}(s)$ удовлетворяет неравенство:

$$\overline{N}(s) \geqslant \overline{N}_\tau(s) \quad \forall\, \tau > 0, \forall\, s \geqslant \bar{s}. \tag{3.15}$$

Учитывая определение функций $\overline{N}_\tau(s)$ и (3.15), получаем оценку:

$$\widetilde{M}_j(s) = \max_{i \leqslant j}\{\overline{M}_i(s)\} \leqslant \max_{i \in \mathbb{N}}\{\overline{M}_i(s)\} \leqslant \max_{\tau > 0}\{\overline{N}_\tau(s)\} \leqslant \overline{N}(s). \tag{3.16}$$

Тогда из (3.10) и (3.16) следует утверждение леммы. □

Лемма 3.3 (Stampacchia lemma [13]). *Пусть некоторая непрерывная неотрицательная невозрастающая функция $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет соотношению:*

$$f(s+\delta) \leqslant a\delta^{-\rho} f(s)^{\lambda} \quad \forall\, s>0,\, \delta>0, \tag{3.17}$$

где числа $a>0$, $\rho>0$, $\lambda>0$. Тогда для функции f справедлива следующая универсальная априорная оценка:

1) если $\lambda<1$, то $f(s) \leqslant 2^{\frac{\rho}{\lambda(1-\lambda)^2}} a^{\frac{1}{1-\lambda}} s^{-\frac{\rho}{1-\lambda}} \quad \forall\, s>0$;

2) если $\lambda=1$, то $f(s) \leqslant f(0)\exp\left(1-(ae)^{-\frac{1}{\rho}}s\right) \quad \forall\, s>0$;

3) если $\lambda>1$, то $f(s_0)=0$, $\quad s_0 = 2^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\left(af(0)^{\lambda-1}\right)^{\frac{1}{\rho}}$.

Литература

[1] В. А. Галактионов, А. А. Самарский, *Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности* // Матем. сб., **118(160)** (1982), No. 3, 291–322.

[2] B. H. Gilding, M. A. Herrero, *Localization and blow-up of termal waves in nonlinear heat conduction with peaking* // Math. Ann., **282** (1988), No. 2, 223–242.

[3] C. Cortazar, M. Elgueta, *Localization and boundedness of the solutions of the Neumann problem for a filtration equation* // Nonlinear Anal., **13** (1989), No. 1, 33–41.

[4] A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Regimes with peaking in problems for quasilinear parabolic equations*, Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).

[5] B. H. Gilding, J. Goncerzewicz, *Localization of solutions of exterior domain problems for the porous media equation with radial symmetry* // SIAM J. Math. Anal., **31** (2000), No. 4, 862–893.

[6] A. E. Shishkov, A. G. Shchelkov, *Boundary regimes with peaking for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains* // Math. Sb., **190** (1999), No. 3–4, 447–479 (in Russian).

[7] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Saint-Venant's principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A, **133** (2003), No. 5, 1075–1119.

[8] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations* // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci., **460** (2004), No. 2051, 3299–3325.

[9] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Self-similar boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh., **135A** (2005), 1195–1227.

[10] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Higher-order quasilinear parabolic equations with singular initisl data* // Communications in Contemp. Math., **8** (2006), No. 3, 331–354.

[11] A. A. Kovalevsky, I. I. Skrypnik, A.E. Shishkov, *Singular Solutions in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 24, De Gruyter, Basel, 2016.

[12] A. E. Shishkov, E. A. Evgenieva, *Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations*, (2018), https://arxiv.org/abs/1802.03717.

[13] G. Stampacchia, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus* // Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 16 (Été, 1965), Montreal, Les Press. Univ. Montreal, 1966.

Сведения об авторах

Евгения Александровна Евгеньева

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск, Украина

E-Mail: yevgeniia.yevgenieva@gmail.com, bashtynskaya.evgeniya@gmail.com