Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 1, 18 – 42

Быстро меняющиеся решения дифференциального уравнения второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями

Вячеслав М. Евтухов, Наталия П. Колун

(Представлена И. И. Скрыпником)

Аннотация. Для дифференциального уравнения второго порядка, содержащего в правой части сумму слагаемых с правильно и быстро меняющимися нелинейностями, устанавливаются условия существования и асимптотические представления быстро меняющихся решений при стремлении аргумента к особой точке.

2010 MSC. 34E99.

Ключевые слова и фразы. Дифференциальные уравнения второго порядка, правильно меняющиеся нелинейности, быстро меняющиеся нелинейности.

1. Введение

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y), \tag{1.1}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = \overline{1, m})$, $p_i : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1, m})$ — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \le +\infty$; $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1, m})$, где Δ_{Y_0} — односторонняя окрестность Y_0, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, непрерывные функции при $i = \overline{1, l}$ и дважды непрерывно дифференцируемые при $i = \overline{l+1, m}$, такие, что

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i} \quad (i = \overline{1, l}) \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0, \tag{1.2}$$

Статья поступила в редакцию 28.02.2018

$$\varphi_i'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) \in \{0, +\infty\},$$
$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1 \quad (i = \overline{l+1, m}). \tag{1.3}$$

Функции, удовлетворяющие условиям (1.2), называются правильно меняющимися при $y \to Y_0$ функциями порядков $\sigma_i \quad (i = \overline{1, l})$ (см. монографию Е. Сенеты [1], Гл. 1, § 1, С. 9). Для них имеют место представления вида

$$\varphi_i(y) = \mid y \mid^{\sigma_i} L_i(y) \quad (i = \overline{1, l}), \tag{1.4}$$

где L_i $(i = \overline{1, l})$ — медленно меняющиеся функции при $y \to Y_0$, т.е. такие, что

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{L_i(\lambda y)}{L_i(y)} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0. \tag{1.5}$$

Из условий (1.3) непосредственно вытекают предельные соотношения

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} = \pm\infty \quad (i = \overline{l+1, m}), \tag{1.6}$$

в силу которых каждая из функций φ_i при $i \in \{l+1, ..., m\}$ и ее производная первого порядка являются быстро меняющимися функциями при $y \to Y_0$ (см. монографию В. Марича [2], Гл. 3, § 3.4, Леммы 3.2, 3.3, С. 91–92).

Определение 1.1. *Решение y уравнения* (1.1) *называется $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям*

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases} \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{1.7}$$

Известны результаты об асимптотическом поведении $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений дифференциального уравнения (1.1) в случае, когда все слагаемые в правой части уравнения (1.1) содержат правильно меняющиеся нелинейности (см., например, работы [3, 4]). Предпосылкой для таких исследований стали работы, в которых изучались двучленные дифференциальные уравнения второго порядка с отличной от степенной функции нелинейностью (см., например, [5–10]).

В работах [11–15] рассматривались двучленные дифференциальные уравнения с быстро меняющейся нелинейностью. Случай, когда в правой части дифференциального уравнения (1.1) присутствуют слагаемые с нелинейностями разного типа ранее не исследовался.

Целью настоящей работы является установление условий существования $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений при $\lambda_0 = 1$ у уравнения (1.1), а также асимптотических при $t \uparrow \omega$ представлений для таких решений и их производных первого порядка в случае, когда для некоторого $s \in \{1, ..., m\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \quad \text{при} \quad i \in \{1, ..., m\} \setminus \{s\}, \qquad (1.8)$$

т.е. когда на каждом таком решении y уравнения (1.1) правая часть уравнения эквивалентна при $t \uparrow \omega$ одному слагаемому с правильно или быстро меняющейся нелинейностью.

Для $P_\omega(Y_0, 1)$-решений, как было установлено в работе [16], имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty, \qquad (1.9)$$

в котором

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

В силу (1.9) $y(t)$ является быстро меняющимся решением при $t \uparrow \omega$. При изучении таких решений в дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(b),$$

где

$$\Delta_{Y_0}(b) = \begin{cases} [b, Y_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{левая окрестность} \quad Y_0, \\ ]Y_0, b], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{правая окрестность} \quad Y_0, \end{cases}$$

и число b удовлетворяет неравенствам

$$|b| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0,$$

$$b > 1 \quad (b < -1) \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty \quad (Y_0 = -\infty).$$

В работе [15], с использованием результатов из монографии N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels [17] (Гл. 3, п. 3.10, С. 178), было показано, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $f : \Delta_{Y_0}(b) \to]0, +\infty[$, удовлетворяющая условиям

$$f'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}(b), \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} f(y) = Z_0 \in \{0, +\infty\},$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{f''(y)f(y)}{f'^2(y)}=1,$$

принадлежит т.н. классу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, который был получен путем расширения класса Г, введенного Л. Ханом (см., например, [17], Гл. 3, п. 3.10, С. 175). При этом были указаны свойства таких функций, которые будут использованы в дальнейшем.

Введем два числа

$$\nu_0=\operatorname{sign} b, \quad \nu_1=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b)=[b,Y_0[,\\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b)=]Y_0,b]. \end{cases}$$

Учитывая определение $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (1.1), заметим, что числа ν_0 и ν_1 определяют знаки любого $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения и его первой производной (соответственно) в некоторой левой окрестности ω. При этом ясно, что условия

$$\nu_0\nu_1=1, \quad \text{если} \quad Y_0=0, \quad \nu_0\nu_1=1, \quad \text{если} \quad Y_0=\pm\infty$$

являются необходимыми для существования таких решений. Кроме того, если выполняются условия (1.8), то при $\lambda_0=1$ в силу (1.1) и определения 1.1

$$\alpha_s\nu_0=1. \tag{1.10}$$

2. Случай, когда главным в правой части уравнения (1.1) является слагаемое с правильно меняющейся нелинейностью

Положим при $s\in\{1,...,l\}$

$$\Phi_s(y)=\int\limits_{B_s}^{y}\frac{du}{\varphi_s(u)},$$

где

$$B_s=\begin{cases} b, \ \text{если} & \int\limits_b^{Y_0}\frac{dy}{\varphi_s(y)}=\pm\infty,\\ Y_0, \ \text{если} & \int\limits_b^{Y_0}\frac{dy}{\varphi_s(y)}=\mathrm{const}. \end{cases}$$

Так как $\Phi_s'(y)=\frac{1}{\varphi_s(y)}>0$ при $y\in\Delta_{Y_0}(b)$, то функция Φ_s возрастающая на $\Delta_{Y_0}(b)$ и существует обратная функция $\Phi_s^{-1}:\Delta_{Z_s}(c_s)\to\Delta_{Y_0}(b)$ такая, что

$$\lim_{\substack{z\to Z_s\\ z\in\Delta_{Z_s}(c_s)}} \Phi_s^{-1}(z)=Y_0, \tag{2.1}$$

где

$$Z_s = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \Phi_s(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad B_s = Y_0, \\ +\infty, & \text{если} \quad B_s = b < Y_0, \\ -\infty, & \text{если} \quad B_s = b > Y_0, \end{cases}$$

$$\Delta_{Z_s}(c_s) = \begin{cases} [c_s, Z_s[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \\ ]Z_s, c_s], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b], \end{cases} \quad c_s = \Phi_s(b).$$

В силу представлений (1.4), свойств медленно меняющихся функций (см. [1], Гл. 1, § 2, С. 15) и правила Лопиталя

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{y}{\Phi_s(y)\varphi_s(y)} = 1 - \sigma_s. \tag{2.2}$$

Введем также вспомогательные функции

$$J_s(t) = \int_{A_s}^{t} p_s(\tau)d\tau, \quad J_{ss}(t) = \int_{A_{ss}}^{t} J_s(\tau)d\tau,$$

где каждый из пределов интегрирования A_s, $A_{ss} \in \{a, \omega\}$ и выбран по аналогии с выбором B_s в функции Φ_s так, чтобы каждый из интегралов J_s и J_{ss} стремился либо к 0, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$.

Теорема 2.1. *Пусть для некоторого $s \in \{1, \dots, l\}$ выполняется неравенство $\sigma_s \neq 1$. Тогда для существования у дифференциального уравнения* (1.1) *$P_\omega(Y_0, 1)$-решений, удовлетворяющих условиям* (1.8), *необходимо чтобы наряду с* (1.10) *выполнялось неравенство*

$$\alpha_s \nu_1 (1 - \sigma_s) J_s(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[, \tag{2.3}$$

и условия

$$\alpha_s (1 - \sigma_s) \lim_{t \uparrow \omega} J_{ss}(t) = Z_s, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_s(t) J_{ss}(t)}{J_s^2(t)} = 1, \tag{2.4}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1 - \sigma_s)J_{ss}(t)))}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1 - \sigma_s)J_{ss}(t)))} = 0 \tag{2.5}$$

при любом $i \in \{1, ..., l\} \setminus \{s\}$,

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1 - \sigma_s)J_{ss}(t)(1 + \delta_i)))}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1 - \sigma_s)J_{ss}(t)))} = 0 \tag{2.6}$$

при каждом $i \in \{l + 1, ..., m\}$, где δ_i — любое число из некоторой односторонней окрестности нуля. Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) = \Phi_s^{-1}(\alpha_s(1 - \sigma_s)J_{ss}(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.7}$$

$$y'(t) = \frac{J_s(t)\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t))}{(1-\sigma_s)J_{ss}(t)}[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, 1)$- решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее при данном $s \in \{1, ..., l\}$ условиям (1.8). Тогда в силу (1.1) и (1.8)

$$y''(t) = \alpha_s p_s(t)\varphi_s(y(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.9}$$

Условие (2.3) и второе из условий (2.4) устанавливаются с использованием схемы доказательства теоремы 3.3 из работы [18], которая посвящена двучленному дифференциальному уравнению n-го порядка с правильно меняющейся нелинейностью. Кроме того, используя схему доказательства данной теоремы, получим

$$\Phi_s(y(t)) = \alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.10}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{J_s(t)}{(1-\sigma_s)J_{ss}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.11}$$

Из (2.10) следует выполнение первого из условий (2.4) и асимптотическое соотношение

$$y(t) = \Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)[1+o(1)]) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.12}$$

Здесь Φ_s^{-1} является правильно меняющейся функцией порядка $\frac{1}{1-\sigma_s}$ при $z \to Z_s$ как обратная для правильно меняющейся при $y \to Y_0$ функции Φ_s порядка $1-\sigma_s \neq 0$. Более того, в силу условий (2.4), существует $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что функция $z(t) = \alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)[1+o(1)]$ такова, что $\lim_{t\uparrow\omega} z(t) = Z_s$ и $z(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_1, \omega[$. Поэтому, с учетом свойств правильно меняющихся функций, соотношение (2.12) можно переписать в виде (2.7). Кроме того, из (2.11) и (2.7) следует справедливость (2.8).

Далее, поскольку при $s \in \{1, ..., l\}$ функции φ_i $(i = \overline{1, l})$ являются правильно меняющимися при $y \to Y_0$, а функция z удовлетворяет указанным выше условиям, то

$$\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)[1+o(1)]))$$

$$= \varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тогда, в силу (2.7) при $i \in \{1, ..., l\} \setminus \{s\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))[1+o(1)]}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))[1+o(1)]}$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))},$$

откуда, с учетом (1.8), при любом $i \in \{1,...,l\} \setminus \{s\}$ следует справедливость условий (2.5).

При $i \in \{l+1,...,m\}$ из (2.12), с учетом свойств функции z, имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)[1+o(1)]))}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))}.$$

В силу монотонности функций $\varphi_i(\Phi_s^{-1}(z))$ $(i = \overline{l+1,m})$ на промежутке $\Delta_{Z_s}(c_s)$ для любых δ_i из некоторой односторонней окрестности нуля существует $t_2 \in [t_1, \omega[$ такое, что при $t \in [t_2, \omega[$

$$\frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)[1+o(1)]))}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))}$$

$$\geq \frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)[1+\delta_i]))}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))} \geq 0,$$

откуда, с учетом (1.8) и предыдущего предельного равенства при любом $i \in \{l+1,...,m\}$ следует справедливость условий (2.6). □

Теорема 2.2. *Пусть для некоторого* $s \in \{1,...,l\}$ *выполняется неравенство* $\sigma_s \neq 1$, *условия* (1.10), (2.3)–(2.5) *и при любом* $i \in \{l+1,...,m\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)(1+u)))}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))} = 0 \qquad (2.13)$$

равномерно по $u \in [-\delta, \delta]$ *для некоторого* $0 < \delta < 1$. *Тогда у дифференциального уравнения* (1.1) *существуют* $P_\omega(Y_0, 1)$*-решения, допускающие асимптотические представления* (2.7) *и* (2.8), *причем таких решений существует однопараметрическое семейство в случае, когда* $\sigma_s > 1$ *и двупараметрическое — когда* $\sigma_s < 1$ *и* $\alpha_s\nu_1 = 1$.

Доказательство. Применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{aligned} &\Phi_s(y(t)) = \alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)[1+u_1(t)], \\ &\tfrac{y'(t)}{y(t)} = \tfrac{J_s(t)}{(1-\sigma_s)J_{ss}(t)}[1+u_2(t)], \end{aligned} \qquad (2.14)$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_1' = h(t)\left[(\sigma_s - 1)(1+u_1) + \frac{G(t,u_1)}{\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)}(1+u_2)\right], \\ u_2' = h(t)\Big[(1-\sigma_s)(q(t)-1)(1+u_2) - (1+u_2)^2 + \\ \qquad + \frac{\alpha_s(1-\sigma_s)^2 J_{ss}(t) q(t)}{G(t,u_1)}(1+R(t,u_1))\Big], \end{cases} \qquad (2.15)$$

в которой

$$h(t) = \frac{J_s(t)}{(1-\sigma_s)J_{ss}(t)}, \quad q(t) = \frac{J_{ss}(t)p_s(t)}{J_s^2(t)}, \quad G(t,u_1) = \frac{Y(t,u_1)}{\varphi_s(Y(t,u_1))},$$

$$Y(t,u_1) = \Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)(1+u_1)), \tag{2.16}$$

$$R(t,u_1) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m} \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))}. \tag{2.17}$$

Учитывая первое из условий (2.4), подберем число $t_0 \in [a,\omega[$ так, чтобы при $|u_1| \le \delta$

$$\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)(1+u_1) \in \Delta_{Z_s}(c_s), \quad Y(t,u_1) \in \Delta_{Y_0}(b)$$

и рассмотрим систему (2.15) на множестве

$$\Omega = [t_0,\omega[\times D, \quad \text{где} \quad D = \{(u_1,u_2) : |u_1| \le \delta, \quad i=1,2\}.$$

В силу (2.1) и первого из условий (2.4)

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t,u_1) = Y_0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1 \in [-\delta,\delta]. \tag{2.18}$$

Отсюда, с учетом (2.4) и вида функции G, следует что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{G(t,u_1)}{\Phi_s(Y(t,u_1))} = 1-\sigma_s \quad \text{равномерно по} \quad u_1 \in [-\delta,\delta],$$

т.е.

$$G(t,u_1) = [1-\sigma_s + R_1(t,u_1)]\Phi_s(Y(t,u_1))$$

и

$$\frac{1}{G(t,u_1)} = \frac{1/(1-\sigma_s) + R_2(t,u_1)}{\Phi_s(Y(t,u_1))},$$

где функции $R_i \quad (i=1,2)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_i(t,u_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1 \in [-\delta,\delta]. \tag{2.19}$$

Следовательно, с учетом вида функции $Y(t,u_1)$, имеют место представления

$$G(t,u_1) = \alpha_s(1-\sigma_s)[1-\sigma_s + R_1(t,u_1)]J_{ss}(t)(1+u_1), \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{G(t,u_1)} = \frac{1/(1-\sigma_s) + R_2(t,u_1)}{\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)(1+u_1)}. \tag{2.21}$$

Кроме того, покажем что

$$\lim_{t\uparrow\omega} R(t,u_1)=0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1\in[-\delta,\delta]. \tag{2.22}$$

Так как функции φ_i при $i\in\{1,...,l\}$ являются правильно меняющимися при $y\to Y_0$ $(y\in\Delta_{Y_0}(b))$ порядков σ_i, то в силу представлений (1.4), с учетом свойств медленно меняющихся функций, имеем

$$\varphi_i(Y(t,u_1))=\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)(1+u_1)))$$
$$=|\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)(1+u_1))|^{\sigma_i}L_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)(1+u_1)))$$
$$=|\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)(1+u_1))|^{\sigma_i}$$
$$\times L_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))(1+r_i(t,u_1))$$
$$=\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))(1+u_1)^{\sigma_i}(1+r_i(t,u_1)), \quad (i=\overline{1,l})$$

где функции r_i таковы, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(t,u_1)=0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1\in[-\delta,\delta].$$

С учетом этих условий

$$\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))}=0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1\in[-\delta,\delta], \tag{2.23}$$

поскольку в силу условий (2.5)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))}$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))(1+u_1)^{\sigma_i}[1+r_i(t,u_1)]}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))(1+u_1)^{\sigma_s}[1+r_s(t,u_1)]}$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)))}=0$$

равномерно по $u_1\in[-\delta,\delta]$. Из (2.23) и (2.13), в силу вида функции R, следует (2.22). Учитывая (2.17), (2.20) и (2.21), систему дифференциальных уравнений (2.15) запишем в виде

$$\begin{cases} u_1'=h(t)\left[f_1(t,u_1,u_2)+(1-\sigma_s)u_2+V_1(u_1,u_2)\right], \\ \\ u_2'=h(t)\left[f_2(t,u_1,u_2)-u_1-2u_2+V_2(u_1,u_2)\right], \end{cases} \tag{2.24}$$

где

$$f_1(t,u_1,u_2) = R_1(t,u_1)(1+u_1)(1+u_2),$$

$$f_2(t,u_1,u_2) = (q(t)-1)((1+u_1)^{-1} + (\sigma_s - 1)(1+u_2))$$

$$+(1-\sigma_s)q(t)R_2(t,u_1)(1+u_1)^{-1}$$

$$+q(t)(1+(1-\sigma_s)R_2(t,u_1))R(t,u_1)(1+u_1)^{-1},$$

$$V_1(u_1,u_2) = (1-\sigma_s)u_1u_2, \quad V_2(u_1,u_2) = u_1^2(1+u_1)^{-1} - u_2^2.$$

В этой системе уравнений нелинейные слагаемые V_1 и V_2 удовлетворяют условиям

$$\lim_{|u_1|+|u_2|\to 0} \frac{V_i(u_1,u_2)}{|u_1|+|u_2|} = 0 \quad (i=1,2),$$

а в силу второго из условий (2.4), с учетом (2.19) и (2.22),

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_i(t,u_1,u_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad u_i \in [-\delta,\delta] \quad (i=1,2).$$

Кроме того,

$$\int\limits_{t_0}^{\omega} h(\tau)\,d\tau = \frac{1}{1-\sigma_s}\int\limits_{t_0}^{\omega} \frac{J_s(\tau)}{J_{ss}(\tau)}\,d\tau = \frac{1}{1-\sigma_s}\ln|J_{ss}(\tau)|\Bigg|_{t_0}^{\omega} = \pm\infty.$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы коэффициентов стоящих при u_1 и u_2 в квадратных скобках системы (2.24)

$$\rho^2 + 2\rho + 1 - \sigma_s = 0.$$

Так как $\sigma_s \neq 1$, то это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Тем самым показано, что для системы (2.24) выполняются все условия теоремы 2.2 из работы [19]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (2.24) имеет хотя бы одно решение $u = (u_1,u_2) : [t_*,\omega[\to \mathbb{R}^2$ $(t_* \geq t_0)$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$. Каждому такому решению системы (2.24) в силу замен (2.14) соответствует решение дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.7) и (2.8), причем это решение является $P_\omega(Y_0,1)$-решением уравнения (1.1). Более того, из этой теоремы следует, что уравнение (1.1) имеет однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда $\sigma_s > 1$ и двупараметрическое — когда $\sigma_s < 1$ и $\alpha_s\nu_1 = 1$. □

3. Случай, когда главным в правой части уравнения (1.1) является слагаемое с быстро меняющейся нелинейностью

Положим при $s \in \{l+1, ..., m\}$

$$\mu_s = \operatorname{sign} \varphi_s'(y)$$

и введем функцию

$$\Phi_s(y) = \int_{B_s}^{y} \frac{du}{|u|^{\frac{1}{2}} \varphi_s^{\frac{1}{2}}(u)},$$

в которой

$$B_s = \begin{cases} Y_0, & \text{если} \quad \int\limits_b^{Y_0} \frac{dy}{|y|^{\frac{1}{2}} \varphi_s^{\frac{1}{2}}(y)} = \ const, \\ b, & \text{если} \quad \int\limits_b^{Y_0} \frac{dy}{|y|^{\frac{1}{2}} \varphi_s^{\frac{1}{2}}(y)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Функция Φ_s сохраняет знак на промежутке $\Delta_{Y_0}(b)$, стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $y \to Y_0$ и является возрастающей на $\Delta_{Y_0}(b)$, поскольку на этом промежутке $\Phi_s'(y) = |y|^{-\frac{1}{2}} \varphi_s^{-\frac{1}{2}}(y) > 0$. Поэтому существует обратная возрастающая функция $\Phi_s^{-1} : \Delta_{Z_s}(c_s) \to \Delta_{Y_0}(b)$, где в силу второго из условий (1.3)

$$Z_s = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \Phi_s(y) = \begin{cases} \text{либо} \quad 0, \\ \text{либо} \quad +\infty, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\Delta_{Z_s}(c_s) = \begin{cases} [c_s, Z_s[, \ \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \\ ]Z_s, c_s], \ \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b], \end{cases} \qquad c_s = \Phi_s(b).$$

Далее, заметим, что

$$\left(\frac{\varphi_s^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}} \varphi_s'(y)} \right)' = \frac{1}{|y|^{\frac{1}{2}} \varphi_s^{\frac{1}{2}}(y)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\varphi_s(y)}{y \varphi_s'(y)} - \frac{\varphi_s''(y) \varphi_s(y)}{\varphi_s'^2(y)} \right].$$

Отсюда с учетом условий (1.3) и (1.6) получим соотношение

$$\left(\frac{\varphi_s^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}} \varphi_s'(y)} \right)' = \frac{1}{|y|^{\frac{1}{2}} \varphi_s^{\frac{1}{2}}(y)} \left[-\frac{1}{2} + o(1) \right] \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Интегрируя это предельное соотношение на промежутке от B_s до y и учитывая правило выбора предела интегрирования B_s в функции Φ_s, получим

$$\Phi_s(y) = -\frac{2\varphi_s^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi_s'(y)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0, \tag{3.2}$$

откуда с учетом знака φ_s' также следует, что

$$\operatorname{sign}\Phi_s(y) = -\mu_s \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}(b). \tag{3.3}$$

В силу (3.2) и (1.6) также имеем что

$$\frac{\Phi_s'(y)}{\Phi_s(y)} \sim -\frac{1}{2}\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0,$$

$$\frac{\Phi_s''(y)\Phi_s(y)}{\Phi_s'^2(y)} \sim 1 \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Таким образом, функция Φ_s принадлежит классу $\Gamma_{Y_0}(Z_s)$ и согласно лемме 2.5 из работы [15] в качестве дополняющей функции для Φ_s соответственно может быть выбрана одна из эквивалентных функций

$$\frac{\Phi_s'(y)}{\Phi_s''(y)} \sim \frac{\Phi_s(y)}{\Phi_s'(y)} \sim -\frac{2\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{3.4}$$

Так как

$$\lim_{z\to Z_s}\frac{z(\varphi_s(\Phi_s^{-1}(z)))'}{\varphi_s(\Phi_s^{-1}(z))} = \lim_{z\to Z_s}\frac{z\varphi_s'(\Phi_s^{-1}(z))|\Phi_s^{-1}(z)|^{\frac{1}{2}}\varphi_s^{\frac{1}{2}}(\Phi_s^{-1}(z))}{\varphi_s(\Phi_s^{-1}(z))}$$

$$= \lim_{y\to Y_0}\frac{\Phi_s(y)\varphi_s'(y)|y|^{\frac{1}{2}}}{\varphi_s^{\frac{1}{2}}(y)} = -2,$$

то функция $\varphi_s(\Phi_s^{-1}(z))$ является правильно меняющейся функцией порядка -2 при $z \to Z_s$.

Далее, введем также вспомогательные функции

$$J_{1s}(t) = \int\limits_{A_{1s}}^{t} p_{0s}^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau, \quad J_{2s}(t) = \int\limits_{A_{2s}}^{t} p_{0s}(\tau)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(\tau)))\,d\tau,$$

$$q_{1s}(t) = \frac{\alpha_s\nu_1 J_{2s}(t)}{p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t)|\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)|^{\frac{1}{2}}\varphi_s^{\frac{1}{2}}(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))},$$

$$q_{2s}(t)=\frac{\pi_\omega(t)p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t)\varphi_s^{\frac{1}{2}}(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}{|\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)|^{\frac{1}{2}}},$$

$$H_{1s}(t)=\frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\bigg|_{y=\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))}, \quad H_{2s}(t)=\frac{y\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}}\Bigg|_{y=\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))},$$

в которых $p_{0s}:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ — непрерывная функция, такая, что $p_{0s}(t)\sim p_s(t)$ при $t\uparrow\omega$, а пределы интегрирования A_{1s}, A_{2s} принадлежат множеству $\{a,\omega\}$ и выбраны по аналогии с выбором B_s в функции Φ_s так, чтобы каждый из интегралов J_{1s} и J_{2s} стремился либо к 0, либо к $\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$.

Теорема 3.1. *Пусть для некоторого $s\in\{l+1,...,m\}$ функция p_s представима в виде*

$$p_s(t)=p_{0s}(t)[1+r_s(t)], \quad \textit{где} \quad \lim_{t\uparrow\omega} r_s(t)=0, \tag{3.5}$$

$p_{0s}:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ *— непрерывно дифференцируемая функция,* $r_s:[a,\omega[\to]-1,+\infty[$ *— непрерывная функция, и справедливы условия*

$$\frac{\varphi_s(y)\varphi_i'(y)}{\varphi_s'(y)\varphi_i(y)}=O(1) \quad (i=\overline{l+1,m}) \quad \textit{при} \quad y\to Y_0. \tag{3.6}$$

Тогда для существования у дифференциального уравнения (1.1) $P_\omega(Y_0,1)$ *— решений, удовлетворяющих условиям* (1.8)*, необходимо чтобы наряду с* (1.10) *соблюдались условия*

$$\mu_s\nu_1 J_{1s}(t)<0 \quad \textit{при} \quad t\in]a,\omega[, \tag{3.7}$$

$$\nu_1\lim_{t\uparrow\omega} J_{1s}(t)=Z_s, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_{1s}'(t)}{J_{1s}(t)}=\pm\infty, \tag{3.8}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_{1s}(t)=1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_{2s}(t)=\pm\infty, \tag{3.9}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}=0 \quad \textit{при} \quad i\in\{1,...,m\}\setminus\{s\}. \tag{3.10}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$y(t)=\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\left[1+\frac{o(1)}{H_{1s}(t)}\right], \tag{3.11}$$

$$y'(t)=\nu_1 p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t)\varphi_s^{\frac{1}{2}}(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))|\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))|^{\frac{1}{2}}[1+o(1)]. \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, 1)$-решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее при некотором $s \in \{l+1, ..., m\}$ условиям (1.8). Тогда в силу (1.1), (1.8) и (3.5)

$$y''(t) = \alpha_s p_{0s}(t)\varphi_s(y(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.13}$$

Кроме того, для этого решения согласно (1.9)

$$y''(t) = \frac{y''(t)}{y'(t)} \cdot \frac{y'(t)}{y(t)} \cdot y(t) \sim \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 y(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу этого соотношения и (3.13) имеем

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 = \alpha_s p_{0s}(t) \frac{\varphi_s(y(t))}{y(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда с учетом неравенства (1.10)

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 = p_{0s}(t) \frac{\varphi_s(y(t))}{|y(t)|}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Из этого соотношения с учетом знаков y и y' находим

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \nu_0 \nu_1 p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t) \left(\frac{\varphi_s(y(t))}{y(t)}\right)^{\frac{1}{2}} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

или

$$\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\frac{1}{2}} \varphi_s^{\frac{1}{2}}(y(t))} = \nu_1 p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.14}$$

Интегрируя соотношение (3.14) на промежутке от t_1 ($t_1 \in [t_0, \omega[$) до t получим

$$\int\limits_{y(t_1)}^{y(t)} \frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}} \varphi_s^{\frac{1}{2}}(s)} = \nu_1 \int\limits_{t_1}^{t} p_{0s}^{\frac{1}{2}}(\tau)[1 + o(1)]\, d\tau \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поскольку согласно определению $P_\omega(Y_0, 1)$-решения $y(t) \to Y_0$ при $t \uparrow \omega$, то отсюда следует, что несобственные интегралы

$$\int\limits_{y(t_0)}^{Y_0} \frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}} \varphi_s^{\frac{1}{2}}(s)} \quad \text{и} \quad \int\limits_{t_0}^{\omega} p_{0s}^{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau$$

сходятся или расходятся одновременно. Ввиду этого факта и правила выбора пределов интегрирования A_{1s} и B_{1s} в введенных раннее функциях J_{1s} и Φ_{1s}, установленное выше соотношение может быть записано в виде

$$\Phi_s(y(t)) = \nu_1 J_{1s}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.15}$$

Отсюда с учетом условий (3.1) и (3.3) следует, что справедливо неравенство (3.7) и первое из условий (3.8). Кроме того, из (3.14) и (3.15) имеем

$$\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\frac{1}{2}}\varphi_s^{\frac{1}{2}}(y(t))\Phi_s(y(t))} = \frac{p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t)}{J_{1s}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

и поэтому в силу (3.2)

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi_s'(y(t))}{\varphi_s(y(t))} = -2\frac{\pi_\omega(t)J_{1s}'(t)}{J_{1s}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.16}$$

откуда ввиду (1.6) и соотношения (1.9) вытекает справедливость второго из условий (3.8). Из (3.15) следует, что

$$y(t) = \Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)[1+o(1)]) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.17}$$

Так как выполняется первое из условий (3.8), функция $\Phi_s^{-1}(z)$ является медленно меняющейся, а $\varphi_s(\Phi_s^{-1}(z))$ — правильно меняющейся при $z \to Z_s$ порядка -2, то согласно теореме о равномерной сходимости для медленно меняющихся функций (см., например, [1])

$$\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)[1+o(1)]) = \Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)[1+o(1)])) = \varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Ввиду этих асимптотических соотношений и (3.17) из (3.14) и (3.13) следует, что имеют место асимптотические представления (3.12) и

$$y''(t) = \alpha_s p_{0s}(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.18}$$

Интегрируя последнее соотношение на промежутке от t_2 до t, где $t_2 \in [t_1, \omega[$ выбрано таким, чтобы $\nu_1 J_{1s}(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_2, \omega[$, получим с учетом определения $P_\omega(Y_0, 1)$ – решения соотношение вида

$$y'(t) = \alpha_s J_{2s}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда и из (3.12) следует выполнение первого из условий (3.9). Второе из условий (3.9) следует из (3.12), (3.18) и того факта, что для $P_\omega(Y_0, 1)$-решений уравнения (1.1) $\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \pm\infty$.

Справедливость представления (3.11) непосредственно вытекает из (3.17) и леммы 2.3 из работы [15], если учесть, что функция $\Phi_s \in \Gamma_{Y_0}(Z_s)$ и в качестве дополняющей функции выбрать $g_s(y) = -\frac{2\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$.

Функции φ_i $(i = \overline{1,l})$ являются правильно меняющимися при $y \to Y_0$. Φ_s^{-1} является медленно меняющейся при $z \to Z_s$, как обратная от быстро меняющейся функции Φ_s. Кроме того, функция $z(t) = \nu_1 J_{1s}(t)[1+o(1)]$, с учетом первого из условий (3.8) и того факта, что $\nu_1 J_{1s}(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_1, \omega[$ (это вытекает из (3.15)), такова, что существует $t_2 \in [t_1, \omega[$, для которого $\lim_{t\uparrow\omega} z(t) = Z_s$ и $z(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_2, \omega[$. Следовательно, имеем

$$\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)[1+o(1)])) = \varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))[1+o(1)] \tag{3.19}$$

при $t \uparrow \omega$ $\quad (i = \overline{1,l})$. Если же $i \in \{l+1, ..., m\} \setminus \{s\}$, то каждая из функций φ_i удовлетворяет условиям леммы 2.2 из работы [15] и в качестве их дополняющих функций могут быть выбраны соответственно функции $g_i(y) = \frac{\varphi_i(y)}{\varphi_i'(y)}$. Тогда, согласно этой лемме с учетом условий $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) = Y_0$, $\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) \in \Delta_{Y_0}(b)$ при $t \in [t_2, \omega[$ и (3.6), получим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\varphi_i\Big(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}{\varphi_s'(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))} o(1)\Big)}{\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}$$

$$= \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_i\Big(y + g_i(y)\frac{\varphi_i'(y)\varphi_s(y)}{\varphi_i(y)\varphi_s'(y)} o(1)\Big)}{\varphi_i(y)}$$

$$= \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_i\Big(y + g_i(y)O(1)o(1)\Big)}{\varphi_i(y)} = \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_i\Big(y + g_i(y)o(1)\Big)}{\varphi_i(y)} = 1.$$

Поэтому при $i \in \{l+1, ..., m\} \setminus \{s\}$

$$\varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}{\varphi_s'(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))} o(1)\right)$$

$$= \varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

откуда, с учетом (1.6) и (3.11) имеем

$$\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)[1+o(1)]))$$

$$= \varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega \quad (i = \overline{l+1,m}). \tag{3.20}$$

Из (3.11), (3.19) и (3.20) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))[1+o(1)]}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))[1+o(1)]}$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}\quad (i=\overline{1,m}).$$

Из последнего равенства и (1.8) следует справедливость условий (3.10). □

При установлении следующего результата наряду с введенными ранее будем использовать также обозначения

$$h_s(t)=\frac{\nu_1\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))}{p_{0s}(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}\cdot\left(\frac{p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t)\varphi_s^{\frac{1}{2}}(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}{|\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))|^{\frac{1}{2}}}\right)',$$

$$\psi_s(t)=\int_{t_0}^{t}p_{0s}^{\frac{1}{2}}(\tau)|\varphi_s'(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(\tau)))|^{\frac{1}{2}}\,d\tau,$$

где t_0 — некоторое число из промежутка $[a,\omega[$.

Теорема 3.2. *Пусть для некоторого* $s\in\{l+1,...,m\}$ *функция* p_s *представима в виде* (3.5), *выполняются условия* (1.10), (3.6)–(3.10) *и существуют конечные или равные* $\pm\infty$ *пределы*

$$\gamma_s=\lim_{t\uparrow\omega}H_{2s}(t),\quad \lim_{t\uparrow\omega}h_s(t),$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|},\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\psi_s(t)\psi_s''(t)}{\psi_s'^2(t)}. \tag{3.21}$$

Тогда:

1) если $\alpha_s\mu_s=1$, *то у дифференциального уравнения* (1.1) *существует однопараметрическое семейство* $P_\omega(Y_0,1)$*-решений, допускающих асимптотические представления* (3.11), (3.12), *причем таких, производная которых удовлетворяет при* $t\uparrow\omega$ *асимптотическому соотношению*

$$y'(t)=(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))'[1+|H_{1s}(t)|^{-\frac{1}{2}}o(1)]; \tag{3.22}$$

2) если $\alpha_s\mu_s=-1$ *и соблюдаются условия*

$$\gamma_s\neq-\frac{1}{5},-1,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\psi_s(t)r_s(t)=0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\psi_s^2(t)[r_s(t)-h_s(t)]=0, \tag{3.23}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\psi_s^2(t)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{p_i(t)\varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}{p_s(t)\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}=0, \tag{3.24}$$

то у дифференциального уравнения (1.1) *существуют* $P_\omega(Y_0,1)$*-решения, допускающие при* $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$y(t)=\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\left[1+\frac{o(1)}{\psi_s(t)H_{1s}(t)}\right], \tag{3.25}$$

$$y'(t)=(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))'\left[1+\frac{o(1)}{\psi_s(t)|H_{1s}(t)|^{\frac{1}{2}}}\right], \tag{3.26}$$

причем таких решений существует двупараметрическое семейство в случае, когда $\gamma_s\in\left(-1,-\frac{1}{5}\right)$.

Доказательство. С использованием второго из предельных соотношений (3.9) нетрудно показать, что в случае существования конечного или равного $\pm\infty$ второго из пределов (3.21), он может быть равен только нулю. Кроме того, в работе А. Г. Черниковой [12] с заменой в ней функции φ на φ_s было показано, что третий из пределов (3.21) также равен нулю. Таким образом, имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}h_s(t)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi_s'(y)}{\varphi_s(y)}\right|}=0. \tag{3.27}$$

Кроме того, в силу (3.7), первого из условий (3.8), (3.1), (3.3) и (1.6) существует число $t_0\in[a,\omega[$ такое, что $\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\in\Delta_{Y_0}(b)$ при $t\in[t_0,\omega[$, и

$$\lim_{t\uparrow\omega}\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))=Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}H_{1s}(t)=\pm\infty. \tag{3.28}$$

Применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{gathered} y(t)=\Phi_s^{-1}\left(\nu_1 J_{1s}(t)\right)\left[1+\tfrac{y_1(t)}{H_{1s}(t)}\right], \\ y'(t)=\nu_1 p_{0s}^{\frac{1}{2}}(t)\varphi_s^{\frac{1}{2}}(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))|\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))|^{\frac{1}{2}}[1+y_2(t)], \end{gathered} \tag{3.29}$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'=h(t)H_{1s}(t)\left[\frac{H_{2s}(t)}{H_{1s}(t)}y_1+y_2\right], \\ y_2'=h(t)\Big[r_s(t)-h_s(t)+(1+r_s(t))y_1-(1+h_s(t))y_2+ \\ +(1+r_s(t))(R(t,y_1)+R_1(t,y_1)(R(t,y_1)+1+y_1))\Big], \end{cases} \tag{3.30}$$

в которой

$$h(t)=\frac{\nu_0\nu_1 q_{2s}(t)}{\pi_\omega(t)},$$

$$R(t,y_1)=\frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))+\frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}y_1\right)}{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}-1-y_1,$$

$$R_1(t,y_1)=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))+\frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}y_1\right)}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))+\frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}y_1\right)}.$$

Функция $R(t,y_1)$ такова, что для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta\in\,]0,1[$ и $t_1\in[t_0,\omega[$ такие, что

$$|R(t,y_1)|\le(1+\varepsilon)|y_1|^2\quad\text{при}\quad t\in[t_1,\omega[\quad\text{и}\quad y_1\in D_{1\delta},\tag{3.31}$$

где

$$y_1\in D_{1\delta}=\{y_1:|y_1|\le\delta\}.$$

Выбрав произвольным образом число $\varepsilon>0$, далее систему уравнений (3.30) рассмотрим на множестве

$$\Omega=[t_1,\omega[\times D_{1\delta}\times D_{2\delta},\quad\text{где}\quad D_{i\delta}=\{y_i:|y_i|\le\delta\}\quad(i=1,2).$$

Покажем, что функция $R_1(t,y_1)$ такова, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}R_1(t,y_1)=0\quad\text{равномерно по}\quad y_1\in D_{1\delta}.\tag{3.32}$$

Так как функции φ_i при $i\in\{1,...,l\}$ являются правильно меняющимися при $y\to Y_0$ $\;(y\in\Delta_{Y_0}(b))$ порядков σ_i, то в силу представлений (1.4) с учетом свойств медленно меняющихся функций и последнего из условий (3.28), имеем

$$\varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))+\frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}y_1\right)$$

$$=\varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\left[1+\frac{y_1}{H_{1s}(t)}\right]\right)$$

$$=\left|\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\left[1+\frac{y_1}{H_{1s}(t)}\right]\right|^{\sigma_i}L_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\left[1+\frac{y_1}{H_{1s}(t)}\right]\right)$$

$$= \left| \Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) \left[1 + \frac{y_1}{H_{1s}(t)} \right] \right|^{\sigma_i} L_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))(1 + r_i(t, y_1))$$

$$= \varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))) \left[1 + \frac{y_1}{H_{1s}(t)} \right]^{\sigma_i} (1 + r_i(t, y_1)), \quad (i = \overline{1, l}), \quad (3.33)$$

где функции $r_i(t, y_1)$ таковы, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_i(t, y_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad y_1 \in D_{1\delta}. \quad (3.34)$$

Поскольку функция φ_s принадлежит классу $\Gamma_{Y_0}(Z_s)$ и в качестве ее дополняющей функции может быть выбрана функция $g_s(y) = \frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)}$, то на основании леммы 2.3 из работы [15] получим

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\varphi_s\Big(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}{\varphi_s'(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))} y_1 \Big)}{\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}$$

$$= \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{\varphi_s\Big(y + \frac{\varphi_s(y)}{\varphi_s'(y)} \cdot y_1 \Big)}{\varphi_s(y)} = e^{y_1}.$$

Поэтому

$$\varphi_s\Big(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))}{\varphi_s'(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))} y_1 \Big)$$

$$= e^{y_1} \varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))[1 + r_s(t, y_1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad (3.35)$$

где функция $r_s(t, y_1)$ такова, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_s(t, y_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad y_1 \in D_{1\delta}. \quad (3.36)$$

В силу (1.6), (3.10), (3.33)–(3.36) имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \sum_{i=1}^{l} \frac{\alpha_i p_i(t) \varphi_i \left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)} y_1 \right)}{\alpha_s p_s(t) \varphi_s \left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)} y_1 \right)}$$

$$= \lim_{t \uparrow \omega} \sum_{i=1}^{l} \frac{\alpha_i p_i(t) \varphi_i(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))) \left[1 + \frac{y_1}{H_{1s}(t)} \right]^{\sigma_i} (1 + r_i(t, y_1))}{\alpha_s p_s(t) e^{y_1} \varphi_s(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)))(1 + r_s(t, y_1))}$$

$$= 0 \quad \text{равномерно по} \quad y_1 \in D_{1\delta}. \quad (3.37)$$

Если же $i \in \{l+1, ..., m\} \setminus \{s\}$, то в силу выполнения условий (3.6) для любого $C_i > 1$ существует $t_{2i} \in [t_1, \omega[$ такое, что при $t \in [t_{2i}, \omega[$ ввиду монотонности функции φ_i на промежутке $\Delta_{Y_0}(b)$

$$\varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) - \frac{\varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_i'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)} C_i |y_1|\right)$$

$$\le \varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)} y_1\right)$$

$$\le \varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_i'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)} C_i |y_1|\right). \qquad (3.38)$$

Так как функция φ_i при $i \in \{l+1, ..., m\}$ принадлежит классу $\Gamma_{Y_0}(Z_i)$ и имеет дополняющую функцию вида $g_i(y) = \frac{\varphi_i(y)}{\varphi_i'(y)}$, то переходя в неравенстве (3.38) к пределу при $t \uparrow \omega$, с учетом свойств функций из класса $\Gamma_{Y_0}(Z_i)$ (см. работу [15]) получим

$$e^{-C_i|y_1|} \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)$$

$$\le \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)} y_1\right)$$

$$\le e^{C_i|y_1|} \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right).$$

В силу последнего неравенства и (3.35) для каждого $i \in \{l+1, ..., m\} \setminus \{s\}$ имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t) e^{-C_i|y_1|} \varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{p_s(t) e^{y_1} \varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)(1 + r_s(t, y_1))}$$

$$\le \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)} y_1\right)}{p_s(t)\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)} y_1\right)}$$

$$\le \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t) e^{C_i|y_1|} \varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{p_s(t) e^{y_1} \varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)(1 + r_s(t, y_1))},$$

откуда, с учетом (3.10) и (3.36), следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \sum_{\substack{i=l+1\\ i\neq s}}^{m} \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)} y_1\right)}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t)) + \frac{\varphi_s\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)}{\varphi_s'\left(\Phi_s^{-1}(\nu_1 J_{1s}(t))\right)} y_1\right)} = 0$$

равномерно по $y_1 \in D_{1\delta}$. Из последнего соотношения и (3.37) следует справедливость (3.32).

Далее, применяя к системе (3.30) преобразование

$$\tau = \psi_s(t), \quad y_1(t) = z_1(\tau), \quad y_2(t) = |H_{1s}(t)|^{-\frac{1}{2}} z_2(\tau), \tag{3.39}$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = c_{11}(\tau)z_1 + c_{12}(\tau)z_2, \\ z_2' = f(\tau) + c_{21}(\tau)z_1 + c_{22}(\tau)z_2 + Z_1(\tau, z_1) + Z_2(\tau, z_1), \end{cases} \tag{3.40}$$

в которой

$$f(\tau(t)) = \alpha_s \nu_1 [r_s(t) - h_s(t)],$$

$$c_{11}(\tau(t)) = \frac{\nu_0 \nu_1 H_{2s}(t)}{|H_{1s}(t)|^{\frac{1}{2}}}, \quad c_{12}(\tau(t)) = \nu_1 \mu_s, \quad c_{21}(\tau(t)) = \alpha_s \nu_1 (1 + r_s(t)),$$

$$c_{22}(\tau(t)) = \alpha_s \nu_1 |H_{1s}(t)|^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} - h_s(t) + \frac{1}{2} H_{2s}(t) \right],$$

$$Z_1(\tau(t), z_1) = \alpha_s \nu_1 R(t, z_1)(1 + r_s(t)),$$

$$Z_2(\tau(t), z_1) = \alpha_s \nu_1 R_1(t, z_1)(R(t, z_1) + z_1 + 1)(1 + r_s(t)).$$

Так как $\tau'(t) > 0$ при $t \in [t_1, \omega[$ и $\tau(t) \to +\infty$ при $t \uparrow \omega$, то система (3.40) задана на множестве $[0, +\infty[\times D_{1\delta} \times D_{2\delta}$, причем в ней в силу (1.6), (3.5), (3.27), (3.31) и (3.32)

$$\lim_{\tau \to +\infty} f(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \to +\infty} c_{11}(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \to +\infty} c_{12}(\tau) = \nu_1 \mu_s,$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} c_{21}(\tau) = \alpha_s \nu_1, \quad \lim_{\tau \to +\infty} c_{22}(\tau) = 0,$$

$$|Z_1(\tau, z_1)| \le (1 + \varepsilon)|z_1|^2 \quad \text{при} \quad \tau \in [0, +\infty[\quad \text{и} \quad |z_1| \le \delta,$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} Z_2(t, z_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z_1 \in D_{1\delta}.$$

Характеристическое уравнение предельной матрицы коэффициентов линейной части (3.40) имеет вид

$$\rho^2 - \alpha_s \mu_s = 0. \tag{3.41}$$

Если $\alpha_s \mu_s = 1$, то корни алгебраического уравнения (3.41) являются вещественными числами разных знаков. В этом случае, согласно теореме 2.2 из работы [19], система дифференциальных уравнений (3.40) имеет однопараметрическое семейство решений $(z_1, z_2) : [\tau_*, +\infty[\to \mathbb{R}^2 \quad (\tau_* \ge 0)$, стремящихся к нулю при $\tau \to +\infty$. Каждому из них, в силу замен (3.29) и (3.39), соответствует решение $y : [t_*, \omega[\to \mathbb{R}$ ($t_* \in [a, \omega[$) дифференциального уравнения (1.1), допускающее асимптотические представления (3.11) и (3.22). Следовательно, справедливо первое утверждение теоремы.

Пусть теперь $\alpha_s \mu_s = -1$. Тогда корни уравнения (3.41) являются чисто мнимыми и поэтому данный случай является "критическим". Применяя к системе (3.40) последовательно преобразования

$$z_1(\tau) = u_1(\tau), \quad z_2(\tau) = \frac{\nu_0 \nu_1}{2\tau} u_1(\tau) + u_2(\tau), \tag{3.42}$$

$$\begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\alpha_s \nu_1 \sin\tau \\ \alpha_s \nu_1 \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(\tau) \\ w_2(\tau) \end{pmatrix}, \tag{3.43}$$

$$w_i(\tau) = \frac{x_i(\tau)}{\tau} \quad (i = 1, 2), \tag{3.44}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$x_i' = p(\tau) x_i + g(\tau) \sum_{m=1}^{2} Z_{im}(\tau, x_1, x_2) \quad (i = 1, 2), \tag{3.45}$$

в которой

$$p(\tau) = \frac{1}{2}(c_{11}(\tau) + c_{22}(\tau)) + \frac{1}{\tau}, \qquad g(\tau) = \frac{1}{\tau},$$

функции Z_{ij} $(i, j = 1, 2)$ непрерывны на множестве $[\tau_0, +\infty[\times \mathbb{R}_0^2$, где $\mathbb{R}_0^2$ — некоторая окрестность точки (0,0), и в силу условий (3.23), (3.24) таковы, что

$$Z_{i2}(\tau, 0, 0) \equiv 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{на промежутке} \quad [\tau_0, +\infty[,$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} Z_{i1}(\tau, x_1, x_2) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{равномерно по} \quad x_1, x_2 \in [-\delta, \delta],$$

$$\lim_{|x_1| + |x_2| \to 0} \frac{Z_{i2}(\tau, x_1, x_2)}{|x_1| + |x_2|} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

равномерно по $\tau \in [\tau_0, +\infty[$.

Кроме того, выполняются условия

$$p(\tau) \neq 0 \quad \text{при} \quad \tau \in [\tau_0, +\infty[, \qquad \left| \int_{\tau_0}^{+\infty} p(x)\, dx \right| = +\infty,$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{g(\tau)}{p(\tau)} = \frac{2(\gamma_s + 1)}{5\gamma_s + 1}.$$

Поэтому для системы (3.45) выполнены все условия теоремы 1.2 из работы [19]. Согласно этой теореме, система дифференциальных уравнений (3.45) имеет хотя бы одно решение $(x_1, x_2) : [\tau_1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ $(\tau_1 \geq \tau_0)$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем, если $\gamma_s \in (-1, -1/5)$, то таких решений существует целое двупараметрическое семейство. Каждому такому решению системы (3.45) в силу замен (3.29), (3.39), (3.42)–(3.44) соответствует решение $y : [t_2, \omega[\to \mathbb{R}$ $(t_2 \in [a, \omega[)$ дифференциального уравнения (1.1) с асимптотическими представлениями (3.25), (3.26). □

Выводы

В настоящей работе впервые для уравнения (1.1) установлены условия существования $P_\omega(Y_0, 1)$–решений. Также найдены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ $(\omega \leq +\infty)$ для таких решений и их производных первого порядка и выяснен вопрос о их количестве.

Литература

[1] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, М., Наука, 1985.

[2] V. Maric, *Regular Variation and Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics 1726*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.

[3] В. М. Евтухов, В. А. Касьянова, *Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. I* // Укр. Мат. журнал, **57** (2005), No. 3, 338–355.

[4] В. М. Евтухов, В. А. Касьянова, *Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. II* // Укр. Мат. журнал, **58** (2006), No. 7, 901–921.

[5] В. М. Евтухов, Л. А. Кириллова, *Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка* // Дифференц. уравнения, **41** (2005), No. 8, 1053–1061.

[6] T. Kusano, J. Manojlovic, V. Maric, *Increasing solutions of Thomas-Fermi type differential equations - the sublinear case* // Bull. T. de Acad. Serbe Sci. Arts, Classe Sci. Mat. Nat., Sci. Math., **CXLIII** (2011), No. 36, 21–36.

[7] V. Maric, J. Manojlovic, *An asymptotic analysis of positive solutions of Thomas-Fermi type sublinear differential equations* // Mem. Differential Equations Math. Phys., **57** (2012), No. 1, 75–94.

[8] V. Maric, Z. Radasin, *Asymptotic behavior of solutions of the equation $y'' = f(t)\Phi(\Psi(y))$* // Glasnik matematicki, **23** (1988), No. 1, 27–34.

[9] V. Maric, M. Tomic, *Asymptotics of solutions of a generalised Thomas-Fermi equations* // Differential Equations, **35** (1980), No. 1, 36–44.

[10] S. D. Taliaferro, *Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \varphi(t)f(y)$* // SIAM J. Math. Anal., **12** (1981), No. 6, 853–865.

[11] В. М. Евтухов, В. М. Харьков, *Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка* // Дифференц. уравнения, **43** (2007), No. 9, 1311–1323.

[12] А. Г. Черникова, *Асимптотика быстро изменяющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью* // Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех., **20** (2015), No. 2, 52–68.

[13] В. М. Евтухов, А. Г. Черникова, *Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью* // Нелинейные колебания, **19** (2016), No. 4, 458–475.

[14] В. М. Евтухов, А. Г. Черникова, *Асимптотическое поведение медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью* // Нелинейные колебания, **20** (2017), No. 3, 346–360.

[15] В. М. Евтухов, А. Г. Черникова, *Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями* // Укр. мат. журн., **69** (2017), No. 10, 1345–1363.

[16] В. М. Евтухов, *Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*: Дис... д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.02, Одесский гос. ун-т им. И. И. Мечникова, Одесса, 1997.

[17] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*, Cambridge university press, Cambridge, 1987.

[18] В. М. Евтухов, А. М. Самойленко, *Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями* // Дифференциальные уравнения, **47** (2011), No. 5, 628–650.

[19] В. М. Евтухов, А. М. Самойленко, *Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений* // Укр. мат. журн., **62** (2010), No. 1, 52–80.

Сведения об авторах

Вячеслав Михайлович Евтухов
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
Одесса, Украина
E-Mail: `emden@farlep.net`

Наталия Павловна Колун
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
Одесса, Украина
E-Mail: `nataliiakolun@ukr.net`