Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 4, 576 – 591

Квазілінійні параболічні рівняння з виродженим потенціалом абсорбції

Євгенія О. Євгеньєва

(*Представлена І. І. Скрипніком*)

Анотація. У роботі розглядаються квазілінійні параболічні рівняння з виродженим потенціалом абсорбції. Отримано оцінку усіх слабких розв'язків таких рівнянь, у тому числі великих розв'язків, які задовольняють нескінченним умовам на параболічний границі області.

2010 MSC. 35K59, 35B44, 35K58, 35K65.

Ключові слова та фрази. Квазілінійне параболічне рівняння, великий розв'язок, потенціал абсорбції.

1. Вступ та формулювання основного результату

У роботі розглядаються квазілінійні параболічні рівняння із виродженим потенціалом абсорбції:

$$(|u|^{p-1}u)_t - \sum_{i=1}^{n}(a_i(t,x,u,\nabla u))_{x_i} = -b(t,x)|u|^{\lambda-1}u \quad \text{в } Q,\ \lambda > p > 0, \tag{1.1}$$

де циліндрична область $Q = (0,T)\times\Omega$, $0 < T < \infty$, $\Omega \subset R^n$ $(n \geqslant 1)$ – обмежена область з C^2–гладкою межею $\partial\Omega$. Функції $a_i(t,x,s,\xi)$ $(i = 1,2,...,n)$ – неперервні функції, що задовольняють наступним умовам коерцитивності та росту:

$$d_0|\xi|^{p+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,s,\xi)\xi_i \quad \forall (t,x,s,\xi) \in \bar{Q}\times R^1 \times R^n;\ d_0 = \text{const} > 0; \tag{1.2}$$

Стаття надійшла в редакцію 25.11.2018

$$|a_i(t,x,s,\xi)| \leqslant d_1|\xi|^p$$
$$\forall (t,x,s,\xi) \in \bar{Q} \times R^1 \times R^n;\ i = 1,...,n;\ d_1 = \mathrm{const} < \infty. \quad (1.3)$$

Модельним представником (1.1) є наступне рівняння:

$$(|u|^{p-1}u)_t - \Delta_p u = -b(t,x)|u|^{\lambda-1}u, \quad \lambda > p > 0, \quad (1.4)$$

де $\Delta_p(u) = \sum_{i=1}^n \left(|\nabla_x u|^{p-1}u_{x_i}\right)_{x_i}$ – p-лапласіан.

Функція $b(t,x)$ (потенціал абсорбції) є неперервною в області $[0,T] \times \overline{\Omega}$ та задовольняє умовам виродження:

$$b(t,x) > 0 \quad \text{в } [0,T) \times \overline{\Omega}, \quad b(t,x) = 0 \quad \text{на } \{T\} \times \Omega. \quad (1.5)$$

У роботі розглядаються слабкі розв'язки рівняння (1.1).

Означення 1.1. *Функція* $u(t,x) \in C_{loc}((0,T); L^{p+1}_{loc}(\Omega))$ *називається* **слабким розв'язком** *рівняння* (1.1)*, якщо:*

$$u(t,x) \in L^{p+1}_{loc}\left((0,T); W^{1,p+1}_{loc}(\Omega)\right) \cap L^{\lambda+1}_{loc}\left((0,T) \times \Omega\right),$$
$$(|u|^{p-1}u)_t \in L^{\frac{p+1}{p}}_{loc}\left((0,T); (W^{1,p+1}_c(\Omega))^*\right) + L^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}_{loc}\left((0,T); (L^{\lambda+1}_c(\Omega))^*\right)$$

і виконується наступна інтегральна тотожність:

$$\int_a^b \langle (|u|^{p-1}u)_t, \eta \rangle dt + \int_a^b \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla u)\eta_{x_i} + b(t,x)|u|^{\lambda-1}u\eta\right] dxdt = 0 \quad (1.6)$$

для довільних $0 < a < b < T$ *та довільної функції*

$$\eta(t,x) \in L^{p+1}_{loc}\left((0,T); W^{1,p+1}_c(\Omega)\right) \cap L^{\lambda+1}_{loc}\left((0,T); L^{\lambda+1}_c(\Omega)\right),$$

де $W^{1,p+1}_c(\Omega)$, $L^{\lambda+1}_c(\Omega)$ *є підпросторами* $W^{1,p+1}(\Omega)$, $L^{\lambda+1}(\Omega)$ *функцій з компактним носієм в* Ω*, а знаком* $<,>$ *позначається операція парування елементів з просторів* $W^{1,p+1}_c(\Omega) \cap L^{\lambda+1}_c(\Omega)$ *і* $\left(W^{1,p+1}_c(\Omega) \cap L^{\lambda+1}_c(\Omega)\right)^*$.

Означення 1.2. *Функція* $u(t,x)$ *називається* **великим розв'язком** *рівняння* (1.1)*, якщо вона є слабким розв'язком рівняння* (1.1) *та задовольняє наступним нескінченим початковим та крайовим умовам:*

$$u = \infty \ \text{на } \{0\} \times \Omega, \quad \text{тобто } u \to \infty \text{ при } t \to 0 \text{ рівномірно } \forall\, x \in \Omega, \quad (1.7)$$

$$u = \infty \textit{ на } (0,T) \times \partial\Omega,$$
$$\textit{тобто } u \to \infty \textit{ при } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \to 0 \textit{ рівномірно } \forall\, t \in (0,T), \quad (1.8)$$

Існування *слабких розв'язків* для таких рівнянь, як (1.1), з довільними скінченими початковими та крайовими умовами було доведено у класичних роботах 1980-1990-х років, [1, 8, 9].

Існування *великих розв'язків* та їх властивості вивчалися багатьма авторами, а саме L. Veron, W. Al Sayed, C. Bandle, G. Diaz, J.I. Diaz, Y. Du, R. Peng, P. Polaĉik та інші (див. [2, 3, 11, 12, 18] та посилання в них). В цих роботах були розглянуті лінійні ($p = 1$) або напівлінійні рівняння. Для більш загального рівняння (1.1) у випадку $p \neq 1$ існування не доведено. У роботі питання існування не підіймається. Тим не менш, основний результат роботи отримано для всього класу слабких розв'язків, включаючі великі розв'язки (якщо такі існують).

У 2012 році у роботі [3] Y. Du, R. Peng та P. Polaĉik розглянули лінійний випадок рівняння (1.4), а саме:

$$u_t - \Delta u = -b(t,x)|u|^{\lambda-1}u, \quad (t,x) \in Q, \quad \lambda > 1 \qquad (1.9)$$

з умовами (1.5), (1.7), (1.8). На потенціал абсорбції $b(t,x)$ накладається також додаткова умова:

$$a_1(t)d(x)^{\beta} \leqslant b(t,x) \leqslant a_2(t)d(x)^{\beta} \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Omega,\ \beta > -2, \quad (1.10)$$

де $a_1(t)$, $a_2(t)$ є додатними неперервними функціями на проміжку $[0,T)$, $d(x) := dist\{x, \partial\Omega\}$. За умови (1.10) доведено існування максимального $\overline{u}$ та мінімального $\underline{u}$ додатних розв'язків задачі. Більш того, у роботі [3] показано, що за наступної додаткової умови на виродження функції $a_1(t)$ біля $t = T$:

$$a_1(t) \geqslant c_0(T-t)^{\mu} \quad \text{в } [0,T),\ c_0 = const > 0,\ \mu = const > 0 \qquad (1.11)$$

для всіх $t_0 \in (0,T)$, існує константа $C = C(t_0) < \infty$ така, що:

$$\overline{u}(t,x) \leqslant C \min\left\{(T-t)^{-\frac{\mu}{\lambda-1}}, d(x)^{-\frac{2\mu}{\lambda-1}}\right\} d(x)^{-\frac{2+\beta}{\lambda-1}} \quad \forall (t,x) \in [t_0,T) \times \Omega. \qquad (1.12)$$

Основною метою поточної роботи є узагальнення результату (1.12) на рівняння (1.1). Для отримання оцінки буде використано метод енергетичних оцінок, у той час як результат (1.12) було отримано за допомогою порівняння з автомодельними розв'язками. Метод енергетичних оцінок вперше був запропонований у 1999 році у роботі [14]. Він полягає в оцінці перетоків енергії у сімействі часових шарів, що накопичуються біля часу T. Такий підхід дозволяє відійти від автомодельності, він є більш універсальним та не вимагає використання теорем порівняння. Описаний метод був розроблений для знаходження умов локалізації граничних режимів із загостренням для двічі нелінійних параболічних рівнянь у серії робіт [4–7]. Пізніше у роботах [13, 15, 17] цей метод був застосований для дослідження великих квазілінійних параболічних рівнянь з нелінійною виродною абсорбцією. Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1.1. *Нехай u – довільний слабкий розв'язок рівняння* (1.1). *Припустимо, що потенціал абсорбції задовольняє умові* (1.5) *та*

$$a_1(t)g_1(d(x)) \leqslant b(t,x) \leqslant a_2(t)g_2(d(x)) \qquad \forall\,(t,x) \in [0,T) \times \Omega. \quad (1.13)$$

Тут $g_1(s) \leq g_2(s)$ – довільні неспадні додатні для всіх $s > 0$ функції. А функція $a_1(t)$ задовольняє нерівність:

$$a_1(t) \geqslant \kappa^{-1}(T-t)^{\mu} \quad \forall\, t < T,$$
$$\kappa = const > 0,\ \mu > \frac{(p+2)(\lambda-p)}{(p+1)^2}. \quad (1.14)$$

Тоді для всіх $\frac{T}{2} < t < T$ має місце наступна оцінка:

$$h(t,s) + E(t,s) := \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{p+1}dx + \int_{\frac{T}{2}}^{t}\int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1}dxd\tau$$
$$\leqslant K\,\kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}} \min_{0<\bar{s}<s}\left\{(s-\bar{s})^{-\theta}G_1(\bar{s})\right\} \qquad \forall\, s \in (0,\tilde{s}),$$
$$G_1(s) := \left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}dh\right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}, \quad (1.15)$$

де $\theta = \frac{(p+1)(\mu(p+1)-(\lambda-p))}{\lambda-p}$, константа $K < \infty$ залежить тільки від відомих параметрів задачі, $\tilde{s} > 0$, область $\Omega(s)$ визначається наступним чином:

$$\Omega(s) := \{x \in \Omega : d(x) > s\}, \quad s > 0. \quad (1.16)$$

Для того, щоб більш зрозуміло продемонструвати структуру результату, приведемо отриманий результат для простого випадку.

Наслідок 1.1. *Нехай $g_1(s) = as^{\varrho}$, $a = const > 0$, $\varrho = const \geqslant 0$. Тоді*

$$G_1(s) = a^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}\left(1 + \frac{\varrho(p+1)}{1+p(\lambda+2)}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} s^{-\eta}, \quad (1.17)$$

де $\eta = \eta(\varrho) = \frac{(\varrho+1)(p+1)+p(\lambda+1)}{\lambda-p}$. *У цьому випадку оцінка* (1.15) *приводить до:*

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant \overline{K}\,\kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}} s^{-(\theta+\eta)} \quad \forall\, t \in \left(\frac{T}{2}, T\right), \forall\, s \in (0, \tilde{s}), \quad (1.18)$$

де $\overline{K} = \overline{K}(a,\varrho) = K_1 a^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \left(1 + \frac{\varrho(p+1)}{1+p(\lambda+2)}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} \frac{(\theta+\eta)^{\theta+\eta}}{\theta^\theta \eta^\eta}$, K_1, θ *з* (1.15), η *з* (1.17).

Зауваження 1.1. Важливо відзначити, що оцінка (1.15) отримана для будь-яких слабких розв'язків рівняння (1.1), не залежно від поведінки на параболічній границі. Тож оцінка справедлива і для великих розв'язків (за умов (1.7), (1.8)). У роботі не доводиться існування великих розв'язків для загального нелінійного рівняння (1.1), тож це питання залишається відкритим.

Отриманий у теоремі 1.1 результат позиціонується, як розширення уже існуючого результату (1.12) (Y. Du, R. Peng та P. Polaĉik, [3]). Наступне твердження показує оцінку (1.15) для лінійного випадку.

Наслідок 1.2. *Розглянемо лінійний випадок рівняння* (1.4)*, коли* $p = 1$. *Припустимо також, що за умов теореми 1.1* $g_1(s) = s^\beta$, $\beta = const \geqslant 0$*, де функція* g_1 *з умови* (1.13). *Тоді усі слабкі розв'язки рівняння* (1.4) *задовольняють оцінку:*

$$u(t,x) \leqslant \widetilde{K} d(x)^{-\left(\frac{2\mu+\beta+2}{\lambda-1} - \frac{1}{2}\right)} \quad \forall (t,x) \in \left(\frac{T}{2}, T\right) \times \Omega, \qquad (1.19)$$

де $\widetilde{K} = \overline{K}\kappa^{\frac{2}{\lambda-1}}$.

Доведення цього твердження приведено у пункті 4.

2. Допоміжні результати

Метод енергетичних оцінок передбачає аналіз енергетичних функцій, тож визначимо їх для слабких розв'язків $u(t,x)$ рівняння (1.1):

$$\begin{aligned} E(t) = E^{(u)}(t) &:= \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau, \\ h(t) = h^{(u)}(t) &:= \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |u(\tau,x)|^{p+1} dx \qquad \forall\, t < T, \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Ці функції визначають поведінку довільного розв'язку u. Для того, щоб вивчити поведінку біля границі області Ω, параметризуємо енергетичні функції за допомогою параметра s, який визначатиме відстань від довільної точки області до її границі $\partial\Omega$. Розглянемо сімейство підобластей $\Omega(s)$, які були визначені в (1.16), та введемо до розгляду функції $E(t,s)$ та $h(t,s)$, які визначені у (1.15).

Слід відмітити, що в силу гладкості області $\Omega(s)$, існує таке число s_Ω, яке визначає "радіус" цієї області. Це таке число, для якого функція $d(\cdot) \in C^2(\Omega \setminus \Omega(s))$ $\forall s \leqslant s_\Omega$ і, відповідно, границя $\partial\Omega(s)$ є C^2–гладким многовидом для всіх $0 < s \leqslant s_\Omega$. Тож параметризовані енергетичні функції $E(t,s)$, $h(t,s)$ визначаються саме на проміжку $s \in (0, s_\Omega)$:

$$\begin{aligned} E(t,s) &:= \int_{\frac{T}{2}}^{t} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau, \\ h(t,s) &:= \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{p+1} dx \qquad \forall\, s \in (0,s_\Omega),\, \forall\, t \in (0,T). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Для доведення теореми 1.1 необхідно дослідити функції $E(t,s)$, $h(t,s)$. Для цього розіб'ємо інтервал $[0,T)$ за допомогою зростаючої послідовності точок $\{t_j\}$ ($j = 1,2,...,j_0 \leqslant \infty$, $t_0 = 0$, $t_{j_0} = T$). Таким чином отримаємо інтервали $[t_{j-1}, t_j)$ довжини $\Delta_j := t_j - t_{j-1} > 0$. Тепер розглянемо наступні пошарові енергетичні функції:

$$\begin{aligned} E_j(s) &:= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(t,x)|^{p+1} dx dt, \\ h_j(s) &:= \sup_{t_{j-1} \leqslant t < t_j} \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{p+1} dx \qquad \forall\, j \leqslant j_0,\, \forall\, s \in (0,s_\Omega). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для цих функцій маємо наступну лему.

Лема 2.1. *Нехай $u(t,x)$ – довільний слабкий розв'язок рівняння* (1.1) *з умовою* (1.5) *на потенціал абсорбції $b(t,x)$. Тоді для майже всіх $s \in (0,s_\Omega)$ справедлива система диференціальних нерівностей:*

$$E_j(s) + h_j(s) \leqslant C_1 h_{j-1}(s) + C_2 \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \left(-\frac{d}{ds} E_j(s) \right), \quad j = 1,2,..., \tag{2.4}$$

$$h_j(s) \leqslant (1+\gamma) h_{j-1}(s) + C_3 \gamma^{-\frac{1}{p+1}} \Delta_j^{\frac{1}{p+1}} \left(-\frac{d}{ds} E_j(s) \right), \quad j = 1,2,..., \tag{2.5}$$

для довільного $\gamma : 0 < \gamma < 1$. Додатні константи $C_1 < \infty$, $C_2 < \infty$, $C_3 < \infty$ залежать тільки від відомих параметрів задачі і не залежать від γ, функції $E_j(s)$ та $h_j(s)$ визначені в (2.3).

Оскільки потенціал абсорбції $b(t,x) \geqslant 0 \;\forall\,(t,x) \in \overline{Q}$, то доведення леми 2.1 є аналогічним до доведення леми 6.2.3 в [10] або леми 2.2 в [15].

Наступним кроком доведення основної теореми 1.1 є аналіз асимптотичних властивостей розв'язків системи (2.4). Повторюючи усі кроки доведення теореми 1.1 з [16] можна отримати наступний результат.

Лема 2.2. *Нехай $u(t,x)$ – довільний слабкий розв'язок рівняння* (1.1) *з наступною умовою на енергію:*

$$E(t) + h(t) \leqslant F_\alpha(t) := \omega_0 (T-t)^{-\alpha} \quad \forall\, t < T, \tag{2.6}$$

де $\omega_0 > 0$, $\alpha > \frac{1}{p+1}$ – довільні константи. Тоді існує константа $G < \infty$, що залежить тільки від відомих параметрів задачі, і число $\hat{s} > 0$ такі, що виконується наступна рівномірна апріорна оцінка:

$$E(t,s) + h(t,s) \leqslant G\omega_0 s^{-\alpha(p+1)} \quad \forall\, t < T,\, \forall\, s \in (0,\hat{s}). \tag{2.7}$$

де $h(t,s)$, $E(t,s)$ – енергетичні функції, визначені в (2.2).

Таким чином наступний крок доведення теореми 1.1 є отримання умов (2.6) для енергетичних функцій.

3. Доведення теореми 1.1

Нехай $\Omega(s)$ – сімейство підобластей з (1.16). Введемо до розгляду додаткове сімейство циліндричних підобластей області Q:

$$Q_\tau(s) := (s^r, \tau) \times \Omega(s) \quad \forall s \in (0, s_\Omega),\ \forall \tau < T,$$
$$1 < r < 1 + \frac{p\,(\lambda+1)}{p+1}. \tag{3.1}$$

Тепер визначимо енергетичні функції для розв'язку u рівняння (1.1) з урахуванням потенціалу абсорбції b та умов (1.13) для нього:

$$\begin{gathered}
\overline{h}_\tau(s) = \overline{h}_\tau^{(u)}(s) := \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{p+1} dx, \quad 0 < \tau < T,\, 0 < s < s_\Omega, \\
\overline{E}_\tau(s) = \overline{E}_\tau^{(u)}(s) := \int_{s^r}^{\tau} \int_{\Omega(s)} (|\nabla_x u|^{p+1} + a_1(t) g_1(d(x)) |u|^{\lambda+1}) dx dt.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Лема 3.1. *Нехай u – довільний слабкий розв'язок рівняння* (1.1)*. І нехай потенціал абсорбції $b(t,x)$ задовольняє умовам* (1.5), (1.13).

Тоді енергетичні функції (3.2) *задовольняють наступне співвідношення:*

$$
\begin{aligned}
&B_\tau(s) := \overline{h}_\tau(s) + \overline{E}_\tau(s) \leqslant \widehat{C}\,\Phi(\tau)G_1(s) \quad \forall\, s \in (0, \hat{s}),\\
&\Phi(\tau) = \int_0^\tau a_1(t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}}dt, \quad G_1(s) = \Big(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}dh\Big)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

де $\widehat{C} = const > 0$, $\hat{s} \in (0, s_\Omega)$ *залежать лише від відомих параметрів задачі.*

Доведення. Зафіксуємо $s > 0$, $\delta > 0$ та введемо до розгляду Ліпшицеву зрізаючу функцію $\xi_{s,\delta}(h) : \xi_{s,\delta}(h) = 0$ для $h \leqslant s$, $\xi_{s,\delta}(h) = 1$ для $h > s+\delta$, $\xi_{s,\delta}(h) = \frac{h-s}{\delta}$ для $h : s < h < s+\delta$. Тепер побудуємо тестову функцію $\eta(t,x) = u(t,x)\xi_{s,\delta}(d(x))$ для інтегральної тотожності (1.6). Тепер, користуючись формулою інтегрування частинами (див. [1]), отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&\frac{p}{p+1}\int_{\Omega(s)} |u(b,x)|^{p+1}\xi_{s,\delta}(d(x))dx\\
&\quad + \int_a^b \int_{\Omega(s)} \Big(\sum_{i=1}^n a_i(...,\nabla_x u)u_{x_i} + b(t,x)|u|^{\lambda+1}\Big)\xi_{s,\delta}(d(x))dxdt\\
&\qquad = \frac{p}{p+1}\int_{\Omega(s)} |u(a,x)|^{p+1}\xi_{s,\delta}(d(x))dx\\
&\qquad - \int_a^b \int_{\Omega(s)\setminus\Omega(s+\delta)} \sum_{i=1}^n a_i(...,\nabla_x u)u\xi_{s,\delta}(d(x))_{x_i}dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Далі у (3.4) візьмемо $b = \tau < T$, $a = s^r$. Тоді, спрямовуючи до нуля $\delta \to 0$ та користуючись умовами (1.2), (1.3), отримаємо наступну нерівність:

$$
\overline{h}_\tau(s) + \overline{E}_\tau(s) \leqslant c_1 \int_{s^r}^\tau \int_{\partial\Omega(s)} |\nabla_x u|^p |u|\, d\sigma dt + c_2\overline{h}_{s^r}(s) \quad \forall\, s \in (0, s_\Omega),
\tag{3.5}
$$

де $c_1 < \infty$, $c_2 < \infty$ залежить тільки від відомих параметрів задачі. Оцінимо член у правій частині співвідношення (3.5). Застосовуючи нерівність Гельдера, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega(s)} |\nabla_x u|^p |u| d\sigma \\
&\quad = \int_{\partial\Omega(s)} |u| g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}} a_1(t)^{\frac{1}{\lambda+1}} |\nabla_x u|^p a_1(t)^{-\frac{1}{\lambda+1}} g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}} d\sigma \\
&\qquad \leqslant c_3 \Big(\int_{\partial\Omega(s)} |u|^{\lambda+1} a_1(t) g_1(s) d\sigma \Big)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\
&\qquad\quad \times \Big(\int_{\partial\Omega(s)} |\nabla_x u|^{p+1} d\sigma \Big)^{\frac{p}{p+1}} a_1(t)^{-\frac{1}{\lambda+1}} g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}},
\end{aligned}
$$

де $c_3 = (\text{meas } \partial\Omega)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}$. Інтегруючи останню нерівність по t та застосовуючи нерівності Гельдера та Юнга, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
\int_{s^r}^{\tau} \int_{\partial\Omega(s)} |\nabla_x u|^p |u| d\sigma dt \leqslant c_4 g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}} \Big(\int_{s^r}^{\tau} a_1(t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dt \Big)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}} \\
\times \Big(\int_{s^r}^{\tau} \int_{\partial\Omega(s)} \big(|\nabla_x u|^{p+1} + a_1(t) g_1(s) |u|^{\lambda+1} \big) d\sigma dt \Big)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{(\lambda+1)(p+1)}}. \quad (3.6)
\end{aligned}
$$

Оцінимо другий член правої частини (3.5), користуючись монотонністю функції $g_1(\cdot)$ та нерівністю Гельдера:

$$
\begin{aligned}
&\overline{h}_{s^r}(s) \\
&= \int_{\Omega(s)} |u(s^r,x)|^{p+1} a_1(s^r)^{\frac{p+1}{\lambda+1}} g_1(d(x))^{\frac{p+1}{\lambda+1}} a_1(s^r)^{-\frac{p+1}{\lambda+1}} g_1(d(x))^{-\frac{p+1}{\lambda+1}} dx \\
&\leqslant c_5 \Big(\int_{\Omega(s)} |u(s^r,x)|^{\lambda+1} a_1(s^r) g_1(d(x)) dx \Big)^{\frac{p+1}{\lambda+1}} a_1(s^r)^{-\frac{p+1}{\lambda+1}} g_1(s)^{-\frac{p+1}{\lambda+1}}, \\
&\qquad\qquad c_5 = (\text{meas } \Omega)^{\frac{\lambda-p}{\lambda+1}}. \quad (3.7)
\end{aligned}
$$

Легко перевірити, що виконується наступна нерівність:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{ds}\overline{E}_\tau(s) \geqslant \int_{s^r}^{\tau} \int_{\partial\Omega(s)} \big(|\nabla_x u|^{p+1} + a_1(t) g_1(s) |u|^{\lambda+1} \big) d\sigma dt \\
+ r s^{r-1} \int_{\Omega(s)} \big(|\nabla_x u(s^r,x)|^{p+1} + a_1(s^r) g_1(d(x)) |u(s^r,x)|^{\lambda+1} \big) dx \quad (3.8)
\end{aligned}
$$

для майже всіх $s : 0 < s < s_\Omega$. Застосовуючи оцінки (3.6), (3.7) та співвідношення (3.8), отримаємо з (3.5) наступну нерівність:

$$\begin{aligned} B_\tau(s) &:= \overline{h}_\tau(s) + \overline{E}_\tau(s) \\ &\leqslant C_1 g_1(s)^{-\frac{1}{\lambda+1}} \Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}} \Big(-\frac{d}{ds}\overline{E}_\tau(s)\Big)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{(\lambda+1)(p+1)}} \\ &+ C_2 g_1(s)^{-\frac{p+1}{\lambda+1}} \Big(-\frac{d}{ds}\overline{E}_\tau(s)\Big)^{\frac{p+1}{\lambda+1}} s^{-\frac{(r-1)(p+1)}{\lambda+1}} \quad \text{для м.в. } s \in (0, s_\Omega), \\ &\Phi(\tau) = \int_0^\tau a_1(t)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} dt. \end{aligned} \tag{3.9}$$

де $C_2 = c_2 c_5 \big(\min_{0\leqslant s\leqslant s_0} a_1(s^r)\big)^{-\frac{p+1}{\lambda+1}}$, $C_1 = c_1 c_4$. Тепер користуючись монотонним спаданням функції $\overline{h}_\tau(s)$, отримаємо шляхом нескладних розрахунків з (3.9) наступну нерівність:

$$-\frac{d}{ds} B_\tau(s) \geqslant H(s, B_\tau(s)) := \min\Big\{ H_\tau^{(1)}(s, B_\tau(s)), H_\tau^{(2)}(s, B_\tau(s)) \Big\} \\ \text{для м.в. } s \in (0, s_\Omega),\ \forall \tau < T, \tag{3.10}$$

$$H_\tau^{(1)}(s, B_\tau(s)) := \left(\frac{g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}} B_\tau(s)}{2C_1 \Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}} \right)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}},$$
$$H_\tau^{(2)}(s, B_\tau(s)) := \left(\frac{g_1(s)^{\frac{p+1}{\lambda+1}} B_\tau(s)}{2C_2 s^{-\frac{(r-1)(p+1)}{\lambda+1}}} \right)^{\frac{\lambda+1}{p+1}}.$$

Тепер будемо знаходити розв'язки диференціальної нерівності (3.10) та отримаємо оцінку для $B_\tau(s)$. Для цього розглянемо область $D = D_\tau \subset \mathbb{R}^2$, як множину точок $(s, B) : 0 < s < s_\Omega$, $B > 0$, де функція $H(s, B)$ з (3.10) визначається першим членом правої частини співвідношення (3.10). Це означає, що

$$D_\tau = \left\{ (s, B) : \left(\frac{g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}} B}{2C_1 \Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}} \right)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} < \left(\frac{g_1(s)^{\frac{p+1}{\lambda+1}} B}{2C_2 s^{-\frac{(r-1)(p+1)}{\lambda+1}}} \right)^{\frac{\lambda+1}{p+1}} \right\}$$

Після нескладних трансформацій можемо переписати останнє означення наступним чином:

$$\begin{aligned} &D_\tau = \{(s, B) : B > B_\tau^{(0)}(s)\}, \\ &B_\tau^{(0)}(s) = C_3 s^{-\frac{(r-1)(p+1)(1+p(\lambda+2))}{p(\lambda+1)(\lambda-p)}} g_1(s)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \Phi(\tau)^{-\frac{p+1}{p(\lambda+1)}}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

де $C_3 = 2C_1^{-\frac{(p+1)^2}{p(\lambda-p)}} C_2^{\frac{1+p(\lambda+2)}{p(\lambda-p)}}$. Далі розглянемо усі можливі випадки розв'язку $B_\tau(s)$ у відповідності з областю D_τ. Перший впадок:

$$(s, B_\tau(s)) \in \overline{D}_\tau \text{ for all } s \in (0, s_\Omega). \tag{3.12}$$

У цій ситуації нерівність (3.10) приймає форму:

$$-\frac{d}{ds}B_\tau(s) \geqslant H_\tau^{(1)}(s, B_\tau(s)) = \left(\frac{g_1(s)^{\frac{1}{\lambda+1}} B_\tau(s)}{2C_1\Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{(\lambda+1)(p+1)}}}\right)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} \quad \forall \tau < T, \quad \forall\, s \in (0, s_\Omega). \tag{3.13}$$

З припущення (3.12) випливає, що $B_\tau(0) = \infty$. Розв'язуючи диференціальну нерівність (3.13) з цією початковою умовою, легко отримуємо:

$$B_\tau(s) \leqslant B_\tau^{(1)}(s) := C_4\Phi(\tau)\left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}\,dh\right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} \quad \forall\, s \in (0, s_\Omega), \forall\, \tau < T, \tag{3.14}$$

де $C_4 = \left(\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}\right)^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} (2C_1)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{\lambda-p}}$.

Тепер перевіримо, що оцінка (3.14) не заперечує припущенню про те, що $B_\tau(s) \in \overline{D}_\tau$. Для цього маємо гарантувати нерівність:

$$B_\tau^{(1)}(s) > B_\tau^{(0)}(s) \qquad \forall\, s \in (0, s_\Omega), \tag{3.15}$$

чи, відповідно до (3.11), (3.14):

$$C_4\Phi(\tau)\left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}\,dh\right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} > C_3 s^{-\frac{(r-1)(p+1)(1+p(\lambda+2))}{p(\lambda+1)(\lambda-p)}} g_1(s)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \times \Phi(\tau)^{-\frac{p+1}{p(\lambda+1)}} \quad \forall\, s \in (0, s_\Omega).$$

З монотонності функції $g_1(\cdot)$ випливає, що:

$$\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}\,dh \leqslant s g_1(s)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}$$

і тому

$$\left(\int_0^s g_1(h)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}\,dh\right)^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} \geqslant s^{-\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}} g_1(s)^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \quad \forall\, s \in (0, s_\Omega). \tag{3.16}$$

Як наслідок отримуємо, що для виконання (3.15) необхідно гарантувати наступну нерівність:

$$C_4\Phi(\tau) > C_3 s^{\frac{1+p(\lambda+2)}{\lambda-p}-\frac{(r-1)(p+1)(1+p(\lambda+2))}{p(\lambda+1)(\lambda-p)}}\Phi(\tau)^{-\frac{p+1}{p(\lambda+1)}},$$

що еквівалентна нерівності:

$$\Phi(\tau) \geqslant \left(C_3 C_4^{-1}\right)^{\frac{p(\lambda+1)}{p(\lambda+1)+p+1}} s^{\frac{(1+p(\lambda+2))(p(\lambda+1)-(r-1)(p+1))}{(\lambda-p)(p(\lambda+1)+p+1)}} \tag{3.17}$$

Враховуючи припущення (3.1) для параметра r та монотонність функції $\Phi(\tau)$, отримуємо, що нерівність (3.16) виконується для довільних $\tau \in [\frac{T}{2}, T)$ та довільних s з проміжку:

$$0 < s < s_0, \quad s_0 := \min\{s_\Omega, \bar{s}_0\},$$
$$\bar{s}_0 = \overline{C}_4 \Phi\left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{(\lambda-p)(p(\lambda+1)+p+1)}{(1+p(\lambda+2))(p(\lambda+1)-(r-1)(p+1))}}, \tag{3.18}$$

де $\overline{C}_4 = \left(C_3^{-1} C_4\right)^{\frac{p(\lambda+1)(\lambda-p)}{(1+p(\lambda+2))(p(\lambda+1)-(r-1)(p+1))}}$. Таким чином, співвідношення (3.15) справедливе для всіх $\tau > \frac{T}{2}$ та s з (3.18). Відтак оцінка (3.14) виконується, якщо задовольняється умова (3.12).

Припустимо тепер, що оцінка (3.14) не є справедливою для деякого $s \in (0, s_0)$. Тоді існує таке значення $s_1 \in (0, s_0)$, що

$$B_\tau(s_1) > B_\tau^{(1)}(s_1) \tag{3.19}$$

Якщо припустимо, що $B_\tau(s) > B_\tau^{(1)}(s)\ \forall\, s \in (0, s_1)$, тоді має також виконуватись умова (3.12). В силу попередніх припущень оцінка (3.14) виконується для всіх $s \in (0, s_1)$, що суперечить припущенню (3.19). Таким чином, залишається лише одна можливість: існує така точка $s_2 \in (0, s_1)$що виконується наступне:

$$B_\tau(s_2) = B_\tau^{(1)}(s_2), \quad B_\tau(s) > B_\tau^{(1)}(s) \quad \forall\, s \in (s_2, s_1). \tag{3.20}$$

З (3.20) витікає, що існує така точка $\bar{s}_2 \in (s_2, s_1)$, що

$$\frac{d}{ds}B_\tau(\bar{s}_2) > \frac{d}{ds}B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2), \quad B_\tau(\bar{s}_2) > B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2). \tag{3.21}$$

Але, з іншого боку, відповідно до (3.13), (3.14) та (3.21), маємо:

$$-\frac{d}{ds}B_\tau(\bar{s}_2) \geqslant \frac{g_1(\bar{s}_2)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}}{C_5\Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{1+p(\lambda+2)}}} B_\tau(\bar{s}_2)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}}$$
$$> \frac{g_1(\bar{s}_2)^{\frac{p+1}{1+p(\lambda+2)}}}{C_5\Phi(\tau)^{\frac{\lambda-p}{1+p(\lambda+2)}}} B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}} = -\frac{d}{ds}B_\tau^{(1)}(\bar{s}_2),$$
$$C_5 := (2C_1)^{\frac{(\lambda+1)(p+1)}{1+p(\lambda+2)}}$$

що суперечить (3.21), а отже і (3.20). Таким чином, оцінка (3.3) справедлива з $\widehat{C} = C_4$, $\hat{s} = \min\{s_\Omega, s_0\}$ для всіх $\tau \in \left(\frac{T}{2}, T\right)$. □

Доведення теореми 1.1. Згідно з умовою (1.14) можна отримати наступну оцінку для функції $\Phi(\cdot)$ з (3.9):

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0(t) := K_1\,\kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}}(T-t)^{-\left(\mu\frac{p+1}{\lambda-p}-1\right)} \quad \forall t < T, \quad K_1 > 0. \quad (3.22)$$

Тепер нерівність (3.3) приводить до оцінки:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant \widehat{C}\Phi_0(t)G_1(s) \quad \forall t \in (t_0, T),$$
$$t_0 = \frac{T}{2}, \forall s : 0 < s < \bar{s}_\Omega := \min\left(s_\Omega, t_0^{\frac{1}{r}}\right), \quad (3.23)$$

де r – значення з (3.1), функції $E(t,s)$, $h(t,s)$ – з (2.2). Зафіксуємо деяке значення $\bar{s} \in (0, \bar{s}_\Omega)$, тоді з оцінки (3.23) можемо отримати "початкову" енергетичну оцінку:

$$h(t,\bar{s}) + E(t,\bar{s}) \leqslant \widehat{C}G_1(\bar{s})\Phi_0(t) \quad \forall\, t \in (t_0, T). \quad (3.24)$$

Будемо розглядати $u(t,x)$ як розв'язок рівняння (1.1) в області $(t_0, T) \times \Omega(\bar{s})$. Використовуючи (3.24) і (3.22), отримаємо:

$$h(t,\bar{s}) + E(t,\bar{s}) \leqslant K_2\,\kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}}G_1(\bar{s})(T-t)^{-\beta}$$
$$\forall\, t \in (t_0, T), \quad \beta = \mu\frac{p+1}{\lambda-p} - 1, \quad (3.25)$$

де $K_2 = \widehat{C}K_1$, а умова на μ з оцінки (1.14) дає умову для β: $\beta > \frac{1}{p+1}$.

Тепер маємо систему (2.4) для функцій $E_j(s)$, $h_j(s)$ та "початкову" умову (3.25). Застосовуючи лему 2.2, отримуємо наступну оцінку:

$$h(t,s) + E(t,s) \leqslant GK_2\kappa^{\frac{p+1}{\lambda-p}}(s-\bar{s})^{-\theta}G_1(\bar{s})$$
$$\forall\, t \in (t_0, T),\ \forall\, s,\ \bar{s} : 0 < \bar{s} < s < \tilde{s} := \min\{\bar{s}_\Omega, \hat{s}\}, \quad (3.26)$$

де G, $\hat{s}$ – значення з (2.7), θ – з (1.15). Оптимізуючи останню оцінку за вільним параметром $\bar{s} : 0 < \bar{s} < s < \tilde{s}$, отримаємо оцінку (1.15) з $K = GK_2$.

4. Доведення наслідку 1.2

Для лінійного рівняння (1.1) ($p = 1$) оцінки максимума модуля слабких розв'язків мають наступний вигляд (див., наприклад, [19, 20]):

$$u(T,x) \leqslant c \left(\int_{T-\xi}^{T} \int_{B_{\frac{d(x)}{2}}(x)} |u(t,y)|^2 dy\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, \xi \in (0,T), \qquad (4.1)$$

де $c = \mathrm{const} > 0$, $B_r(x) := \{y : |x-y| < r\}$.

Легко бачити, що справедливе включення $B_{\frac{d(x)}{2}}(x) \subset \Omega\left(\frac{d(x)}{2}\right)$. Тепер приймаючи $\xi = \frac{T}{2}$ та використовуючи (1.18), оцінимо інтеграл в правій частині (4.1):

$$\int_{\frac{T}{2}}^{T} \int_{\Omega\left(\frac{d(x)}{2}\right)} |u(t,y)|^2 dx \leqslant \sup_{\frac{T}{2} \leqslant t < T} \int_{\Omega\left(\frac{d(x)}{2}\right)} |u(t,y)|^2 dx$$
$$= h\left(t, \frac{d(x)}{2}\right) \leqslant \overline{K}_1 d(x)^{-\left(\frac{2(2\mu+\beta+2)}{\lambda-1} - 1\right)} \quad \forall (t,x) \in \left(\frac{T}{2}, T\right) \times \Omega,$$

де $\overline{K}_1 = 2^{\frac{2(2\mu+\beta+2)}{\lambda-1} - 1} \overline{K} \kappa^{\frac{2}{\lambda-1}}$. В силу отриманої нерівності оцінка (4.1) приводить до:

$$u(t,x) \leqslant u(T,x) \leqslant \widetilde{K} d(x)^{-\left(\frac{2\mu+\beta+2}{\lambda-1} - \frac{1}{2}\right)} \quad \forall (t,x) \in \left(\frac{T}{2}, T\right) \times \Omega, \qquad (4.2)$$

де $\widetilde{K} = \overline{K}_1^{\frac{1}{2}}$.

Література

[1] H. W. Alt, S. Luckhaus, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations* // Math. Z., **183** (1983), No. 3, 311–341.

[2] C. Bandle, G. Diaz, and J. I. Diaz, *Solutions d'equations de reaction-diffusion non lineaires explosant au bord parabolique* // C. R. Acad. Sci. Paris S'er. I Math., **318** (1994), 455–460.

[3] Y. Du, R. Peng, and P. Polaĉik, *The parabolic logistic equation with blow-up initial and boundary values* // Journal D'Analyse Mathematique, **118** (2012), 297–316.

[4] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Saint-Venant's principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A, **133** (2003), No. 5, 1075–1119.

[5] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations* // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci., **460** (2004), No. 2051, 3299–3325.

[6] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Self-similar boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh., **135A** (2005), 1195–1227.

[7] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Higher-order quasilinear parabolic equations with singular initisl data* // Communications in Contemp. Math., **8** (2006), No. 3, 331–354.

[8] A. V. Ivanov, P. Z. Mkrtychan, and W. Jager, *Existence and uniqueness of a regular solution of the Cauchy-Dirichlet problem for a class of doubly nonlinear parabolic equations* // Zapiski nauchnogo seminara POMI, **213** (1994), 48–65 (in Russian); J. Math. Sci., **84** (1997), 845–855.

[9] A. V. Ivanov, P. Z. Mkrtychan, *Existence of Holder continuous generalized solutions of the first boundary value problem for quasilinear doubly degenerate parabolic equations* // Zapiski nauchnogo seminara LOMI, **182** (1990), 5–28 (in Russian); J. Soviet Math., **62** (1992), 2725–2740.

[10] A. A. Kovalevsky, I. I. Skrypnik, and A.E. Shishkov, *Singular Solutions in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 24, De Gruyter, Basel, 2016.

[11] W. Al Sayed, L. Veron, *On uniqueness of large solutions of nonlinear parabolic equations in nonsmooth domains* // Adv. Nonlinear Stud., **9** (2009), 149–164.

[12] W. Al Sayed, L. Veron, *Solutions of some nonlinear parabolic equations with initial blow-up* // On the Notions of Solution to Nonlinear Elliptic Problems: Results and Development, Department of Mathematics, Seconda Universit'a di Napoli, Caserta, (2008), 1–23.

[13] A. E. Shishkov, *Large solutions of parabolic logistic equation with spatial and temporal degeneracies* // DCDS, ser.S, **10** (2017), No. 10, 895–907.

[14] A. E. Shishkov, A. G. Shchelkov, *Blow-up boundary regimes for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains* // Sbornik: Mathematics, **190** (1999), No. 3, 447–479.

[15] A. E. Shishkov, Ye. A. Yevgenieva, *Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations* // Mathematische Nachrichten, 2019, DOI: 10.1002/mana.201700436

[16] Ye. A. Yevgenieva, *Limiting profile of solutions of quasilinear parabolic equations with flat peaking* // Journal of Mathematical Sciences, **234(1)** (2018), 106–116.

[17] Ye. A. Yevgenieva, *Propagation of singularities for large solutions of quasilinear parabolic equations* // Journal of Mathematical Physics, Analysis and Geometry, **15(1)** (2019), 131–144.

[18] L. Veron, *A note on maximal solutions of nonlinear parabolic equations with absorption* // Asymptot. Anal., **72** (2011), 189-200.

[19] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Москва, Наука, 1967.

[20] E. Di Benedetto *Degenerate parabolic equations*, New York, Springer–Verlag, 1993.

Відомості про авторів

Євгенія Олександрівна Євгеньєва

Інститут прикладної математики
і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: yevgeniia.yevgenieva@gmail.com