Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 1, 88 – 104

Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних

Михайло В. Гембарський, Світлана Б. Гембарська

(*Представлена В. П. Моторним*)

Анотація. Одержано точні за порядком оцінки деяких апроксимативних характеристик класів типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$, норма в якому є не слабшою, ніж L_∞–норма.

2010 MSC. 42A10, 42B99.

Ключові слова та фрази. Класи типу Нікольського–Бєсова, найкраще ортогональне тригонометричне наближення, східчастий гіперболічний хрест.

1. Вступ

У роботі досліджено деякі апроксимативні характеристики узагальнених класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$, норма в якому є не слабшою, ніж L_∞–норма. Як зазначалося у роботах [1–4], мотивацією до дослідження апроксимативних характеристик (найкращих наближень, поперечників, найкращих n-членних тригонометричних наближень тощо) класів $B^r_{p,\theta}$ і $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторах $B_{1,1}$ і $B_{\infty,1}$ була та обставина, що питання про їх порядки, особливо в багатовимірному випадку, у просторах L_1 і L_∞ досі залишаються відкритими (див. [5]).

Перш ніж перейти до формулювання одержаних результатів введемо необхідні позначення і дамо означення функціональних класів.

Нехай $\mathbb{R}^d$ позначає d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ – скалярний добуток елементів

Стаття надійшла в редакцію 24.02.2019

ISSN 1810 – 3200.

$x, y \in \mathbb{R}^d$. Через $L_p(\pi_d)$, $\pi_d := \prod\limits_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$, позначимо простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(x)$, для яких

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| < \infty.$$

Надалі вважаємо, що для $f \in L_p(\pi_d)$ виконується умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d},$$

і множину таких функцій позначимо $L_p^0(\pi_d)$. Іноді замість $L_p(\pi_d)$ і $L_p^0(\pi_d)$ будемо вживати простіші позначення L_p і L_p^0 відповідно.

Означимо l-ту різницю функції $f \in L_p^0$, $1 \le p \le \infty$, з кроком h_j за змінною x_j згідно з формулою

$$\triangle_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} \, C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Для $f \in L_p^0$, $1 \le p \le \infty$, $h = (h_1, \dots, h_d)$ і $t \in \mathbb{R}_+^d$ введемо мішану l-ту різницю

$$\triangle_h^l f(x) = \triangle_{h_d}^l \dots \triangle_{h_1}^l f(x) = \triangle_{h_d}^l (\dots (\triangle_{h_1}^l f(x)))$$

і означимо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j = \overline{1,d}}} \|\triangle_h^l f(\cdot)\|_p.$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ – задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l. Це означає, що функція Ω задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$ і $\Omega(t) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}_+^d$;

3) $\Omega(t)$ не спадає за кожною змінною $t_j \ge 0$, $j = \overline{1, d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \ne j$;

4) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le C\Big(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\Big)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, де $C > 0$ — деяка стала.

Далі, наслідуючи С. Н. Бернштейна [6], будемо називати функцію однієї змінної $\varphi(\tau)$ майже зростаючою (майже спадною) на $[a,b]$, якщо існує стала $C_1 > 0$ ($C_2 > 0$), яка не залежать від τ_1, τ_2 і така, що

$$\varphi(\tau_1) \le C_1\, \varphi(\tau_2),\ a \le \tau_1 \le \tau_2 \le b,$$

у випадку майже зростання, і відповідно

$$\varphi(\tau_1) \ge C_2\, \varphi(\tau_2),\ a \le \tau_1 \le \tau_2 \le b,$$

у випадку майже спадання.

Функцію $\Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}^d_+$ підпорядкуємо додатковим умовам (S^α) і (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [7, 8]. Вони полягають у такому: а) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$, $\tau \in [0,1]$, задовольняє умову (S^α), якщо $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$; б) функція $\varphi(\tau) \ge 0$, $\tau \in [0,1]$, задовольняє умову (S_l), якщо $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, $l \in \mathbb{N}$. Отже, у випадку $d > 1$ кажемо, що функція $\Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}^d_+$ задовольняє умови (S^α) і (S_l), якщо вона задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \ne j$.

Тепер дамо означення функціональних класів $B^\Omega_{p,\theta}$, стосовно яких проводились дослідження у роботі Sun Yongsheng, Wang Heping [9]. Нехай $1 \le p, \theta \le \infty$ і $\Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}^d_+$, – функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1)–4), (S^α) і (S_l). Тоді покладемо

$$B^\Omega_{p,\theta} := \{f \in L^0_p :\ \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \le 1\},$$

де

$$\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} = \|f\|_p + \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\right)^\theta \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j}\right)^{\frac{1}{\theta}},\ \ 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^\Omega_{p,\infty}} = \|f\|_p + \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)}{\Omega(t)}.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $r = (r_1, \dots, r_d)$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$ і $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, – класи $B^\Omega_{p,\theta}$ тотожні аналогам класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$, які досліджувалися у роботах [10, 11]. У свою чергу, при $\theta = \infty$ класи

$B^r_{p,\infty} =: H^r_p$ є аналогами класів С. М. Нікольського [12]. Дослідженням класів $B^\Omega_{p,\infty} \equiv H^\Omega_p$ присвячена робота М. М. Пустовойтова [13]. У подальшому зручнішим у використанні є інше нормування функцій, що належать класам $B^\Omega_{p,\theta}$. Поставимо у відповідність кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ множину

$$\rho(s) := \{k \in \mathbb{Z}^d \,:\, 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1,d}\}$$

і для $f \in L^0_p,\ 1 < p < \infty$, покладемо

$$\delta_s(f) := \delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ – коефіцієнти Фур'є функції f.

Тепер нагадаємо таке: для виразів a та b, які залежать від деякої сукупності параметрів, запис $a \sim b$ означає, що існують такі додатні сталі c_1 та c_2, для яких $c_1 b \le a \le c_2 b$.

Отже, якщо $\Omega(t),\ t \in \mathbb{R}^d_+$, – задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1)–4), (S^α) і (S_l), то для $f \in B^\Omega_{p,\theta},\ 1 < p < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$, справедливі співвідношення

$$\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \sim \begin{cases} \left(\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \, \|\delta_s(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \frac{\|\delta_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Тут, і у подальшому, $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d}),\ s_j \in \mathbb{N},\ j = \overline{1,d}$.

Зауважимо, що при $1 \le \theta < \infty$ співвідношення (1.1) доведено у роботі [9], а при $\theta = \infty$ – в [13].

Для норм функцій з класів $B^\Omega_{p,\theta}$ при $p = 1$ і $p = \infty$ можна записати аналогічні (1.1) співвідношення, замінивши "блоки" $\delta_s(f)$ на інші. А саме, позначимо через $V_m(t),\ m \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \right), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

і для $f \in L_p^0$, $1 \le p \le \infty$, покладемо

$$A_s(f) := A_s(f,x) = (f * A_s)(x),$$

де $*$ – операція згортки.

Тоді справедливі співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \sim \begin{cases} \left(\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|A_s(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \frac{\|A_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

При $1 \le \theta < \infty$ співвідношення (1.2) доведено у роботі [14], а при $\theta = \infty$ – в [13].

Наші дослідження стосуються класів, які визначаються за допомогою специфічної функції Ω типу мішаного модуля неперервності порядку l, а саме

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j \right), \tag{1.3}$$

де $\omega(\tau)$ – задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^{α}) і (S_l). Зрозуміло, що для функції Ω вигляду (1.3) виконуються властивості 1)–4) функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S^{α}), (S_l) і тому справедливими є наведені вище співвідношення (1.1), (1.2) для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Надалі для класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у випадку функції Ω вказаного вигляду вживаємо позначення $B^{\omega}_{p,\theta}$.

Тепер дамо означення норми у підпросторах $B_{\infty,1}$. Для тригонометричних поліномів τ вона означається згідно з формулою

$$\|\tau\|_{B_{\infty,1}} = \sum_{s\in\mathbb{N}^d\cup\{\mathbf{0}\}} \|A_s(\tau)\|_{\infty}.$$

Аналогічним чином означається норма $\|f\|_{B_{\infty,1}}$ для функцій $f \in L_1$ за умови збіжності ряду $\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d\cup\{\mathbf{0}\}} \|A_s(f)\|_{\infty}$. При цьому зазначимо, що справедливе співвідношення

$$\|f\|_{\infty} \le \|f\|_{B_{\infty,1}}. \tag{1.4}$$

На завершення цього пункту зазначимо, що у подальшому викладі використовується поняття порядкового співвідношення: для двох невід'ємних послідовностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a_n \ll b_n$ означає, що існує стала $C_3 > 0$, яка не залежить від n і така, що $a_n \le C_3\, b_n$. Співвідношення $a_n \asymp b_n$ рівносильне тому, що $a_n \ll b_n$ і $b_n \ll a_n$.

2. Апроксимативні характеристики класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї змінної

У цьому пункті ми доповнюємо результати із [4], які стосуються задач наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї змінної у просторі $B_{\infty,1}$.

Спочатку означимо апроксимативні характеристики, які досліджуються. Нехай $X \subset L_1^0(\pi_1)$ – деякий нормований функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_X$. Для $f \in X$ і $n \in \mathbb{N}$ означимо

$$\mathcal{E}_{2^n}(f)_X := \|f - S_n(f)\|_X,$$

де

$$S_n(f) := S_n(f,x) = \sum_{s=1}^{n-1} \delta_s(f,x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для функціонального класу $F \subset X$ покладемо

$$\mathcal{E}_{2^n}(F)_X = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{2^n}(f)_X.$$

Далі, нехай Θ^1_M – довільний набір із M чисел $k_1, ..., k_M \in \mathbb{Z}$. Для $f \in X$ в якості агрегату наближення будемо використовувати тригонометричні поліноми вигляду

$$t_M(f) := t_M(f,x) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}(k_j) e^{ik_j x},$$

де $\widehat{f}(k_j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{-ik_j t} dt$ – коефіцієнти Фур'є функції f, що відповідають набору чисел з Θ^1_M. Тоді для функції $f \in X$ означимо

$$e^{\perp}_M(f)_X := \inf_{\Theta^1_M} \|f - t_M(f)\|_X,$$

і для класу $F \subset X$ покладемо

$$e^{\perp}_M(F)_X = \sup_{f \in F} e^{\perp}_M(f)_X.$$

Величини $e^{\perp}_M(f)_X$ і $e^{\perp}_M(F)_X$ називають найкращими ортогональними тригонометричними наближеннями відповідно функції f і класу функцій F у просторі X.

Стосовно означених апроксимативних характеристик зауважимо, що вони пов'язані співвідношеннями

$$e^{\perp}_M(F)_X \le \mathcal{E}_{2^n}(F)_X, \quad 2^n \le M \le 2^{n+1} \tag{2.1}$$

Тепер перейдемо до формулювання і доведення результатів.

Теорема 2.1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{p}$ *і умову* (S_l). *Тоді*

$$\mathcal{E}_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}. \tag{2.2}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху, зазначивши, що її достатньо одержати при $\theta = \infty$, тобто для класів $H^{\omega}_p = B^{\omega}_{p,\infty}$.

Нехай $f \in H^{\omega}_p$. Тоді згідно з означенням норми у просторі $B_{\infty,1}$ і властивістю згортки, при $n \ge 3$ можна записати

$$\mathcal{E}_{2^n}(f)_{B_{\infty,1}} = \Big\| f - \sum_{s=1}^{n-1}\delta_s(f)\Big\|_{B_{\infty,1}} = \Big\|\sum_{s=n}^{\infty}\delta_s(f)\Big\|_{B_{\infty,1}}$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{N}}\Big\|A_s * \sum_{s'\ge n}\delta_{s'}(f)\Big\|_{\infty} \le \sum_{s=n-1}^{\infty}\Big\|A_s * \sum_{s'=s-1}^{s+1}\delta_{s'}(f)\Big\|_{\infty}$$

$$\le \sum_{s=n-1}^{\infty}\|A_s\|_{p'}\,\Big\|\sum_{s'=s-1}^{s+1}\delta_{s'}(f)\Big\|_{p}, \tag{2.3}$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Для продовження співвідношення (2.3) оцінимо множники, які містяться під знаком суми в його правій частині. Оскільки (див., наприклад, [15, Ch1, §1])

$$\|V_{2^s}\|_p \asymp 2^{s(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

то для $\|A_s\|_{p'}$ можна записати

$$\|A_s\|_{p'} = \|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\|_{p'} \le \|V_{2^s}\|_{p'} + \|V_{2^{s-1}}\|_{p'} \asymp 2^{\frac{s}{p}}. \tag{2.4}$$

Далі, взявши до уваги, що для $f \in H^{\omega}_p$, $1 < p < \infty$, справедлива оцінка [13]

$$\|\delta_{s'}(f)\|_p \ll \omega(2^{-s'}),$$

одержимо

$$\Big\|\sum_{s'=s-1}^{s+1}\delta_{s'}(f)\Big\|_p \le \sum_{s'=s-1}^{s+1}\|\delta_{s'}(f)\|_p \ll \sum_{s'=s-1}^{s+1}\omega(2^{-s'}) \ll \omega(2^{-s}). \tag{2.5}$$

Підставивши (2.4) і (2.5) в (2.3), маємо

$$\mathcal{E}_{2^n}(f)_{B_{\infty,1}} \ll \sum_{s=n-1}^{\infty} 2^{\frac{s}{p}}\omega(2^{-s}) = \sum_{s=n-1}^{\infty} 2^{-s(\alpha-\frac{1}{p})}\frac{\omega(2^{-s})}{2^{-s\alpha}}$$
$$\leq \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\sum_{s=n-1}^{\infty} 2^{-s(\alpha-\frac{1}{p})} \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}.$$

Для встановлення в (2.2) оцінки знизу нагадаємо означення величини найкращого наближення $E_{2^n}(F)_X$, яка у випадку, коли $F = B^{\omega}_{p,\theta}$ і $X = B_{\infty,1}$, досліджувалась у роботі [4].

Отже, нехай $T(2^n)$, $n \in \mathbb{N}$, – множина тригонометричних поліномів вигляду

$$T(2^n) = \left\{t : t(x) = \sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}} c_k e^{ikx}\right\}$$

Тоді для функціонального класу $F \subset X$ означимо

$$E_{2^n}(F)_X := \sup_{f\in F}\inf_{t\in T(2^n)} \|f-t\|_X.$$

Легко бачити, що згідно з означенням величин $E_{2^n}(F)_X$ і $\mathcal{E}_{2^n}(F)_X$ справедливе співвідношення

$$E_{2^n}(F)_X \leq \mathcal{E}_{2^n}(F)_X. \tag{2.6}$$

У роботі [4] для величини $E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}$ встановлено таке твердження.

Теорема A. *Нехай* $1 \leq p,\ \theta \leq \infty$, *а* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{p}$ *і умову* (S_l). *Тоді*

$$E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{\infty} \asymp E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}. \tag{2.7}$$

Таким чином, згідно із співвідношеннями (2.6) і (2.7) маємо

$$\mathcal{E}_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \geq E_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}.$$

Теорему 2.1 доведено. $\square$

Зауважимо, що базуючись безпосередньо на міркуваннях, які використовувалися при доведенні теореми 2.1, з врахуванням (1.4) виводимо співвідношення:

$$\mathcal{E}_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp \mathcal{E}_{2^n}(B^{\omega}_{p,\theta})_{\infty} \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}.$$

У наступному твердженні встановлено порядкові значення величин $e^{\perp}_M(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}$ і $e^{\perp}_M(B^{\omega}_{p,\theta})_{\infty}$.

Теорема 2.2. *Нехай* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *а* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{p}$ *і умову* (S_l). *Тоді*

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{\infty} \asymp e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(M^{-1})M^{\frac{1}{p}}. \tag{2.8}$$

Доведення. Оскільки згідно з (1.4) справджується співвідношення

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{\infty} \le e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{B_{\infty,1}},$$

то для доведення (2.8) достатньо одержати оцінку зверху величини $e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{B_{\infty,1}}$ і знизу – величини $e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{\infty}$.

Стосовно оцінки зверху величини $e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{B_{\infty,1}}$ зауважимо, що вона є наслідком теореми 2.1 за умови, що число $n \in \mathbb{N}$ вибрано із співвідношення $2^n \le M \le 2^{n+1}$.

Переходячи до встановлення оцінки знизу величини $e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{\infty}$, зазначимо, що її достатньо одержати при $\theta = 1$.

Виберемо число $n \in \mathbb{N}$ з нерівності $2^{n-3} \le M \le 2^{n-2}$ і розглянемо функцію

$$g_1(x) = C_4\omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}A_{n+1}(x), \quad C_4 > 0,$$

де

$$A_{n+1}(x) = V_{2^{n+1}}(x) - V_{2^n}(x).$$

Оскільки згідно з властивістю згортки функцій і з врахуванням співвідношення (2.4)

$$\|g_1\|_{B_{p,1}^{\omega}} \asymp \omega^{-1}(2^{-n})\|A_{n+1}(g_1)\|_p$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-n})\|A_{n+1}\|_1\|g_1\|_p \ll 2^{-n(1-\frac{1}{p})}2^{n(1-\frac{1}{p})} = 1,$$

то при відповідному виборі сталої $C_4 > 0$ функція g_1 належить класу $B_{p,1}^{\omega}$.

Далі, нехай $S_M(g_1)$ – часткова сума ряду Фур'є функції g_1, яка містить M гармонік, вибраних довільним чином.

Тоді, взявши до уваги, що $\|A_{n+1}\|_{\infty} \asymp 2^n$, будемо мати

$$\|g_1 - S_M(g_1)\|_{\infty} \ge \|g_1\|_{\infty} - \|S_M(g_1)\|_{\infty} \gg \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}(2^n - M) \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}2^n = \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}} \asymp \omega(M^{-1})M^{\frac{1}{p}}.$$

Теорему 2.2 доведено. $\square$

3. Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних

Спочатку означимо величини, які досліджуються в цій частині роботи.

Для $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, $d \geq 2$ і $n \in \mathbb{N}$, покладемо

$$Q_n = \bigcup_{(s,1)\leq n} \rho(s), \quad (s, 1) = s_1 + ... + s_d.$$

Множина Q_n називається східчастим гіперболічним хрестом.

Через $S_{Q_n}(f)$ позначимо східчасто-гіперболічну суму Фур'є функції $f \in L_1(\pi_d)$ вигляду

$$S_{Q_n}(f) := S_{Q_n}(f, x) = \sum_{(s,1)\leq n} \delta_s(f, x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Якщо $X \subset L_1(\pi_d)$ – деякий функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_X$, то для класу функцій $F \subset X$ покладемо

$$\mathcal{E}_{Q_n}(F)_X := \sup_{f\in F} \|f - S_{Q_n}(f)\|_X.$$

Нагадаємо також означення величини найкращого ортогонального тригонометричного наближення, яке адаптоване до багатовимірного випадку, тобто для $d \geq 2$. Отже, нехай Θ^d_M – довільний набір із M d-вимірних векторів $k^1, ..., k^M$, $k^j = (k^j_1, ..., k^j_d)$, $j = \overline{1, M}$, з цілочисловими координатами. Для будь-якої функції $f \in X$ розглянемо її часткову суму Фур'є $S_M(f)$ вигляду

$$S_M(f) := S_M(f, x) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}(k^j) e^{i(k^j,x)},$$

де

$$\widehat{f}(k^j) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k^j,t)} dt$$

– коефіцієнти Фур'є функції f, що відповідають набору векторів з Θ^d_M. Тоді для $f \in X$ означимо

$$e^{\perp}_M(f)_X := \inf_{\Theta^d_M} \|f - S_M(f)\|_X,$$

і для класу $F \subset X$ покладемо

$$e^{\perp}_M(F)_X = \sup_{f\in F} e^{\perp}_M(f)_X.$$

Зазначимо, що величини $\mathcal{E}_{Q_n}(F)_X$ і $e_M^{\perp}(F)_X$ у випадках, коли $F = B^r_{p,\theta}$ або $F = B^{\Omega}_{p,\theta}$, а $X = L_\infty$, вивчались у роботах [16–20], де можна ознайомитися з бібліографією стосовно інших функціональних класів.

Тепер перейдемо до формулювання і доведення одержаних результатів.

Теорема 3.1. *Нехай $d \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 < p < \infty$, а $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \frac{1}{p}$ і умову (S_l). Тоді*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{3.1}$$

Доведення. Спочатку встановимо в (3.1) оцінку зверху. Отже, нехай $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$. Тоді, відштовхуючись від означення норми у просторі $B_{\infty,1}$, згідно з властивістю згортки, також врахувавши співвідношення (2.4), можна записати

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_{B_{\infty,1}} = \Big\| f - \sum_{(s,1)\leq n} \delta_s(f) \Big\|_{B_{\infty,1}} = \Big\| \sum_{(s,1)>n} \delta_s(f) \Big\|_{B_{\infty,1}}$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{N}^d} \Big\| A_s * \sum_{\substack{s'\in\mathbb{N}^d \\ (s',1)>n}} \delta_{s'}(f) \Big\|_\infty \leq \sum_{(s,1)>n-d} \Big\| A_s * \sum_{\substack{s'\in\mathbb{N}^d \\ \|s-s'\|_\infty\leq 1}} \delta_{s'}(f) \Big\|_\infty$$

$$\leq \sum_{(s,1)>n-d} \|A_s\|_{p'} \Big\| \sum_{\substack{s'\in\mathbb{N}^d \\ \|s-s'\|_\infty\leq 1}} \delta_{s'}(f) \Big\|_p$$

$$\ll \sum_{(s,1)>n-d} 2^{(s,1)\frac{1}{p}} \sum_{\substack{s'\in\mathbb{N}^d \\ \|s-s'\|_\infty\leq 1}} \|\delta_{s'}(f)\|_p$$

$$\leq \sum_{(s,1)>n-d} 2^{\frac{d}{p}} \sum_{\substack{s'\in\mathbb{N}^d \\ \|s-s'\|_\infty\leq 1}} 2^{(s',1)\frac{1}{p}} \|\delta_{s'}(f)\|_p$$

$$\ll \sum_{(s,1)>n-2d} 2^{(s,1)\frac{1}{p}} \|\delta_s(f)\|_p =: I_1 \tag{3.2}$$

Для продовження оцінки величини I_1 розглянемо кілька випадків, в залежності від значень параметра θ.

I. Нехай $\theta \in (1, \infty)$. Тоді, якщо $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$, то застосувавши нерівність Гельдера, матимемо

$$I_1 \leq \left(\sum_{(s,1)>n-2d} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\times \left(\sum_{(s,1)>n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\frac{\theta'}{p}} \right)^{\frac{1}{\theta'}}$$

$$\ll \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \left(\sum_{(s,1)>n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\frac{1}{p}\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}}$$

$$\leq \left(\sum_{(s,1)>n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\frac{\theta'}{p}} \right)^{\frac{1}{\theta'}} =: I_2. \tag{3.3}$$

Позначимо $m := n - 2d$. Врахувавши, що при $(s,1) > m$

$$\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} \leq C_5 \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}}, \quad C_5 > 0,$$

продовжимо оцінку величини I_2:

$$I_2 \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{(s,1)>m} 2^{-(s,1)(\alpha - \frac{1}{p})\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}}$$

$$= \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{j>m} 2^{-j(\alpha-\frac{1}{p})\theta'} \sum_{(s,1)=j} 1 \right)^{\frac{1}{\theta'}}$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} 2^{-m(\alpha - \frac{1}{p})} m^{\frac{d-1}{\theta'}} = \omega(2^{-m}) 2^{\frac{m}{p}} m^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \tag{3.4}$$

II. При $\theta = 1$ продовження оцінки величини I_1 таке:

$$I_1 \leq \sup_{s:(s,1)>m} \omega(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\frac{1}{p}} \sum_{(s,1)>m} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f)\|_p$$

$$\ll \omega(2^{-m}) 2^{\frac{m}{p}} \|f\|_{B^\Omega_{p,1}} \ll \omega(2^{-m}) 2^{\frac{m}{p}}. \tag{3.5}$$

III. У випадку $\theta = \infty$ для величини I_1 можна записати

$$I_1 \leq \sup_{s:(s,1)>m} \frac{\|\delta_s(f)\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})} \sum_{(s,1)>m} \omega(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\frac{1}{p}}$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \sum_{(s,1)>m} \frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} 2^{-(\alpha-\frac{1}{p})(s,1)}$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} 2^{-(\alpha-\frac{1}{p})m} m^{d-1} = \omega(2^{-m}) 2^{\frac{m}{p}} m^{d-1}. \qquad (3.6)$$

Таким чином, взявши до уваги співвідношення (3.2)–(3.6) приходимо до шуканої оцінки зверху величини $\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}$.

Відповідна оцінка знизу в (3.1) випливає з наступного твердження із [20].

Теорема Б. *Нехай $d \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 < p < \infty$, а $\Omega(t) = \omega\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j\Big)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \frac{1}{p}$ і умову (S_l). Тоді*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \qquad (3.7)$$

Отже, оскільки $\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \geq \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty}$, то скориставшись (3.7) отримаємо шукану оцінку знизу.

Теорему 3.1 доведено. □

У наступному твердженні встановлено порядкові значення величин $e^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty}$ і $e^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty,1}$.

Теорема 3.2. *Нехай $d \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 < p < \infty$, а $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \frac{1}{p}$ і умову (S_l). Тоді для будь-якої послідовності $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ натуральних чисел такої, що виконується співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливі порядкові оцінки*

$$e^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty} \asymp e^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \qquad (3.8)$$

Доведення. Оскільки $e^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \geq e^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty}$, то для доведення співвідношення (3.8) достатньо встановити оцінку зверху величини $e^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}$ і відповідно знизу – величини $e^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty}$.

Відразу зауважимо, що оцінка зверху величини $e^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}$ є наслідком співвідношення (3.1) за умови, що числа M і n пов'язані нерівностями $|Q_{n-1}| \leq M < |Q_n|$ (де $|A|$ – кількість елементів множини A), тобто $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Переходячи до встановлення оцінки знизу величини $e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega})_\infty$, розглянемо такі множини:

$$\Omega_n = \{s \in \mathbb{N}^d : (s,1) = n\};$$

$$\overline{Q}_n = \bigcup_{s \in \Omega_n} \rho(s).$$

Зауважимо, що $|\overline{Q}_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Далі вважаємо, що число $n \in \mathbb{N}$ підібрано відповідно до нерівностей $|\overline{Q}_n| \le 4M < |\overline{Q}_{n+1}|$, тобто $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Нехай для $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$,

$$f_{(s)}(x) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j+1}}(x_j) - V_{2^{s_j}}(x_j)).$$

Тоді з (2.4) випливає оцінка

$$\|f_{(s)}\|_p \ll 2^{(s,1)(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{3.9}$$

Тепер розглянемо функції

$$g_2(x) = C_6 \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-1)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{s \in \Omega_n} f_{(s)}(x), \quad C_6 > 0$$

при $1 \le \theta < \infty$, і відповідно

$$g_3(x) = C_7 \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-1)} \sum_{s \in \Omega_n} f_{(s)}(x), \quad C_7 > 0$$

при $\theta = \infty$.

Легко переконатися, що функції g_2 і g_3 з деякими сталими $C_6 > 0$ і $C_7 > 0$ належать до класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$, $1 \le \theta < \infty$ і $B_{p,\infty}^{\Omega} \equiv H_p^{\Omega}$ відповідно. Справді, скориставшись співвідношеннями (2.4) і (3.9), можна записати

$$\|g_2\|_{B_{p,\theta}^{\Omega}} \asymp \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|A_s(g_2)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-1)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n-1 \le (s,1) \le n+1} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|f_s\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-1)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega^{-1}(2^{-(n+1)}) \left(\sum_{n-1 \le (s,1) \le n+1} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{p})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\asymp 2^{n(\frac{1}{p}-1)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n(1-\frac{1}{p})} n^{\frac{d-1}{\theta}} \ll 1.$$

Що стосується функції g_3, то для неї отримаємо

$$\|g_3\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s\in\mathbb{N}^d} \frac{\|A_s(g_3)\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})} \ll \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-1)} \sup_{n-1\le(s,1)\le n+1} \frac{\|f_s\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})}$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-1)} \frac{1}{\omega(2^{-n})} \sup_{n-1\le(s,1)\le n+1} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{p})} \ll 2^{n(\frac{1}{p}-1)} 2^{n(1-\frac{1}{p})} \ll 1.$$

Далі, нехай $S_M(g_2)$ – часткова сума ряду Фур'є функції g_2, яка містить M гармонік, вибраних довільним чином. Оскільки згідно з (3.9)

$$\|\sum_{s\in\Omega_n} f_{(s)}\|_\infty \asymp 2^n n^{d-1},$$

то маємо

$$\|g_2 - S_M(g_2)\|_\infty \ge \|g_2\|_\infty - \|S_M(g_2)\|_\infty$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-1)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^n n^{d-1}$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-1)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} (2^n n^{d-1} - M) = \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Аналогічно для функції g_3 знаходимо

$$\|g_3 - S_M(g_3)\|_\infty \gg \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{d-1}.$$

Оцінки знизу величини $e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_\infty$ встановлені.

Теорему 3.1 доведено. □

Acknowlegements

Автори висловлюють вдячність професору Романюку А. С. за увагу і корисні поради при написанні роботи.

Література

[1] А. С. Романюк, *Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **68** (2016), No. 10, 1403–1417.

[2] М. В. Гембарський, С. Б. Гембарська, *Поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$* // Укр. мат. вісник, **15** (2018), No. 1, 43–57.

[3] А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$* // Укр. мат. журн., **71** (2019), No. 2, 271–282.

[4] М. В. Гембарський, С. Б. Гембарська, К. В. Соліч, *Найкращі наближення і поперечники класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі* $B_{\infty,1}$ // Мат. студії (в друці).

[5] Dinh Dung, V. N. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic Cross Approximation*, arXiv: 1601.03978 v3 [math. NA] 21 Apr. 2017.

[6] С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений. т.II. Конструктивная теория функций (1931–1953),* М., Изд. АН СССР, 1954.

[7] С. Б. Стечкин, *О порядке наилучших приближений непрерывных функций* // Изв. АН СССР, Сер. мат., **15** (1951), 219–242.

[8] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. матем. о-ва, **5** (1956), 483–522.

[9] Sun Yongsheng, Wang Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness* // Тр. МИАН СССР, **219** (1997), 356–377.

[10] Т. И. Аманов, *Теоремы представления и вложения для функциональных пространств* $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ *и* $S^{(r)*}_{p,\theta}$, $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **77** (1965), 5–34.

[11] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **187** (1989), 143–161.

[12] С. М. Никольский, *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера* // Сиб. мат. журн., **4** (1963), No. 6, 1342–1364.

[13] Н. Н. Пустовойтов, *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности* // Anal. Math., **20** (1994), 35–48.

[14] С. А. Стасюк, О. В. Федуник, *Апроксимативні характеристики класів* $B^{\Omega}_{p,\theta}$ *періодичних функцій багатьох змінних* // Укр. мат. журн., **58** (2006), No. 5, 692–704.

[15] V. N. Temlyakov *Approximation of periodic functions,* New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993.

[16] А. С. Романюк *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных* // Пр. Ін-ту математики НАН України, **93** (2012), 353 с.

[17] А. С. Романюк, *Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике* // Мат. заметки, **82** (2007), No. 2, 247–261.

[18] А. С. Романюк, *Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения* // Мат. сб., **195** (2004), No. 2, 91–116.

[19] А. С. Романюк, *Поперечники и наилучшие приближения классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных* // Anal. Math., **37** (2011), 181–213.

[20] С. А. Стасюк, *Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці* // Укр. мат. журн., **54** (2002), No. 11, 1551–1559.

Відомості про авторів

Михайло Віталійович Гембарський
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: `hembarskyi@gmail.com`

Світлана Борисівна Гембарська
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: `gembarskaya72@gmail.com`