Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 2, 277 – 288

Метод енергетичних оцінок для дослідження поведінки слабких розв'язків рівняння повільної дифузії із сингулярними граничними даними

Євгенія О. Євгеньєва, Андрій Є. Шишков

Стаття присвячена 100-річчю від дня народження Г. Д. Суворова

Анотація. У роботі розглядається рівняння повільної дифузії із сингулярними граничними даними. Отримано оцінку усіх слабких розв'язків такої задачі за умови локалізації граничного режиму. Також наведено порівняльний аналіз результатів, отриманих методом енергетичних оцінок та бар'єрною технікою для рівняння пористого середовища.

2010 MSC. 35K59, 35B44, 35K58, 35K65.

Ключові слова та фрази. Квазілінійні параболічні рівняння, рівняння пористого середовища, метод енергетичних оцінок, слабкі розв'язки, сингулярні граничні дані.

1. Постановка задачі та основний результат

В обмеженій циліндричній області $Q = (0,T) \times \Omega$, $1 \leqslant T < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, $\partial\Omega \in C^2$, розглядається початково-крайова задача:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p(u) = 0, \quad p > q > 0. \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u_0 \in L^{q+1}(\Omega) \tag{1.2}$$

$$u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = f(t,x) \to \infty \text{ при } t \to T \tag{1.3}$$

Тут $\Delta_p(u) = \sum_{i=1}^{n} \left(|\nabla_x u|^{p-1} u_{x_i}\right)_{x_i}$. Наголосимо, що поведінка на межі області описується функцією $f(t,x)$, що визначена на $(t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega$ та має сингулярне загострення при наближенні до часу T. Опишемо функцію $f(t,x)$ більш детально. Будемо розглядати її як слід на

Стаття надійшла в редакцію 19.04.2019

$(0,T)\times\partial\Omega$ функції $\overline{f}(t,x)$, що задовольняє наступним умовам гладкості:

$$\overline{f}(t,\cdot)\in C_{loc}([0,T);L^{q+1}(\Omega))\cap L^{p+1}_{loc}([0,T);W^{1,p+1}(\Omega));$$
$$\overline{f}_t(t,\cdot)\in L^{1}_{loc}([0,T);L^{q+1}(\Omega))\cap L^{\frac{p+1}{p-q+1}}_{loc}([0,T);L^{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)).$$

Характер загострення граничного режиму при $t\to T$ опишемо функцією:

$$F(t):=\sup_{0<\tau<t}\int_\Omega|\overline{f}(\tau,x)|^{q+1}dx+\int_0^t\int_\Omega|\nabla_x\overline{f}(\tau,x)|^{p+1}dxd\tau$$
$$+\left(\int_0^t\left(\int_\Omega|\overline{f}(\tau,x)|^{q+1}dx\right)^{\frac{1}{q+1}}d\tau\right)^{q+1}\to\infty\ \text{ при } t\to T. \tag{1.4}$$

У роботі розглядається клас слабких розв'язків задачі (1.1), (1.2), (1.3). Тож введемо наступне визначення.

Означення 1.1. *Функцію $u(t,x)\in C_{loc}([0,T);L^{q+1}_{loc}(\Omega))$ будемо називати слабким (енергетичним) розв'язком задачі* (1.1), (1.2), (1.3), *якщо виконані умови:*

i) $u(t,\cdot)-f(t,\cdot)\in L^{p+1}_{loc}([0,T);\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))$;

ii) $(|u(t,\cdot)|^{q-1}u(t,\cdot))_t\in L^{\frac{p+1}{p}}_{loc}([0,T);(\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))^*)$;

iii) виконується інтегральна тотожність:

$$\int_0^\tau\langle(|u|^{q-1}u)_t,\eta\rangle dx+\int_0^\tau\int_\Omega\sum_{i=1}^n(\nabla_x u)^{p-1}u_{x_i}\eta_{x_i}dxdt=0 \tag{1.5}$$

для довільної функції $\eta(t,\cdot)\in L^{p+1}((0,\tau);\overset{\circ}{W}{}^{1,p+1}(\Omega))$ для довільного $\tau<T$;

iv) виконується початкова умова (1.2).

Параболічні рівняння з сингулярними граничними даними типу (1.3) є цікавим об'єктом досліджень. Відомо (див. [1–6, 8]), що в залежності від поведінки функції f може виникати ефект локалізації розв'язку u. Тобто, за певних умов на функцію f розвязок залишається обмеженим у деякій внутрішній підобласті $\Omega_0:\overline{\Omega}_0\subset\Omega$ при наближенні до часу загострення T. Умови локалізації для задачі (1.1), (1.2), (1.3) були вивчені у роботі [5]. Показано, що якщо характер загострення граничного режиму F визначається наступним співвідношенням:

$$F(t) = \omega(t) \cdot (T-t)^{-\frac{q+1}{p-q}}, \tag{1.6}$$

то за умови $\omega(t) \equiv \omega_0 = \text{const} > 0$ локалізація має місце, тобто існує така область $\Omega_0 : \overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, що $u(t,x)$ є обмеженою при $t \to T$ для всіх $x \in \Omega_0$. При цьому, якщо $\omega(t) \to 0$ при $t \to T$, то розв'язок u буде обмеженим при $t \to T$ у будь-якій підобласті $\Omega_0 : \overline{\Omega}_0 \subset \Omega$.

Метою дослідження є оцінка методу енергетичних оцінок шляхом порівняння результатів, отриманих за допомогою цього методу, з точними результатами для рівняння пористого середовища (див. [6,7]).

Метод енергетичних оцінок був запропонований та розроблений у роботах [1–5,8] А. Є. Шишковим, В. А. Галактіоновим та А. Г. Щелковим. На відміну від барьєрних технік, якими зазвичай досліджують сингулярні граничні режими, цей метод використовує принципово інший підхід, що полягає у ефективній оцінці перетоків енергії у нескінченій послідовності часових шарів, які накопичуються біля часу загострення. Він є комбінацією декількох методів та підходів. А саме, використовує метод апріорних оцінок типу Сен-Венана та нелінійний варіант цього методу, а також метод локальних енергетичних оцінок.

У роботах [9, 11, 12] метод енергетичних оцінок був розвинутий для дослідження поведінки слабких розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь з сингулярними граничними даними та отримання оцінок для профілю розв'язків. Зокрема, у роботі [12] було отримано наступний результат.

Теорема 1.1. *Нехай $u(t,x)$ – довільний слабкий розв'язок задачі* (1.1), (1.2), (1.3), *де F – це локалізований LS-режим, що визначається наступним чином:*

$$F(t) = F_\beta := \omega_0 (T-t)^{-\left(\frac{q+1}{p-q} - \beta\right)} \quad \forall\, t < T,\, \omega_0 > 0,\, 0 < \beta < \frac{q+1}{p-q} - \frac{1}{p}. \tag{1.7}$$

Тоді існує константа $G > 0$ і значення $\hat{s} > 0$, що залежить лише від відомих параметрів задачі, такі, що для розв'язку u справедлива наступна рівномірна за $t \leqslant T$ енергетична оцінка:

$$E(t,s) + h(t,s) := \int_{\frac{T}{2}}^{t} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau$$
$$+ \sup_{0 \leqslant \tau < t} \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{q+1} dx \leqslant G \omega_0^{\frac{q+1}{\beta(p-q)}} s^{-\nu} \quad \forall\, t \leqslant T,\, \forall\, s \in (0,\hat{s}), \tag{1.8}$$

де $\nu = \frac{(n(p-q)+(q+1)(p+1))(q+1-\beta(p-q))}{\beta(p-q)^2}$, *функції* $E(t,s)$, $h(t,s)$ *є енергетичними функціями, що визначають поведінку розв'язку* u, *а сімейство областей* $\Omega(s)$ *визначається наступним співвідношенням:*

$$\Omega(s) := \{x \in \Omega : d(x) > s\}, \quad s \in (0, s_\Omega), \tag{1.9}$$

де s_Ω *визначає "радіус" цієї області.*

2. Оцінка отриманого результату

Для того, аби оцінити метод енергетичних оцінок, порівняємо отриманий результат з відомими точними оцінками розв'язків напівлінійних рівнянь. Розглянемо початково-крайову задачу для рівняння пористого середовища:

$$\begin{aligned} &u_t - (u^m)_{xx} = 0 \qquad \text{в } (0,T)\times(0,+\infty),\ T<\infty,\ m>1 \\ &u(0,x) = 0, \\ &u(t,0) = T_0(T-t)^{-\theta}, \qquad \theta > 0,\ T_0 = \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

За допомогою бар'єрної техніки (див. [6]) було показано, що за умови $\theta < \frac{1}{m-1}$ виконується наступна оцінка:

$$u(t,x) \to CT_0^{\frac{1}{1-\theta(m-1)}} x^{-\frac{2\theta}{1-\theta(m-1)}}, \quad \text{при } t \to T, \tag{2.2}$$

де $C > 0$ – деяка константа, що залежить лише від відомих параметрів задачі.

Легко бачити, що рівняння (2.1) зводиться до рівняння вигляду (1.1) заміною $v = u^m$. Після заміни матимемо наступну задачу:

$$\begin{aligned} &(v^q)_t - v_{xx} = 0, \qquad 0 < q = \frac{1}{m} < 1, \\ &v(0,x) = 0, \\ &v(t,0) = T_0^{\frac{1}{q}}(T-t)^{-\frac{\theta}{q}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Очевидно, що отримане рівняння є частковим випадком рівняння (1.1) за умов $p = 1$, $n = 1$. Оцінка (2.2) для функції v перепишеться наступним чином:

$$v(t,x) \to CT_0^{\frac{1}{q-\theta(1-q)}} x^{-\frac{2\theta q}{q-\theta(1-q)}} \quad \text{при } t \to T, \quad \theta < \frac{q}{1-q}. \tag{2.4}$$

Тепер визначимо θ таким чином, щоб задовольнити умови теореми 1.1. Неважко показати, що характер загострення граничного режиму задачі (2.3) (див. означення (1.4)) описується наступною функцією:

$$F(t) \leqslant c\,\omega_0(T-t)^{-\frac{\theta(q+1)}{q}}, \quad \omega_0 = T_0^{\frac{q+1}{q}},\ c = \text{const} > 0 \tag{2.5}$$

Визначимо θ наступним співвідношенням:

$$\frac{\theta(q+1)}{q} = \frac{1+q}{1-q} - \beta, \tag{2.6}$$

де β – параметр з (1.7). Оскільки за такого визначення параметр θ задовольняє умові $\theta < \frac{q}{1-q}$, то можемо записати оцінку розв'язку (2.4):

$$v(t,x) \to C\omega_0^{\frac{1}{\beta(1-q)}} x^{-\frac{2(1+q-\beta(1-q))}{\beta(1-q)^2}} \quad \text{при } t \to T. \tag{2.7}$$

З іншого боку, як наслідок з теореми 1.1, справедливе наступне твердження.

Наслідок 2.1. *В умовах теореми 1.1 для класу слабких розв'язків и задачі* (1.1), (1.2), (1.3), *що розглядається в одномірній області* $\Omega \in \mathbb{R}$ *та за додаткових умов* $p = 1$, $0 < q < 1$, *справедлива наступна оцінка:*

$$|u(t,x)| \leqslant C_1\omega_0^{\frac{1}{\beta(p-q)}} d(x)^{-\frac{1-q+2(1+q-\beta(1-q))}{\beta(1-q)^2}} \quad \forall\, x \in \Omega \setminus \Omega(2\hat{s}), \tag{2.8}$$

де $C_1 < \infty$ *залежить лише від відомих параметрів задачі,* $\hat{s}$ *з* (1.8).

Оцінки (2.7) та (2.8) дозволяють порівняти два різні підходи до дослідження поведінки розв'язків розглянутих задач.

3. Доведення теореми 1.1

Доведення теореми 1.1 проводиться методом енергетичних оцінок. Повне доведення наведено у роботі [12]. Для того, щоб відобразити суть методу, наведемо основні етапи доведення.

Доведення. Неважко довести (див. лему 6.2.1 у [5]), що для енергії виконується наступна оцінка:

$$\mathcal{E}^{(u)}(t) := \sup_{0\leqslant\tau<t} \int_\Omega |u(\tau,x)|^{q+1}dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1}dxd\tau \leqslant CF(t)$$
$$\forall t < T, \quad C = \text{const} > 0. \tag{3.1}$$

Із структури енергетичних функцій $E(t,s)$, $h(t,s)$ випливає, що вони є незростаючими функціями аргументу s при довільному $t \leqslant T$. Крім того, в силу умов локалізації, маємо

$$E(t,s) + h(\tau,s) < \infty \quad \forall\, s > 0, \forall\, t \leqslant T. \tag{3.2}$$

Зафіксуємо тепер числа

$$\xi \in (0,1); \quad \alpha_1 \in (p^{-1}, \alpha), \quad \alpha := \frac{q+1}{p-q} - \beta. \tag{3.3}$$

В силу (3.2) маємо дві альтернативи: або

$$E(T,s) + h(T,s) \leqslant 2\omega_0 T^{-\alpha_1} \xi^{-\alpha} \quad \forall\, s > 0, \tag{3.4}$$

або існує таке значення $\bar{s} \in (0, s_\Omega)$, где s_Ω з (1.9), що

$$E(T,s) + h(T,s) > 2\omega_0 T^{-\alpha_1} \xi^{-\alpha} \quad \forall\, s \in (0, \bar{s}). \tag{3.5}$$

Почнемо аналіз з випадку (3.5). Для довільної точки $\tilde{s} \in (0, \bar{s})$ визначимо скінчену зростаючу послідовність $\{t_j\} = \{t_j(\tilde{s})\}$, $j = 1, 2, ...,$ $t_0 = 0$ за допомогою неперервної функції $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot) : [0, t'] \to [t_1, T]$, що визначається наступною рівністю:

$$\big(\Gamma_{\tilde{s}}(t) - t\big)^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \Big(E(\Gamma_{\tilde{s}}(t), \tilde{s}) - E(t, \tilde{s}) + \sup_{t<\tau<\Gamma_{\tilde{s}}(t)} h(\tau, \tilde{s}) \Big). \tag{3.6}$$

Значення $t_1 = t_1(\tilde{s}) = \Gamma_{\tilde{s}}(0)$ визначається наступною рівністю:

$$t_1^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \left(E(t_1, \tilde{s}) + h(t_1, \tilde{s}) \right), \tag{3.7}$$

а t' визначається зі співвідношення:

$$(T - t')^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \Big(E(T, \tilde{s}) - E(t', \tilde{s}) + \sup_{t'<\tau<T} h(\tau, \tilde{s}) \Big). \tag{3.8}$$

В силу означення (3.7), припущення (3.5) та в силу строгої монотонності функції $R_{\tilde{s}}(t) := (E(t, \tilde{s}) + \sup_{0<\tau<t} h(\tau, \tilde{s}))\, t^\alpha$ маємо, що $t_1(\tilde{s}) < T$ $\forall \tilde{s} \in (0, \bar{s}]$. Відмітимо також, що в силу (3.2) з означення (3.8) випливає, що $t' = t'(\tilde{s}) < T \quad \forall \tilde{s} \in (0, \bar{s}]$.

Тож, можемо зробити висновок, що функція $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$ визначає строго монотонну зростаючу послідовність $\{t_j\}$ наступним співвідношенням:

$$t_j := \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j-1}), \quad j = 1, 2, ..., j_0,$$
$$j_0 = j_0(\tilde{s}) < \infty : t_{j_0} = \Gamma_{\tilde{s}}(t_{j_0-1}) > t', \quad t_{j_0-1} \leqslant t'. \tag{3.9}$$

За послідовністю $\{t_j\}$ з (3.9) визначимо послідовність інтервалів $\Delta_j = \Delta_j(\tilde{s}) = t_j - t_{j-1}$, $j = 1, 2, ..., j_0$, для яких в силу означення (3.6) має місце співвідношення:

$$\Delta_j^{-\alpha} = \frac{\xi^\alpha}{\omega_0 T^{\alpha-\alpha_1}} \big(E(t_j, \tilde{s}) - E(t_{j-1}, \tilde{s}) + \sup_{t_{j-1}<\tau<t_j} h(\tau, \tilde{s}) \big). \tag{3.10}$$

Неважко показати, що послідовність $\{\Delta_j\}$ є кваліфіковано спадною, тобто виконуються співвідношення:

$$\Delta_{j+1} \leqslant \xi \Delta_j \quad \forall j \leqslant j_0, \tag{3.11}$$

де $\Delta_{j_0+1} := T - t_{j_0}$. За сформованою послідовністю $\{t_j\}$ визначаються пошарові енергетичні функції $E_j(s)$ і $h_j(s)$ за допомогою наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} E_j(s) &:= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(t,x)|^{p+1} dx dt, \\ h_j(s) &:= \sup_{t_{j-1} \leqslant t < t_j} \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{p+1} dx \qquad \forall\, j \leqslant j_0,\, \forall\, s \in (0, s_\Omega). \end{aligned} \tag{3.12}$$

В силу леми 6.2.3 з [5] енергетичні функції $E_j(s)$ и $h_j(s)$ задовольняють наступну систему диференціальних нерівностей:

$$E_j(s) + h_j(s) \leqslant C_1 h_{j-1}(s) + C_2 \Delta_j^{\nu_1} \left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_1} + C_3 \Delta_j^{\nu_2} \left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_2}, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} h_j(s) \leqslant (1+\gamma) h_{j-1}(s) &+ C_4 \gamma^{-(\nu_1+\mu_1)} \Delta_j^{\nu_1} \left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_1} \\ &+ C_5 \gamma^{-\frac{1}{q}} \Delta_j^{\nu_2} \left(-E_j'(s)\right)^{1+\mu_2}, \quad j = 1, 2, ..., j_0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

для довільного $\gamma : 0 < \gamma < 1$. Додатні константи $C_1 < \infty$, $C_2 < \infty$, $C_3 < \infty$ залежать тільки від відомих параметрів задачі і не залежать від γ,

$$\begin{aligned} &\nu_1 = \frac{(1-\theta)(q+1)}{q(p+1) + \theta(p-q)}, \quad \mu_1 = \frac{(1-\theta)(p-q)}{q(p+1)+\theta(p-q)}, \\ &\theta = \frac{n(p-q)+q+1}{n(p-q)+(q+1)(p+1)} < 1, \quad \nu_2 = \frac{(q+1)}{q(p+1)}, \quad \mu_2 = \frac{(p-q)}{q(p+1)}. \end{aligned}$$

Аналізуючи цю систему, встановимо оцінки для енергетичних функцій $E(t,s)$, $h(t,s)$. Для цього спочатку введемо вагові енергетичні функції:

$$A_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} E_j(s), \quad H_j(s) := \Delta_j^{\alpha_1} h_j(s), \quad j = 1, 2, ..., j_0. \tag{3.15}$$

Покладаючи $\xi < (1+\gamma)^{-\alpha_1^{-1}}$ та ітеруючи систему (3.13), (3.14) для функцій $A_j(s)$, $h_j(s)$, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&A_j(s) + H_j(s) \leqslant \overline{C}_1(1+\gamma)^{j-1}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_0}\right)^{\alpha_1} H_0(s)\\
&+ \Delta_j^{\nu_1-\alpha_1\mu_1} C_6\gamma^{-(\nu_1+\mu_1)}\left[\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{(1+\mu_1)\alpha_1-\nu_1}\left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_1}\right]\\
&+ \Delta_j^{\nu_2-\alpha_1\mu_2} C_7\gamma^{-\frac{1}{q}}\left[\sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{j-i}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{(1+\mu_2)\alpha_1-\nu_2}\left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu_2}\right]\\
&\forall\, j \leqslant j_0,\ \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}),
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

де $C_6 = \max\left\{C_2\gamma^{(\nu_1+\mu_1)}, \overline{C}_1 C_4 \lambda^{-1}\right\}$, $C_7 = \max\left\{C_3\gamma^{\frac{1}{q}}, \overline{C}_1 C_5\lambda^{-1}\right\}$. Введемо тепер нові енергетичні функції:

$$
\begin{aligned}
U_j^{(1)}(s) &:= \sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_1}}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{\nu_1}{1+\mu_1}}(A_i(s)+H_i(s)),\\
U_j^{(2)}(s) &:= \sum_{i=1}^{j}(1+\gamma)^{\frac{j-i}{1+\mu_2}}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i}\right)^{\alpha_1-\frac{\nu_2}{1+\mu_2}}(A_i(s)+H_i(s)).
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Очевидні співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&U_j^{(1)}(s) - A_j(s) - H_j(s) = \theta_{1,j}\,\overline{U}_{j-1}^{(1)}(s), \quad U_0^{(1)}(s) = 0,\\
&U_j^{(2)}(s) - A_j(s) - H_j(s) = \theta_{2,j}\,\overline{U}_{j-1}^{(2)}(s), \quad U_0^{(2)}(s) = 0, \quad j = 1, 2, ..., j_0,
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\theta_{1,j} &:= (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_1}}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1-\frac{\nu_1}{1+\mu_1}} \leqslant \theta_1 := (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_1}}\xi^{\alpha_1-\frac{\nu_1}{1+\mu_1}} < 1,\\
\theta_{1,j} &:= (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_2}}\left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}\right)^{\alpha_1-\frac{\nu_2}{1+\mu_2}} \leqslant \theta_2 := (1+\gamma)^{\frac{1}{1+\mu_2}}\xi^{\alpha_1-\frac{\nu_2}{1+\mu_2}} < 1,
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

За допомогою умов (3.19) накладаються більш жорсткі кінцеві вимоги на вибір константи ξ. Очевидно, що $H_j(s)$, $j = 1, 2, ..., j_0$ є абсолютно неперервними монотонно незростаючими функціями. Тому з нерівностей (3.16), в силу співвідношень (3.18) випливає справедливість для майже всіх $s \in (\tilde{s}, \bar{s})$ співвідношень:

$$U_j^{(1)}(s) \leqslant \overline{C}_1 \lambda^{j-1} H_0(s) + \theta_1 U_{j-1}^{(1)}(s) + C_6 \frac{\Delta_j^{\nu_1-\alpha_1\mu_1}}{\gamma^{\nu_1+\mu_1}} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(1)}(s)\right)^{1+\mu_1}$$
$$+ C_7 \gamma^{-\frac{1}{q}} \Delta_j^{\nu_2-\alpha_1\mu_2} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(2)}(s)\right)^{1+\mu_2}, \quad j = 1, 2, ..., j_0, \tag{3.20}$$

$$U_j^{(2)}(s) \leqslant \overline{C}_1 \lambda^{j-1} H_0(s) + \theta_2 U_{j-1}^{(2)}(s) + C_6 \frac{\Delta_j^{\nu_1-\alpha_1\mu_1}}{\gamma^{\nu_1+\mu_1}} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(1)}(s)\right)^{1+\mu_1}$$
$$+ C_7 \gamma^{-\frac{1}{q}} \Delta_j^{\nu_2-\alpha_1\mu_2} \left(-\frac{d}{ds} U_j^{(2)}(s)\right)^{1+\mu_2}, \quad j = 1, 2, ..., j_0. \tag{3.21}$$

В силу (3.15) і означення (3.10) інтервалів $\{\Delta_j\} = \{\Delta_j(\tilde{s})\}$ $\forall j \leqslant j_0$ можемо отримати наступні оцінки для початкових значень $U_j^{(1)}(\tilde{s})$ та $U_j^{(2)}(\tilde{s})$:

$$\overline{U}_j^{(1)}(\tilde{s}) \leqslant G_1 \omega_0 (1 - \theta_1 \xi^{\alpha-\alpha_1})^{-1} \Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)} \quad \forall\, j \leqslant j_0. \tag{3.22}$$

$$\overline{U}_j^{(2)}(\tilde{s}) \leqslant G_1 \omega_0 (1 - \theta_2 \xi^{\alpha-\alpha_1})^{-1} \Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)} \quad \forall\, j \leqslant j_0. \tag{3.23}$$

де $G_1 = \xi^{-\alpha} T^{\alpha-\alpha_1}$.

Додаючи нерівності (3.20) і (3.21) та враховуючи монотонне незростання функцій $U_j^{(1)}(s)$ і $U_j^{(2)}(s)$, отримаємо наступну систему задач відносно функцій $U_j(s) := U_j^{(1)}(s) + U_j^{(2)}(s)$:

$$\begin{aligned} &\widetilde{U}_j(s) \leqslant \overline{\theta}\widetilde{U}_{j-1}(s) + \max\left\{k_j^{(1)}(-\widetilde{U}_j'(s))^{1+\mu_1}, k_j^{(2)}(-\widetilde{U}_j'(s))^{1+\mu_2}\right\}, \\ &\widetilde{U}_j(\tilde{s}) \leqslant K_j := G_2 \omega_0 \Delta_j^{-(\alpha-\alpha_1)}, \quad j = 1, 2, ..., j_0(\tilde{s}), \end{aligned} \tag{3.24}$$

де $\widetilde{U}_j(s) := U_j(s) - \bar{b}$, $\bar{b} = 2\overline{C}_1(1-\overline{\theta})^{-1}\overline{H}_0(0)$, $k_j^{(1)} = \overline{C}_6 \Delta_j^{\mu_1(\alpha+\beta-\alpha_1)}$, $k_j^{(2)} = \overline{C}_7 \Delta_j^{\mu_2(\alpha+\beta-\alpha_1)}$, $\overline{C}_6 = 2C_6\gamma^{-(\nu_1+\mu_1)}$, $\overline{C}_7 = 2C_7\gamma^{-\frac{1}{q}}$. До системи (3.24) можна застосувати лему 9.2.6 з [5]. В силу цієї леми отримаємо наступну рівномірну оцінку:

$$\widetilde{U}_j(s) \leqslant \omega_0^{\gamma_1} \max\{G_3 \psi(s-\tilde{s}), G_4\} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}),$$
$$\gamma_1 := \frac{\alpha+\beta-\alpha_1}{\beta}, \quad j = 1, 2, ..., j_0, \tag{3.25}$$

де $\psi(s) := s^{-\frac{(1+\mu_1)(\alpha-\alpha_1)}{\mu_1\beta}}$,

$$G_3 = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta-\alpha_1}\right)^{\frac{1+\mu_1}{\mu_1}} \left(\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha+\beta-\alpha_1}\right)^{\frac{(1+\mu_1)(\alpha-\alpha_1)}{\mu_1\beta}} \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2^{\frac{(\alpha+\beta-\alpha_1)}{\beta}} \left(\frac{\overline{C}_6}{1-\overline{\theta}}\right)^{\frac{\alpha-\alpha_1}{\mu_1\beta}} G_2^{\frac{\alpha+\beta-\alpha_1}{\beta}},$$

$$G_4 = \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (1-\overline{\theta})^{\frac{\alpha-\alpha_1}{\beta}} \overline{C}_6^{-\frac{(1+\mu_2)(\alpha-\alpha_1)}{(\mu_2-\mu_1)\beta}} \overline{C}_7^{\frac{(1+\mu_1)(\alpha-\alpha_1)}{(\mu_2-\mu_1)\beta}} G_2^{\frac{\alpha+\beta-\alpha_1}{\beta}},$$

$\bar{\mu}_1 = \left(\frac{\mu_1}{1+\mu_1}\right)^{\frac{1+\mu_1}{\mu_1}}$, $\bar{\mu}_2 = \left(\frac{\mu_2}{1+\mu_2}\right)^{\frac{(1+\mu_1)(1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2}}$. Відповідно для $U_j(s)$ маємо оцінку:

$$U_j(s) \leqslant \omega_0^{\gamma_1} \max\{G_3\psi(s-\tilde{s}), G_4\} + \bar{b} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, \bar{s}), \tag{3.26}$$

Далі визначимо значення $s_1 > \tilde{s}$ наступним чином:

$$\psi(s_1 - \tilde{s}) = G_3^{-1} \max\left\{G_4, \bar{b}\,\omega_0^{-\gamma_1}\right\}. \tag{3.27}$$

Тоді з (3.26) випливає справедливість нерівності:

$$U_j(s) \leqslant 2G_3\,\omega_0^{\gamma_1}\psi(s-\tilde{s}) \quad \forall\, s : \tilde{s} < s < s_2 := \min\{s_1, \bar{s}\}, \quad \forall\, j \leqslant j_0(\tilde{s}). \tag{3.28}$$

Згадуючи означення (3.17) і (3.15), виводимо за допомогою (3.28) наступну оцінку:

$$E_j(s) + h_j(s) \leqslant 2^{-1}\Delta_j^{-\alpha_1}U_j(s) \leqslant G_3\omega_0^{\gamma_1}\psi(s-\tilde{s})\Delta_j^{-\alpha_1} \qquad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_2),\ j \leqslant j_0. \tag{3.29}$$

Тепер оцінимо енергетичні функції $E(t,s)$ і $h(t,s)$. Для цього зафіксуємо довільне значення $i \leqslant j_0$ та просумуємо нерівності (3.29) за j від 1 до i. В силу (3.10) і (3.11) отримуємо

$$\begin{aligned} E(t_i, s) + \sup_{0<\tau<t_i} h(\tau, s) &\leqslant G_3\omega_0^{\gamma_1}\psi(s-\tilde{s})\sum_{j=1}^{i}\Delta_j^{-\alpha_1} \\ &\leqslant G_3\omega_0^{\gamma_1}\psi(s-\tilde{s})\Delta_i^{-\alpha_1}\sum_{j=1}^{i}(\xi^{\alpha_1})^{j-1} \\ &\leqslant G_5\omega_0^{\gamma_2}\psi(s-\tilde{s})\left(E_i(\tilde{s}) + h_i(\tilde{s})\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, s \in (\tilde{s}, s_2), \end{aligned}$$

$$\text{де } \gamma_2 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\alpha_1)}{\alpha\beta}, \quad G_5 = \xi^{\alpha_1}(1-\xi^{\alpha_1})^{-1}T^{-\frac{(\alpha-\alpha_1)\alpha_1}{\alpha}}G_3. \tag{3.30}$$

Наступний крок доведення – отримання оцінки типу (3.30) для довільної точки $t < T$. Відмітимо, що функція $\Gamma_{\tilde{s}}(\cdot)$, визначена в (3.6), неперервно, монотонно та взаємнооднозначно відображає будь-який відрізок $[t_{j-1}, t_j]$ на $[t_j, t_{j+1}]$ $\forall\, j \leqslant j_0 - 1$. Тому, застосовуючи стандартні міркування, можемо стверджувати, що для всіх $t < T$ виконується наступна оцінка:

$$\begin{aligned} E(t,s) + \sup_{0<\tau<t} h(\tau, s) &\leqslant G_5\omega_0^{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\alpha_1)}{\alpha\beta}}(s-\tilde{s})^{-\frac{(1+\mu_1)(\alpha-\alpha_1)}{\mu_1\beta}} \\ &\times \left(E(t,\tilde{s}) + h(t,\tilde{s})\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \quad \forall\, t \leqslant T,\ \forall\, s,\ \tilde{s} : 0 < \tilde{s} < s < s_3, \end{aligned} \tag{3.31}$$

Таким чином встановлено функціональну нерівність відносно параметричного сімейства функцій $U_t(s) := E(t,s) + h(t,s)$. В силу леми Стампакья [10] з (3.31) випливає наступна оцінка:

$$E(t,s) + \sup_{0<\tau<t} h(\tau,s) \leqslant 2^{\frac{(1+\mu_1)\alpha^3}{\mu_1\alpha_1\beta(\alpha-\alpha_1)}} G_5^{\frac{\alpha}{\alpha-\alpha_1}} \omega_0^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} s^{-\frac{(1+\mu_1)\alpha}{\mu_1\beta}}$$
$$\forall\, t \leqslant T,\ \forall\, s \in (0, s_3). \quad (3.32)$$

Неважко перевірити, що оцінка (3.32) співпадає з шуканою оцінкою (1.8) при $G = 2^{\frac{(1+\mu_1)\alpha^3}{\mu_1\alpha_1\beta(\alpha-\alpha_1)}} G_5^{\frac{\alpha}{\alpha-\alpha_1}}$, $\hat{s} = s_3$. Таким чином, теорема 1.1 доведена. □

4. Доведення твердження 2.1

У роботі [12] у якості наслідку (див. Наслідок 1) отримано оцінку профілю слабкого розв'язку задачі (1.1), (1.2), (1.3) за додаткової умови $0 < p - 1 < q < 1$. Показано, що за умов теореми виконуєься наступна оцінка:

$$|u(t,x)| \leqslant C_1 \omega_0^{\frac{1}{\beta(p-q)}} d(x)^{-\mu} \quad \forall\, x \in \Omega \setminus \Omega(2\hat{s}), \quad \forall t \leqslant T, \qquad (4.1)$$

де $C_1 < \infty$ залежить лише від відомих параметрів задачі, $\hat{s}$ з (1.8), а $\mu = \frac{n(p-q)+(p+1)(q+1)-\beta(p-q)(p+1)}{\beta(p-q)^2}$.

Оскільки для нас важливо розглянути задачу (2.3) в одномірній області Ω, то підставляючи у співвідношення (4.1) параметри $n = 1$, $p = 1$, легко отримаємо оцінку (2.8).

Література

[1] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Saint-Venant's principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A, **133** (2003), No. 5, 1075–1119.

[2] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations* // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci., **460** (2004), No. 2051, 3299–3325.

[3] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Self-similar boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh., **135A** (2005), 1195–1227.

[4] V. A. Galaktionov, A. E. Shishkov, *Higher-order quasilinear parabolic equations with singular initisl data* // Communications in Contemp. Math., **8** (2006), No. 3, 331–354.

[5] A. A. Kovalevsky, I. I. Skrypnik, A. E. Shishkov, *Singular Solutions in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 24, De Gruyter, Basel, 2016.

[6] A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Regimes with peaking in problems for quasilinear parabolic equations*, Nauka, Moscow, 1987.

[7] M. A. Shan, *Removable isolated singularities for solutions of anisotropic porous medium equation* // Annali di Matematica Pura ed Applicata, **196** (2017), No. 5, 1913–1926.

[8] A. E. Shishkov, A. G. Shchelkov, *Blow-up boundary regimes for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains* // Sbornik: Mathematics, **190** (1999), No. 3, 447–479.

[9] A. E. Shishkov, Ye. A. Yevgenieva, *Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations* // Mathematische Nachrichten, **292** (2019), No. 6, 1349–1374.

[10] G. Stampacchia, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus* // Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 16 (Été, 1965), Montreal, Les Press. Univ. Montreal, 1966.

[11] Ye. A. Yevgenieva, *Limiting profile of solutions of quasilinear parabolic equations with flat peaking* // Ukr. Math. Bull., **14** (2017), No. 4, 481–495; transl.Journal of Mathematical Sciences, **234** (2018), No. 1, 106–116.

[12] А. Е. Шишков, Е. А. Евгеньева, *Локализованные режимы с обострением для квазилинейных дважды вырождающихся параболических уравнений* // Математические заметки, 2019 (to appear).

Відомості про авторів

Євгенія Олександрівна Євгеньєва
Інститут прикладної математики
і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: yevgeniia.yevgenieva@gmail.com

Андрій Євгенович Шишков
Інститут прикладної математики
і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: aeshkv@yahoo.com