Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 3, 448 – 460

Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та ортопроекційних поперечників класів періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці

Ганна М. Власик, Вікторія В. Шкапа, Ірина В. Замрій

(Представлена В. П. Моторним)

Анотація. Досліджуються деякі апроксимативні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$, у рівномірній метриці. Перша частина роботи присвячена одержанню оцінок найкращих ортогональних тригонометричних наближень згаданих класів у просторі L_∞. У другій частині роботи встановлюються порядкові оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$, у цьому ж просторі, а також оцінки ще однієї апроксимативної характеристики, яка, у певному сенсі, є близькою до ортопроекційного поперечника.

2010 MSC. 41A46, 42A10, 42B99.

Ключові слова та фрази. Найкраще ортогональне тригонометричне наближення, ортопроекційний поперечник, суми Фур'є, ядро Бернуллі, ядро Фейєра, східчастий гіперболічний хрест.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — d–вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi, \pi]$.

Через $L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, позначимо простір функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$, які є 2π–періодичними за кожною змінною, зі скінченою

Стаття надійшла в редакцію 14.07.2019

ISSN 1810 – 3200.

нормою

$$\|f\|_{L_q(\pi_d)} := \|f\|_q = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^q \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le q < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} := \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Надалі будемо вважати, що для $f \in L_1(\pi_d)$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_j = 0, \quad j = \overline{1,d}.$$

Розглянемо ряд Фур'є функції $f \in L_1(\pi_d)$

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})}\mathrm{d}\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Далі, нехай $\psi_j \ne 0$ — довільні функції натурального аргументу, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, $\mathring{\mathbb{Z}}^d = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d$. Припустимо, що ряд

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathring{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn}k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$. Таку функцію називають $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\beta})$–похідною функції f. Через $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ позначимо клас функцій f, для яких існують $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\beta})$–похідні і виконується умова $\left\|f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right\|_p \le 1$, $1 \le p \le \infty$.

Дані класи в одновимірному випадку ($d = 1$) були запропоновані О. І. Степанцем (див., наприклад, [1, Ч. I, с. 132]), а в багатовимірному випадку досліджувалися в роботах [2–4].

Зазначимо, що класи $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ є узагальненням добре відомих класів Вейля–Надя $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ (див., наприклад, [1, Ч. I, с. 131]) та співпадають з ними при $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k_j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $j = \overline{1,d}$.

Через D будемо позначати множину послідовностей ψ_j, $j = \overline{1,d}$, які задовольняють наступні умови:

1) ψ_j — додатні та незростаючі;

2) $\exists M > 0$ таке, що $\forall l \in \mathbb{N}$ $\frac{\psi_j(l)}{\psi_j(2l)} \le M$.

До вказаної множини належать, зокрема, функції $\psi_j(|k_j|) = \frac{1}{|k_j|^{r_j}}$, $r_j > 0$, $k_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j = \overline{1,d}$; $\psi_j(|k_j|) = \frac{\ln^\alpha(|k_j|+1)}{|k_j|^{r_j}}$, $r_j > 0$, $k_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, та інші.

Для двох невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a(n) \ll b(n)$ означає, що існує стала $C_1 > 0$ така, що $a(n) \le C_1 b(n)$. Співвідношення $a(n) \asymp b(n)$ рівносильне тому, що $a(n) \ll b(n)$ і $b(n) \ll a(n)$. Зазначимо, що сталі C_i, $i = 1, 2, \dots$, які далі будуть зустрічатися у порядкових співвідношеннях, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій здійснюється наближення, а також від розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

1. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ у просторі L_∞

Нехай $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, покладемо

$$S_{\theta_M}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right) e^{i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}\right)}, \tag{1.1}$$

де $\widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right)$ – коефіцієнти Фур'є функції f,

$$\theta_M = \left\{ \boldsymbol{k}^j : \boldsymbol{k}^j = (k_1^j, \dots, k_d^j),\ \boldsymbol{k}^j \in \mathbb{Z}^d,\ j = \overline{1, M} \right\},$$

і позначимо

$$e_M^{\perp}(f)_q = \inf_{\theta_M} \|f - S_{\theta_M}(f)\|_q. \tag{1.2}$$

Величину (1.2) називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції f. Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_M^{\perp}(F)_q = \sup_{f \in F} e_M^{\perp}(f)_q = \sup_{f \in F} \inf_{\theta_M} \|f - S_{\theta_M}(f)\|_q. \tag{1.3}$$

Апроксимативна характеристика (1.2) була введена Е. С. Белінським (див., наприклад, [5]). У подальшому напрям, пов'язаний з вивченням ортогональних тригонометричних наближень як індивідуальних функцій, так і певних класів функцій, одержав розвиток у роботах А. С. Романюка [6–9], Н. М. Консевич [10], С. А. Стасюка [11], В. В. Шкапи [12, 13], А. С. Сердюка та Т. А. Степанюк [14]. У цих роботах можна ознайомитися з більш детальною бібліографією.

Тепер введемо ще деякі позначення та сформулюємо твердження, які будемо використовувати при доведенні одержаних результатів.

Кожному вектору $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) \colon \quad 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1,d} \right\},$$

і для $f \in L_1(\pi_d)$ покладемо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}.$$

Для встановлення оцінок зверху найкращих ортогональних тригонометричних наближень функцій з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ нам знадобляться оцінки наближень їх східчасто–гіперболічними сумами Фур'є.

Для $f \in L_q(\pi_d)$ покладемо

$$S_n(f) := S_n(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) < n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}).$$

Зазначимо, що кількість гармонік, які містяться в сумі $S_n(f)$, має порядок $2^n n^{d-1}$. Тоді через $\mathcal{E}_n(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_q$ позначимо величину

$$\mathcal{E}_n(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_q = \sup_{f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} \|f - S_n(f)\|_q.$$

У наступних допоміжних твердженнях, а також у результатах роботи, будуть присутні такі характеристики:

$$\Phi(n) = \min_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) = n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}), \qquad \Psi(n) = \max_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) = n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}).$$

У прийнятих позначеннях справедливе твердження.

Теорема 1.1. [10]. *Нехай $1 < p < \infty$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $\psi_j \in D$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростають. Тоді справедливе співвідношення*

$$\Phi(n) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})} \ll \mathcal{E}_n(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_\infty \ll \Psi(n) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}.$$

Далі, нехай для фіксованого набору функцій ψ_j та чисел $\beta_j \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(|k_j|) e^{i \frac{\pi \beta_j}{2} \mathrm{sgn} k_j} e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})},$$

є рядом Фур'є деякої сумовної на π_d функції, яку позначимо через $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$. Зазначимо, що $D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$ при $\psi_j\left(|k_j|\right) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j = \overline{1,d}$, є багатовимірним аналогом ядра Бернуллі (див., наприклад, [15, с. 31]).

Теорема 1.2. [4]. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що* $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ *не зростають. Тоді для натуральних чисел* M *і* n, *які задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\Phi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \ll e^{\perp}_{M}\left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)_q$$

$$\ll \Psi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Тепер сформулюємо і доведемо одержане твердження.

Теорема 1.3. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що* $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ *не зростають. Тоді для натуральних чисел* M *і* n *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедливі оцінки*

$$\Phi(n)M^{\frac{1}{p}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \ll e^{\perp}_{M}\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_\infty$$

$$\ll \Psi(n)M^{\frac{1}{p}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}. \tag{1.4}$$

Доведення. Оцінки зверху випливають з теореми 1.1 і співвідношень

$$e^{\perp}_{M}(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_\infty \ll \mathcal{E}_n(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_\infty \ll \Psi(n)M^{\frac{1}{p}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)},$$

при $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Перейдемо в (1.4) до оцінки знизу. Нехай $f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ і

$$S_{\theta_M}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right) e^{i\left(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x}\right)},$$

де θ_M — довільний набір із M векторів $\boldsymbol{k}^j \in \mathbb{Z}^d$, $j = \overline{1,M}$.

Нагадаємо, що кожну функцію $f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ можна зобразити у вигляді згортки [1, Ч. I, с.135]

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\varphi * D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right)(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d} \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}, \tag{1.5}$$

де $\|\varphi\|_p \leq 1$ і функція φ майже всюди співпадає із $f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$.

Таким чином, враховуючи (1.5), можемо записати

$$I = \sup_{f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} \|f - S_{\theta_M}(f)\|_\infty$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} \left\| \varphi * D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} - \varphi * \sum_{j=1}^{M} e^{i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}\right)} * D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} \right\|_\infty . \tag{1.6}$$

Далі, покладемо

$$t_M(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{M} e^{i\left(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x}\right)} * D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}).$$

Із (1.6) будемо мати

$$I = \sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} \left\| \varphi * \left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} - t_M \right) \right\|_\infty$$

$$= \left\| D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} - t_M \right\|_{p'} \geq e^{\perp}_M \left(D^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}} \right)_{p'},$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Тепер, скориставшись результатом теореми 1.2, приходимо до шуканої оцінки знизу величини $e^{\perp}_M \left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p} \right)_\infty$:

$$e^{\perp}_M \left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p} \right)_\infty \gg \Phi(n) M^{\frac{1}{p}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)}.$$

Теорему 1.3 доведено. □

Прокоментуємо одержаний результат.

Зауваження 1.1. В одновимірному випадку точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$, у метриці простору L_∞ знайдено В. В. Шкапою [13].

Зауваження 1.2. У випадку $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > \frac{1}{p}$, $1 < p < \infty$, $k_j \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $j = \overline{1,d}$, порядок величин $e^{\perp}_M \left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p} \right)_\infty$, було отримано А. С. Романюком [9, с. 140]. Зазначимо також, що у випадку $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_1}$, з одержаних оцінок в теоремі 1.3 випливають точні за порядком оцінки величини $e^{\perp}_M \left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p} \right)_\infty$.

2. Ортопроекційні поперечники класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ у просторі L_∞

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду

$$\sum_{i=1}^{M} (f, u_i) u_i(\boldsymbol{x}),$$

де

$$(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{x}) \overline{u_i(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x},$$

а $\overline{u_i}$ — функції комплексноспряжені до u_i.

Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас, то величина

$$d_M^{\perp}(F, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{i=1}^{M} (f, u_i) u_i \right\|_q \tag{2.1}$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу у просторі $L_q(\pi_d)$. Ортопроекційний поперечник введено В. М. Темляковим [16].

Паралельно з поперечниками $d_M^{\perp}(F, L_q)$ будемо розглядати величини $d_M^B(F, L_q)$, також введені В. М. Темляковим (див., наприклад, [15, с. 81]), які для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$ означаються за формулою

$$d_M^B(F, L_q) = \inf_{G \in \mathcal{L}_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap \mathcal{D}(G)} \left\| f - Gf \right\|_q . \tag{2.2}$$

Тут через $\mathcal{L}_m(B)_q$ позначено множину лінійних операторів G, які задовольняють умови:

а) область визначення $\mathcal{D}(G)$ цих операторів містить усі тригонометричні поліноми, а область значення міститься у підпросторі простору $L_q(\pi_d)$ розмірності M;

б) існує число $B \ge 1$ таке, що для всіх $\boldsymbol{k} = (k_1, ..., k_d)$ виконується нерівність

$$\|G e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}\|_2 \le B.$$

Зауважимо, що до $\mathcal{L}_M(1)_2$ належать, зокрема, оператори ортогонального проектування на підпростори розмірності M, а також оператори, які задаються по ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, котрий означається послідовністю $\{\lambda_l\}$ такою, що $|\lambda_l| \le 1$ для всіх l.

Із означення величин $d_M^{\perp}(F, L_q)$ і $d_M^B(F, L_q)$ випливає, що вони пов'язані між собою співвідношенням

$$d_M^B(F, L_q) \le d_M^{\perp}(F, L_q). \tag{2.3}$$

Із нерівності (2.3) видно, що оцінки знизу величин $d_M^B(F, L_q)$ можуть слугувати оцінками знизу для ортопроекційних поперечників $d_M^{\perp}(F, L_q)$ і, навпаки, оцінки зверху для поперечників $d_M^{\perp}(F, L_q)$ можна використовувати для оцінок зверху величини $d_M^B(F, L_q)$. Ця обставина буде використовуватися при доведенні відповідного твердження. Також зазначимо, що при доведенні оцінок знизу величини $d_M^B(F, L_q)$ будемо використовувати метод, який розробив В. М. Темляков при встановлені оцінок цих величин для деяких класів функції багатьох змінних [15, 17, 18]. Суть цього методу полягає в побудові функції з класу F, яка "погано" наближається за допомогою операторів G. З детальнішою інформацією стосовно дослідження величин (2.1) і (2.2) можна ознайомитись у роботах [17, 19–28], а також у монографіях [9, 15, 18].

Для того, щоб сформулювати отриманий результат, наведемо необхідні позначення та відомі твердження, які будемо використовувати при доведенні.

Означимо множину

$$Q_n = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\le n} \rho(\boldsymbol{s}),$$

де $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$, яку називають сходинкою гіперболічним хрестом [15, с. 7]. Відомо, що кількість точок цієї множини за порядком дорівнює $2^n n^{d-1}$ [15, с. 70].

Теорема 2.1. [2]. *Нехай $1 < p < \infty$ і $\psi_j \in D$, $j = \overline{1, d}$. Тоді для довільного полінома t з "номерами" гармонік із множини Q_n має місце співвідношення*

$$\left\| t_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}} \right\|_p \ll \frac{1}{\Phi(n)} \|t\|_p .$$

Лема 2.1. [15, с. 25]. *Нехай $1 \le q < p < \infty$ і $f \in L_q(\pi_d)$. Тоді*

$$\|f\|_p^p \ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \left(\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})(1/q-1/p)} \right)^p .$$

Нехай

$$\mathcal{K}_{l-1}(x) = \sum_{|m|\le l-1} \left(1 - \frac{|m|}{l}\right) e^{imx}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

— ядро Фейєра порядку $l-1$.

Для $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_d)$ покладемо

$$\varphi_n(\boldsymbol{x})=\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\mathcal{K}^s(\boldsymbol{x}),$$

де

$$\mathcal{K}^s(\boldsymbol{x})=e^{i(\boldsymbol{k}^s,\boldsymbol{x})}\prod_{j=1}^{d}\mathcal{K}_{2^{s_j-2}-1}(x_j),$$

$$k_j^{s_j}=\begin{cases}2^{s_j-1}+2^{s_j-2}, & s_j\ge 2,\\ 1, & s_j=1,\end{cases}$$

$\mathcal{K}_{n_j}(x_j)\equiv 1$ при $n_j<1$, $j=\overline{1,d}$.

Позначимо через $\tilde{Q}_n$ множину вигляду

$$\tilde{Q}_n=\bigcup_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n}\rho(\boldsymbol{s}).$$

Зауважимо, що “номери” гармонік функції φ_n належать множині $\tilde{Q}_n$, для якої виконується співвідношення $|\tilde{Q}_n|\asymp 2^n n^{d-1}$. Тут і далі $|\mathfrak{L}|$ — кількість елементів множини $\mathfrak{L}$.

Лема 2.2. [15, с. 25]. *Нехай $G\in\mathcal{L}_M(B)_\infty$. Тоді знайдуться число n таке, що $|\tilde{Q}_n|\le C_2(B,d)M$, і вектор $\boldsymbol{y}^*$, для яких*

$$\|\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*)-G\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*)\|_\infty\gg 2^n n^{d-1}.$$

Тепер перейдемо до формулювання і доведення отриманого твердження.

Теорема 2.2. *Нехай $1<p<\infty$, $\psi_j\in D$, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon>0$ таке, що $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростають. Тоді для натуральних чисел M і n таких, що $M\asymp 2^n n^{d-1}$, справедливі оцінки*

$$\Phi(n)M^{\frac{1}{p}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\ll d_M^B(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p},L_\infty)\le d_M^\perp(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p},L_\infty)$$

$$\ll\Psi(n)M^{\frac{1}{p}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}. \qquad (2.4)$$

Доведення. Оцінки зверху в (2.4) є наслідком оцінки наближення функцій з класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ їх східчасто–гіперболічними сумами Фур'є у метриці простору L_∞. Для цього достатньо скористатися теоремою 1.1 та співвідношенням (2.3):

$$d_M^B(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}, L_\infty) \le d_M^{\perp}(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}, L_\infty) \ll \mathcal{E}_n(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_\infty$$

$$\ll \Psi(n) M^{\frac{1}{p}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)},$$

при $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Перейдемо до встановлення в (2.4) оцінок знизу. Для цього, як зазначалося вище, достатньо одержати відповідну оцінку величини $d_M^B(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}, L_\infty)$.

Розглянемо функцію

$$g(\boldsymbol{x}) = C_3 \Phi(n) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} \varphi_n(\boldsymbol{x}), \quad C_3 > 0,$$

і покажемо, що вона належить класу $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$.

Дійсно, згідно з теоремою 2.1, лемою 2.1, використовуючи властивість ядра Фейєра (див., наприклад, [18, Ch. 2, §1])

$$\|\mathcal{K}^s(\boldsymbol{x})\|_p \asymp 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})(1-1/p)}, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{2.5}$$

будемо мати

$$\|g^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\|_p \ll \Phi^{-1}(n) \|g\|_p \ll \Phi^{-1}(n)\Phi(n) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} \Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \mathcal{K}^s(\boldsymbol{x}) \Big\|_p$$

$$\ll \Phi^{-1}(n)\Phi(n) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \left(\|\mathcal{K}^s(\boldsymbol{x})\|_1 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})(1-\frac{1}{p})} \right)^p \right)^{1/p}$$

$$\ll 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} 2^{n(1-\frac{1}{p})} n^{\frac{d-1}{p}} = 1.$$

Звідси випливає, що при певному виборі сталої $C_3 > 0$ функція $g \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$.

Таким чином, скориставшись лемою 2.2, будемо мати

$$d_M^B(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}, L_\infty) \gg \|g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*) - Gg(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*)\|_\infty$$

$$\gg \Phi(n) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} \|\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*) - G\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*)\|_\infty$$

$$\gg \Phi(n) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{p}} 2^n n^{d-1} = \Phi(n) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})} \asymp$$

$$\asymp \Phi(n) M^{\frac{1}{p}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

Теорему 2.2 доведено. □

Наведемо деякі зауваження до отриманого результату.

Зауваження 2.1. В одновимірному випадку точні за порядком оцінки ортопроекційного поперечника $d_M^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_\infty)$, а також величини $d_M^B(L^{\psi}_{\beta,p}, L_\infty)$ встановлено у роботі [28].

Зауваження 2.2. У випадку $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $k_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j = \overline{1,d}$, порядок величин $d_M^{\perp}(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}, L_\infty)$ було отримано В. М. Темляковим [17]. Зазначимо також, що у випадку $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_1}$, з оцінок, одержаних в теоремі 2.2, випливають точні за порядком оцінки величин $d_M^B(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}, L_\infty)$ і $d_M^{\perp}(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}, L_\infty)$.

Література

[1] А. И. Степанец, *Методы теории приближений*, В 2 т., К., Ин-т математики НАН Украины, 2002, **40**, Ч. I, Ч. II.

[2] А. С. Романюк, *Неравенства для L_p–норм (ψ,β)–производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$* // Исследования по теории аппроксимации функций, К., Ин-т математики АН УССР, (1987), 92–105.

[3] Н. М. Консевич, *Найкращі M–членні тригонометричні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь, К., Ін-т математики НАН України, **3** (1998), 204–219.

[4] К. В. Швай, *Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближеннь узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі та класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі L_q* // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **13** (2016), 300–320.

[5] Э. С. Белинский, *Приближение "плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций с ограниченной смешанной производной* // Исследование по теории функций многих вещественных переменных, Ярославль, Яросл. ун–т, 1988, 16–33.

[6] А. С. Романюк, *Приближение классов функций многих переменных их ортогональными проекциями на подпространства тригонометрических полиномов* // Укр. мат. журн., **48** (1996), No. 1, 80–89.

[7] А. С. Романюк, *Приближение классов периодических функций многих переменных* // Мат. замет., **71** (2002), No. 1, 109–121.

[8] А. С. Романюк, *Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных* // Изв. РАН. Сер. матем., **70** (2006), No. 2, 69–98.

[9] А. С. Романюк, *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных* // Праці Ін–ту математики НАН України, **93** (2012), 352.

[10] Н. М. Консевич, *Наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$ тригонометричними поліномами в рівномірній метриці* // Теорія наближення функцій та її застосування, Праці ІМ НАН України, Київ, Ін-т математики НАН України, **31** (2000), 260–268.

[11] С. А. Стасюк, *Найкращі M–членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних* // Укр. мат. журн., **60** (2008), No. 5, 647–656.

[12] В. В. Шкапа, *Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів* $L^{\psi}_{\beta,1}$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **11** (2014) No. 3, 315–329.

[13] В. В. Шкапа, *Оцінки найкращих* m*–членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів* $L^{\psi}_{\beta,p}$ *у рівномірній метриці* // Диференціальні рівняння і суміжні питання, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **11** (2014), No. 2, 305–317.

[14] А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк, *Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості* // Укр. мат. журн., **67** (2015), No. 7, 916–936.

[15] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **178** (1986), No. 2, 3–113.

[16] В. Н. Темляков, *Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных* // Докл. АН СССР, **267** (1982), No. 2, 314–317.

[17] В. Н. Темляков, *Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **189** (1989), 138–168.

[18] V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic functions*, New York, Nova Sci. Publ. Inc., 1993.

[19] А. В. Андрианов, В. Н. Темляков, *О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение* // Тр. МИРАН, **219** (1997), 32– 43.

[20] Э. М. Галеев, *Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных* // Мат. замет., **43** (1988), No. 2, 197–211.

[21] А. С. Романюк, *Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова* $B^r_{p,\theta}$ *периодических функций многих переменных в пространстве* L_q*. I* // Укр. мат. журн., **53** (2001), No. 9, 1224–1231.

[22] А. С. Романюк, *Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова* $B^r_{p,\theta}$ *периодических функций многих переменных в пространстве* L_q*. II* // Укр. мат. журн., **53** (2001), No. 10, 1402–1408.

[23] А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **61** (2009), No. 10, 1348–1366.

[24] А. С. Романюк, *Поперечники и наилучшие приближения классов* $B^r_{p,\theta}$ *периодических функций многих переменных* // Anal. Math., **37** (2011), 181–219.

[25] С. А. Стасюк, О. В. Федуник, *Апроксимативні характеристики класів* $B^{\Omega}_{p,\theta}$ *періодичних функцій багатьох змінних* // Укр. мат. журн., **58** (2006), No. 5, 692– 704.

[26] Н. В. Дерев'янко, *Ортопроекційні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних* // Аналіз і застосування, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **9** (2012), No. 2, 146–156.

[27] Н. В. Дерев'янко, *Оцінки ортопроекційних поперечників класів* $B^{\Omega}_{p,\theta}$ *періодичних функцій багатьох змінних в просторі* L_q // Теорія наближення функцій та суміжні питання, Зб. праць Ін–ту математики НАН України, **10** (2013), No. 1, 95–109.

[28] Г. М. Власик, *Ортопроекційні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q* // Теорія наближення функцій та суміжні питання, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **12** (2015), No. 4, 111–124.

Відомості про авторів

Ганна Миколаївна Власик
Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна
E-Mail: annawlasik@gmail.com

Вікторія Вікторівна Шкапа
Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна
E-Mail: vshkapa@ukr.net

Ірина Вікторівна Замрій
Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна
E-Mail: irinafraktal@gmail.com