Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 3, 307 – 328

Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами

Александр К. Бахтин, Ирина В. Денега

(Представлена В. Я. Гутлянским)

Посвящается 100-летию со дня рождения Г. Д. Суворова

Аннотация. В работе рассматривается одна известная открытая проблема о максимуме следующего функционала

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

где B_0,..., B_n, $n \geqslant 2$, – взаимно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$ и $\gamma \in (0, n]$ ($r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно a). При всех значениях параметра $\gamma \in (0, n]$ нужно показать, что максимум достигается для конфигурации из областей B_k и точек a_k, $k = \overline{0,n}$, обладающей n-кратной симметрией. При $\gamma = 1$ проблему доказал В. Н. Дубинин [1, 2], для $0 < \gamma < 1$ – Г. В. Кузьмина [3]. Л. В. Ковальов [4] получил ее решение для $n \geqslant 5$ при дополнительном ограничении, что углы между соседними отрезками $[0, a_k]$ не превышают $2\pi/\sqrt{\gamma}$. В частности, в данной работе эта проблема решается при $n = 2$ и $\gamma \in (1, 2]$.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Внутренний радиус области, взаимно непересекающиеся области, единичная окружность, функционал, функция Грина, квадратичный дифференциал, проблема В. Н. Дубинина.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множества натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$, $t \in \mathbb{R}^+$ — функция Жуковского. Пусть $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Систему точек $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}\right\}$ назовем n-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$

Статья поступила в редакцию 14.06.2019

при $k=\overline{1,n}$, $0=\arg a_1<\arg a_2<\ldots<\arg a_n<2\pi$. Обозначим $\alpha_k:=\dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1}:=\alpha_1$, $k=\overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=2$.

Проблема 1. (В. Н. Дубинин [1,2]) При всех значениях параметра $\gamma\in(0,n]$ показать, что максимум функционала

$$I_n(\gamma)=r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right),$$

где B_0, B_1, B_2,...,B_n, $n\geqslant 2$, – попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0=0$, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, достигается для конфигурации из областей B_k и точек a_k, обладающей n-кратной симметрией.

В работе [1] сформулированная выше проблема была решена для значения параметра $\gamma=1$ и всех значений натурального параметра $n\geqslant 2$. А именно, было показано, что справедливо неравенство

$$r(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant r\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(D_k,d_k\right),$$

где d_k, D_k, $k=\overline{0,n}$, – полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-1)w^n+1}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Л. В. Ковалев в 1996 году в работе [4] получил ее решение при определенных достаточно жестких ограничениях на геометрию расположения систем точек на единичной окружности, а именно для таких систем точек для которых выполняются следующие неравенства

$$0<\alpha_k\leqslant 2/\sqrt{\gamma},\ k=\overline{1,n},\ n\geqslant 5.$$

В работе [5] было показано, что результат Л. В. Ковальова справедлив и при $n=4$. В 2003 году в работе [3] получено решение данной проблемы при $\gamma\in(0,1]$. Частные случаи этой проблемы также изучались во многих работах (см., например, [6–22]).

Для дальнейшего нам важно вычислить величину

$$I_n^0(\gamma)=r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(D_k,d_k\right),$$

где d_k, D_k, $k=\overline{0,n}$, $d_0=0$, есть, соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \tag{1}$$

Как показано в работах [1, 2, 4, 7], величина $I_n^0(\gamma)$ имеет вид

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (2)$$

В данной работе получены следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $n = 2$, $\gamma \in (1, 2]$. Тогда для любых различных точек a_1 и a_2 единичной окружности и любых взаимно непересекающихся областей B_0, B_1, B_2, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\, r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2) \leqslant I_2^0(\gamma) \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки a_0, a_1, a_2 и области B_0, B_1, B_2 являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2} dw^2. \qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$I_2(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2), \quad \gamma \in (1, 2],$$

где B_0, B_1, B_2 – взаимно непересекающиеся области, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, 2}$, $a_0 = 0$. В работе [1] была полностью исследована задача о максимуме функционала $I_2(\gamma)$ на тройках произвольных попарно непересекающихся областей B_0, B_1, B_2 расширенной комплексной плоскости таких, что $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, 2}$, $a_0 = 0$, $a_k = (-1)^k i$ и получено следующее неравенство

$$I_2(\sigma^2) \leqslant S(\sigma) = 2^{\sigma^2+6} \cdot \sigma^{\sigma^2} \cdot (2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} \cdot (2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2},$$

$\sigma \in (0, 2)$. Знак равенства в котором достигается, когда точки 0, $-i$, i и области B_0, B_1, B_2 являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\sigma^2)w^2 - \sigma^2}{w^2(w^2+1)^2} dw^2.$$

Заметим, что функционал $I_2(\sigma^2)$ при $\sigma > 2$ не ограничен.

Существует единственный конформный автоморфизм комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$
$$\widetilde{w} = T(w),$$
который переводит три заданные точки a_0, a_1, a_2 в точки $T(a_0) = 0$, $T(a_1) = 1$, $T(a_2) = -1$. Известно [6], что функционал
$$\frac{r^{\alpha}(B_0, a_0) \cdot r^{\beta}(B_1, a_1) \cdot r^{\gamma}(B_2, a_2)}{|a_0 - a_1|^{\alpha+\beta-\gamma} \cdot |a_0 - a_2|^{\alpha-\beta+\gamma} \cdot |a_1 - a_2|^{-\alpha+\beta+\gamma}},$$
где α, β, $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$, $\{B_k\}_{k=0}^{2}$ — произвольная система взаимно неналегающих областей таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k \in \{0, 1, 2\}$, инвариантен относительно всех конформных автоморфизмов комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Легко проверить, что этот результат имеет место и для произвольных многосвязных областей.

Тогда в силу конформной инвариантности функционала $I_2(\gamma)$, имеет место равенство
$$\frac{r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2)}{|a_1|^{\gamma} \cdot |a_2|^{\gamma} \cdot |a_1 - a_2|^{2-\gamma}} = \frac{r^{\gamma}(\widetilde{B_0}, 0) r(\widetilde{B_1}, 1) r(\widetilde{B_2}, -1)}{2^{2-\gamma}},$$
где $\widetilde{I_2(\gamma)} = r^{\gamma}(\widetilde{B_0}, 0) r(\widetilde{B_1}, 1) r(\widetilde{B_2}, -1)$, $\widetilde{B_0} = T(B_0)$, $\widetilde{B_1} = T(B_1)$, $\widetilde{B_2} = T(B_2)$. Отсюда следует, что
$$\frac{I_2(\gamma)}{|a_1 - a_2|^{2-\gamma}} = \frac{\widetilde{I_2(\gamma)}}{2^{2-\gamma}},$$
и, таким образом,
$$I_2(\gamma) = \widetilde{I_2(\gamma)} \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$
Используя выше указанный результат работ [1,2], приходим к основному неравенству теоремы 1
$$I_2(\gamma) \leqslant I_2^0(\gamma) \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$
В частности, если точки a_1 и a_2 расположены не диаметрально, тогда последнее неравенство строгое. Если $\gamma = 2$, тогда $I_2(\gamma) \leqslant I_2^0(\gamma)$. □

Замечание 1. Из теоремы 1 следует полное решение Проблемы 1 при $n = 2$.

При $n = 2$ и $\gamma \in (0, 2]$ можно рассмотреть более общую задачу о максимуме функционала $I_2(\gamma)$ для произвольных фиксированных точек $a_1, a_2 \in \mathbb{C}/\{0\}$. Используя метод доказательства теоремы 1, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $n = 2$, $\gamma \in (0, 2]$. Тогда для произвольных различных точек $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}/\{0\}$ таких, что*

$$|a_1 a_2| \leqslant 1, \quad \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma} \leqslant 1,$$

и любых взаимно непересекающихся областей B_0, B_1, B_2, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right) \leqslant \frac{4\left(\gamma\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)^{2+\frac{\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{4}$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки a_0, a_1, a_2 и области B_0, B_1, B_2 являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (3).

Доказательство. Аналогично рассуждениям доказательства теоремы 1, получаем соотношение

$$\frac{r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2)}{|a_1|^{\gamma} \cdot |a_2|^{\gamma} \cdot |a_1 - a_2|^{2-\gamma}} = \frac{r^{\gamma}(\widetilde{B_0}, 0) r(\widetilde{B_1}, 1) r(\widetilde{B_2}, -1)}{2^{2-\gamma}},$$

из которого следует, что

$$r^{\gamma}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leqslant I_2^0(\gamma) |a_1 a_2|^{\gamma} \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma}.$$

Далее, учитывая условия $|a_1 a_2| \leqslant 1$ и $\left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma} \leqslant 1$, получаем основное неравенство теоремы 2. □

Следствие 1. *Пусть $n = 2$, $\gamma = 2$. Тогда для произвольных различных точек $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}/\{0\}$ таких, что*

$$|a_1 a_2| \leqslant 1,$$

и любых взаимно непересекающихся областей B_0, B_1, B_2, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство (4). Знак равенства в котором достигается, когда точки a_0, a_1, a_2 и области B_0, B_1, B_2 являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (3).

Из теоремы 2 для произвольной 2-лучевой системы различных точек имеют место следующие утверждения.

Следствие 2. *Пусть $n = 2$, $\gamma \in (0, 2]$. Тогда для произвольной 2-лучевой системы различных точек $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}/\{0\}$ такой, что*

$$|a_1 a_2| \leqslant 1, \quad \left(\frac{1}{2}|a_1 - a_2|\right)^{2-\gamma} \leqslant 1,$$

и любых взаимно непересекающихся областей B_0, B_1, B_2, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство (4). *Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки a_0, a_1, a_2 и области B_0, B_1, B_2 являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала* (3).

Следствие 3. *Пусть $n = 2$, $\gamma = 2$. Тогда для произвольной 2-лучевой системы различных точек $A_2 = \{a_1, a_2\} \in \mathbb{C}/\{0\}$ такой, что*

$$|a_1 a_2| \leqslant 1,$$

и любых взаимно непересекающихся областей B_0, B_1, B_2, $a_1 \in B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_2 \in B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство (4). *Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки a_0, a_1, a_2 и области B_0, B_1, B_2 являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала* (3).

Используя результат теоремы 1 можно получить следующую оценку сверху максимума функционала $I_n(\gamma)$ на единичной окружности в Проблеме 1.

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, n]$. Тогда для любой системы различных точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ единичной окружности и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-\gamma} \left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Доказательство. Имеет место соотношение

$$(I_n(\gamma))^2 = \left(r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0, 0)\right)^n \prod_{k=1}^{n} r^2(B_k, a_k).$$

Последнее выражение можно записать следующим образом

$$\left(r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0, 0)\right)^n \prod_{k=1}^{n} r^2(B_k, a_k) = \left[r^{\frac{2\gamma}{n}}(B_0, 0)\, r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2)\right]$$

$$\times\left[r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_2,a_2\right)r\left(B_3,a_3\right)\right]\cdot\ldots\cdot\left[r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_n,a_n\right)r\left(B_1,a_1\right)\right].$$

Далее, аналогично теореме 1 для каждого сомножителя

$$r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_k,a_k\right)r\left(B_{k+1},a_{k+1}\right)$$

$k=\overline{1,n}$, $a_{n+1}:=a_1$, строится свой конформный автоморфизм комплексной плоскости, тогда имеет место неравенство

$$r^{\frac{2\gamma}{n}}\left(B_0,0\right)r\left(B_k,a_k\right)r\left(B_{k+1},a_{k+1}\right)\leqslant I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\left(\frac{1}{2}|a_k-a_{k+1}|\right)^{2-\frac{2\gamma}{n}}.$$

И, таким образом, получаем соотношение

$$I_n(\gamma)\leqslant\left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2}|a_k-a_{k+1}|\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Максимум произведения $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k-a_{k+1}|$ достигается в случае, если точки a_k, $k=\overline{1,n}$, $a_{n+1}:=a_1$, лежат на единичной окружности и образуют правильный многоугольник. Поскольку сторона правильного n-угольника через радиус R описанной окружности равна $2R\sin\frac{\pi}{n}$, мы приходим к основному неравенству теоремы 3

$$I_n(\gamma)\leqslant\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-\gamma}\left(I_2^0\left(\frac{2\gamma}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

□

Следующие теоремы изучают дополнительные ограничения при которых можно получить полное решение Проблемы 1.

Теорема 4. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 4$, $\gamma\in(1,n]$ и*

$$K(n,\gamma)=\left[I_n^0(\gamma)\cdot\mu_n(\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

где $I_n^0(\gamma)$ определяется соотношением (2), *а*

$$\mu_n(\gamma)=\left[\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right]^{-1}.$$

Тогда для любой системы различных точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ единичной окружности и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, таких, что

$$r(B_0, 0) \leqslant K(n,\gamma),$$

справедливо неравенство

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (5)$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (1).

Доказательство. Рассмотрим величину

$$\Lambda_n(\gamma) := \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)}{r^{\gamma}\left(D_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(D_k,d_k\right)},$$

где d_k, D_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, есть, соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала (1). Из условий теоремы 4 следует, что

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{(K(n,\gamma))^{\gamma}\cdot\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Согласно методу работы [7, с. 255], имеем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)$$

$$\leqslant 2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k \leqslant 2^n\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)},$$

где $\alpha_0 := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\alpha_k$, $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Тогда выполняется соотношение

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{(K(n,\gamma))^{\gamma}\cdot\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Отсюда учитывая условия теоремы 4, получаем

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant 1.$$

Таким образом, при условии $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ справедливо неравенство

$$I_n(\gamma) \leqslant I_n^0(\gamma)$$

и в этом случае теорема доказана. Для случая $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$ результат теоремы 4 следует из утверждения работ [4, 5]. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. □

Если $\gamma = n$, тогда из теоремы 4, имеем следующий результат.

Следствие 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma = n$ и*

$$r(B_0, 0) \leqslant n^{-2n-1}\left(1 - n^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{n-1}{n}}(n-1)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\times\left(\frac{4}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{n}-1}\left(\frac{1 - n^{-\frac{1}{2}}}{1 + n^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{n}}}.$$

Тогда для любой системы различных точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ единичной окружности и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, справедливо неравенство (5). *Знак равенства в котором достигается при условиях теоремы 4.*

Теорема 4 дополняет и усиливает результат работы [11].

Следствие 5. [11] *Пусть B_0, B_1, B_2,..., B_n, $(n \geqslant 2)$ – попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_1 = 1$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, и $r(B_0, 0) \leqslant 1$. Тогда для произвольного натурального n, $n \geqslant 76$ и $\gamma \in (1, n]$, справедливо неравенство* (5). *Знак равенства в котором достигается при условиях теоремы 4.*

Теорема 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. Тогда для любой системы различных точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ единичной окружности и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

где d_k, D_k, $k = \overline{0, n}$, $d_0 = 0$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (1).

Доказательство. Разобьем доказательство на два этапа. При условии $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$, $\alpha_0 := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \alpha_k$, результат теоремы 5 следует из работ [4, 5]. В случае $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$ аналогично доказательству теоремы 4 рассмотрим величину

$$\Lambda_n(\gamma) := \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^\gamma\left(B_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^n r\left(B_k,a_k\right)}{r^\gamma\left(D_0,0\right)\prod\limits_{k=1}^n r\left(D_k,d_k\right)},$$

где d_k, D_k, $k=\overline{0,n}$, $d_0=0$, есть, соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала (1). Как показано в работе [8] при условиях теоремы 5 выполняется неравенство

$$r^\gamma\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^n r\left(B_k,a_k\right) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^n r\left(B_k,a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}. \qquad (6)$$

Тогда, имеем следующее соотношение

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod\limits_{k=1}^n r\left(B_k,a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}$$

$$\leqslant \frac{n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}.$$

Таким образом, аналогично работам [7, 19, 20], получаем

$$\Lambda_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^6 f_k(n),$$

где

$$f_1(n) = n^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot\left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1}\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}, \quad f_2(n) = \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_3(n) = \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}, \quad f_4(n) = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

$$f_5(n)=\left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}, \quad f_6(n)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Рассмотрим сначала случай $\gamma_n = n^{0,5}$, тогда

$$\Lambda_n(n^{0,5})=\prod_{k=1}^{6} f_k(n),$$

где

$$f_1(n)=(n)^{-\frac{n^{0.5}}{2}}\left[\frac{n}{4}\right]^{n^{0,5}+1}\left[1-\frac{1}{n^{0,25}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}}, f_2(n)=\left(n^{0,5}\right)^{n^{-0,5}},$$

$$f_3(n)=\left(1-n^{-1,5}\right)^{n+n^{-0,5}}, \quad f_4(n)=\left(\frac{1+n^{-0,75}}{1-n^{-0,75}}\right)^{2n^{0,25}},$$

$$f_5(n)=\left(\frac{4}{n^{0,25}}\right)^{1-n^{-0,5}}, \quad f_6(n)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{n^{0,5}}}.$$

Далее, по стандартной схеме исследуем каждую функцию $f_k(n)$, $k=\overline{1,6}$, последнего соотношения. Анализ показывает, что функция $f_1(n)$ монотонно убывает на промежутке $n\geqslant 7$, поэтому справедливо неравенство

$$f_1(n)<f_1(7)\leqslant 0,016666, \quad n\geqslant 7.$$

Функция $f_2(n)$ также монотонно убывает на промежутке $n\geqslant 7$. Таким образом,

$$f_2(n)<f_2(7)\leqslant 1,444469, \quad n\geqslant 7.$$

Очевидно, что

$$f_3(n)<f_3(7)\leqslant 1, \quad n\geqslant 7.$$

Функцию $f_4(n)$ представим следующим образом

$$f_4(n)=\left(1+n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}n^{-0,75}2n^{0,25}}\left(1-n^{-0,75}\right)^{(-n^{0,75})(n^{-0,75})2n^{0,25}}.$$

Поскольку $\left(1+n^{-0,75}\right)^{n^{0,75}}<e$ при $n\in\mathbb{N}$, а $\left(1-n^{-0,75}\right)^{-n^{0,75}}<3$ при $n\geqslant 10$, то

$$f_4(n)\leqslant (3e)^{2n^{-0,5}}.$$

Таким образом, $y_4(n)$ убывает на всей области определения и

$$f_4(n)<f_4(7)\leqslant 4,886133, \quad n\geqslant 7.$$

Функция $f_5(n)$ убывает на промежутке $n\geqslant 8$, отсюда

$$f_5(n)<f_5(8)\leqslant 1,750853, \quad n\geqslant 8.$$

Для функции $f_6(n)$ справедливо следующее соотношение

$$f_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-n^{0,5}\frac{n-1}{n}} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant 3, \quad n \geqslant 7.$$

Тогда суммируя все выше сказанное, получаем

$$\Lambda_n(n^{0,5}) = \prod_{k=1}^{6} f_k(n)$$

$$\leqslant 0,016666 \cdot 1,444469 \cdot 1 \cdot 4,886133 \cdot 1,750853 \cdot 3 \approx 0,617839 < 1,$$

то есть

$$\Lambda_n(n^{0,5}) < 1 \quad \text{для } n \geqslant 7.$$

С другой стороны, непосредственные вычисления показывают, что $\Lambda_n\left(n^{0,5}\right) < 1$ для $n \in [3, 6]$.

n	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f_3(n)$	$f_4(n)$	$f_5(n)$	$f_6(n)$	$\Lambda_n\left(n^{0,5}\right)$
3	0,052699	1,373197	0,465492	11,910563	1,599730	1,408801	0,904224
4	0,039628	1,414213	0,548322	8,086547	1,681792	1,539600	0,643422
5	0,029590	1,433159	0,600258	6,329659	1,722722	1,637880	0,454626
6	0,022149	1,441582	0,636628	5,320779	1,742416	1,715055	0,323209

Таким образом,

$$\Lambda_n(n^{0,5}) < 1 \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 3.$$

Пусть $\gamma \in (1, \gamma_n\,]$. Функция

$$n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

при каждом фиксированном n монотонно возрастает по γ на интервале $(1, \gamma_n\,]$, а функция $I_n^0(\gamma)$ монотонно убывает по γ на этом же интервале, поскольку

$$(\ln I_n^0(\gamma))' = \left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{4\gamma}{n^2 - \gamma}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln\left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}}\right)\right) < 0$$

при каждом фиксированном n. Таким образом,

$$\Lambda_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} = \Lambda_n(\gamma_n) < 1.$$

То есть, $I_n(\gamma_n) < I_n^0(\gamma_n)$ при всех значениях γ_n, указанных в теореме 5. А это означает, что в случае $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$ при данных значениях параметров нет экстремальных конфигураций. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. $\square$

Метод доказательства теорем 4 и 5 можно применить и к решению следующей задачи.

Проблема 2. При каждом фиксированном $\gamma \in (0, n]$ показать, что максимум функционала $I_n(\gamma)$, где B_0, B_1, B_2,..., B_n, $n \geqslant 2$, – взаимно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$ и $B_1, \ldots, B_n$ симметричны относительно единичной окружности, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, достигается для конфигурации из областей B_k и точек a_k, обладающей n-кратной симметрией.

Проблема 2 в случае $\gamma = 1$ была сформулирована в качестве открытой проблемы в работе [1]. Для $n \geqslant 2$ и $\gamma = 1$ ее решил Л.В. Ковалев [9, 10]. Однако для значений $\gamma \neq 1$ эта проблема долгое время не поддавалась решению. И только в 2017 году в работе [12] она была решена для $n \geqslant 2$ и $\gamma \in (0, 1)$, а в работе [13] – для $n \geqslant 14$ и $\gamma \in (1, \sqrt[3]{n}]$. Имеет место следующий результат. Величина

$$J_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

где d_k, D_k, $k = \overline{0, n}$, $d_0 = 0$, есть, соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2, \tag{7}$$

как показано в работах [9, 10, 12, 13], имеет вид

$$J_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}. \tag{8}$$

Теорема 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 8$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$, $\gamma_n = \sqrt{n}$. Тогда для любой системы различных точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ единичной окружности и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, причем области B_k, $k = \overline{1, n}$, обладают симметрией относительно единичной окружности, справедливо неравенство*

$$r^\gamma\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^\gamma\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

где d_k, D_k, $k = \overline{0, n}$, $d_0 = 0$, есть, соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала (7).

Доказательство. Для систем неналегающих областей B_k, $k=\overline{0,n}$, рассматриваемых в теореме 6, справедливо выше упомянутое неравенство (6) [14]. Тогда, аналогично доказательству теоремы 5, используя соотношения (6), (8) и рассуждения работ [12, 13], при условии $\alpha_0\sqrt{2\gamma}\geqslant 2$, $\alpha_0:=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\alpha_k$, имеем

$$\Lambda_n(\gamma)\leqslant\frac{n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{4^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}}\left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}}.$$

Проведя преобразования, аналогичны преобразованиям при доказательстве теоремы 5, получаем неравенство

$$\Lambda_n(\gamma)\leqslant\prod_{k=1}^{5}f_k(n),$$

где

$$f_1(n)=\frac{n^{\frac{\gamma}{2}}}{4^\gamma}\left[1-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}},$$

$$f_2(n)=\left(\frac{n}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1+\frac{\gamma}{n}},\quad f_3(n)=\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}},$$

$$f_4(n)=\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},\quad f_5(n)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Далее, аналогично теореме 5 показываем, что в случае $\alpha_0\sqrt{2\gamma}\geqslant 2$ и $n\geqslant 8$ экстремальных конфигураций нет, то есть

$$\Lambda_n(\gamma)\leqslant 1.$$

При условии $\alpha_0\sqrt{2\gamma}<2$ и $n\geqslant 8$ утверждение теоремы 6 следует из работы [15]. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. □

Используя рассуждения леммы 1 работы [19], мы получили следующие результаты, касающиеся оценок произведения внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей, расположенных на вещественной оси.

Теорема 7. *Пусть $p,q\in\mathbb{N}$, $p+q\geqslant 3$, $\gamma\in(0,p+q]$. Тогда для любых фиксированных точек вещественной оси $a_k\in\mathbb{R}^+$, $k=\overline{1,p+q}$,* *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_0, B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)$$

$$\leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{p+q}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{p+q}}.$$

Доказательство. Пусть $d(E)$ – трансфинитный диаметр компактного множества $E \subset \mathbb{C}$. Тогда справедливо соотношение

$$r\left(B_0, 0\right) = r\left(B_0^+, \infty\right) = \frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^+)} \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p+q} \overline{B}_k^+\right)}, \tag{9}$$

где $B^+ = \{z; \frac{1}{z} \in B\}$.

В силу известной теоремы Пойа [16, с. 28], справедливо неравенство

$$\mu E \leqslant \pi d^2(E),$$

где μE обозначает лебегову меру компактного множества E. Отсюда получаем, что

$$d(E) \geqslant \left(\frac{1}{\pi} \mu E\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда из (9), получаем

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p+q} \overline{B}_k^+\right)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p+q} \overline{B}_k^+\right)}} = \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{p+q} \mu \overline{B}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Из теоремы о минимизации площади [17, с. 34], имеем

$$S(B) = \mu(B) \geqslant \pi r^2\left(B, a\right).$$

Из неравенства (10) непосредственно следует, что

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{p+q} \mu \overline{B}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{p+q} \mu B_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{p+q} r^2\left(B_k^+, a_k^+\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{p+q}r^2\left(B_k^+,a_k^+\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Используя конформную инвариантность функции Грина, имеем

$$g_{B_k}(z,a_k)=g_{B_k^+}(w^+,a_k^+),\quad w^+=\frac{1}{z}.$$

Используя соотношение

$$g_{B_k^+}(w^+,a_k^+)=g_{B_k^+}\left(\frac{1}{z},\frac{1}{a_k}\right)=\ln\frac{1}{|\frac{1}{z}-a_k^+|}+\ln r(B_k^+,a_k^+)+o(1),$$

получаем,

$$r\left(B_k^+,a_k^+\right)=\frac{r\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^2}$$

и приходим к следующему неравенству

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{p+q}\frac{r^2(B_k,a_k)}{|a_k|^4}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Из предположения теоремы вытекает соотношение

$$r^\gamma\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{p+q}r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\frac{\prod\limits_{k=1}^{p+q}r\left(B_k,a_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{p+q}\frac{r^2(B_k,a_k)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Из неравенства Коши автоматически получаем соотношение

$$\frac{1}{p+q}\sum_{k=1}^{p+q}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\geqslant\left[\prod_{k=1}^{p+q}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{p+q}}.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\left[\sum_{k=1}^{p+q}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}\geqslant\left[(p+q)\left[\prod_{k=1}^{p+q}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{p+q}}\right]^{\frac{\gamma}{2}}$$

$$= (p+q)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\frac{\gamma}{p+q}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} |a_k|\right)^{-\frac{2\gamma}{p+q}}.$$

Таким образом,

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)$$

$$\leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)}{(p+q)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\prod\limits_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{\frac{\gamma}{p+q}} \left(\prod\limits_{k=1}^{p+q} |a_k|\right)^{-\frac{2\gamma}{p+q}}}$$

$$= (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{p+q}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{p+q}}.$$

□

Замечание 2. Если $\gamma = p+q$ и $|a_k| \leqslant R$, тогда при условиях Теоремы 7 имеем соотношение

$$r^{p+q}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant (p+q)^{-\frac{p+q}{2}} \cdot R^{2(p+q)}.$$

Теорема 8. *Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q \geqslant 3$, $\gamma \in (0, \frac{1}{2}(p+q+2)]$. Тогда для любых фиксированных точек вещественной оси $a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, p+q}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_∞, B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$\left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)$$

$$\leqslant ((p+q)+1)^{-\gamma\frac{(p+q)+1}{(p+q)+2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_k, a_k\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{(p+q)+2}} \left(\prod_{k=1}^{p+q} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{(p+q)+2}}.$$

Доказательство. Используя соотношения (9), (10) доказательства теоремы 1, получаем

$$r\left(B_0, 0\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\left[r^2\left(B_\infty^+, 0\right) + \sum\limits_{k=1}^{p+q} r^2\left(B_k^+, a_k^+\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left[r^2\left(B_\infty, \infty\right) + \sum\limits_{k=1}^{p+q} \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$r\left(B_{\infty},\infty\right) \leqslant \frac{1}{\left[r^{2}\left(B_{0},0\right)+\sum\limits_{k=1}^{p+q} r^{2}\left(B_{k},a_{k}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Из неравенства Коши

$$\left(r^{2}\left(B_{\infty},\infty\right)+\sum_{k=1}^{p+q}\frac{r^{2}\left(B_{k},a_{k}\right)}{|a_{k}|^{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\geqslant ((p+q)+1)^{\frac{1}{2}}\left[r\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{p+q}\frac{r\left(B_{k},a_{k}\right)}{|a_{k}|^{2}}\right]^{\frac{1}{(p+q)+1}}.$$

Таким образом, с учетом выше приведенных соотношений

$$r\left(B_{0},0\right)$$

$$\leqslant ((p+q)+1)^{-\frac{1}{2}}\left[r\left(B_{\infty},\infty\right)\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_{k},a_{k}\right)\right]^{-\frac{1}{(p+q)+1}}\cdot\prod_{k=1}^{p+q}|a_{k}|^{\frac{2}{(p+q)+1}}.$$

Аналогично,

$$r\left(B_{\infty},\infty\right) \leqslant ((p+q)+1)^{-\frac{1}{2}}\left[r\left(B_{0},0\right)\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_{k},a_{k}\right)\right]^{-\frac{1}{(p+q)+1}}.$$

Далее, используя несложные преобразования, имеем

$$r\left(B_{0},0\right)r\left(B_{\infty},\infty\right)$$

$$\leqslant ((p+q)+1)^{-\frac{(p+q)+1}{(p+q)+2}}\left[\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_{k},a_{k}\right)\right]^{-\frac{2}{(p+q)+2}}\prod_{k=1}^{p+q}|a_{k}|^{\frac{2}{(p+q)+2}}.$$

И, окончательно, получаем основное неравенство теоремы 8

$$\left[r\left(B_{0},0\right)r\left(B_{\infty},\infty\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_{k},a_{k}\right)$$

$$\leqslant ((p+q)+1)^{-\gamma\frac{(p+q)+1}{(p+q)+2}}\left[\prod_{k=1}^{p+q} r\left(B_{k},a_{k}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{(p+q)+2}}\prod_{k=1}^{p+q}|a_{k}|^{\frac{2\gamma}{(p+q)+2}}.$$

□

Замечание 3. Если $\gamma = \frac{1}{2}(p+q+2)$ и $|a_k| \leqslant R$, тогда при условиях Теоремы 8 имеем соотношение

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^{\frac{1}{2}(p+q+2)} \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q+1)^{-\frac{p+q+1}{2}} \cdot R^{(p+q)}.$$

Теорема 9. *Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $p+q \geqslant 3$, $\gamma \in (0,\, p+q]$. Тогда для любых фиксированных точек вещественной оси $a_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, p+q}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_∞, B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, p+q}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{(p+q)}}.$$

Доказательство. Используя неравенства (9), (10) и теорему о минимизации площади [17, с. 34], получаем соотношение

$$r(B_\infty, \infty) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{p+q} r^2(B_k, a_k)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Из неравенства Коши, имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{p+q} r^2(B_k, a_k)\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant (p+q)^{\frac{1}{2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{\frac{1}{(p+q)}},$$

$$r^\gamma(B_\infty, \infty) \leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{-\frac{\gamma}{(p+q)}}.$$

И, таким образом,

$$r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{(p+q)}}.$$

□

Замечание 4. Если $\gamma = p+q$, тогда при условиях Теоремы 9 имеем соотношение

$$r^{p+q}(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{p+q} r(B_k, a_k) \leqslant (p+q)^{-\frac{p+q}{2}}.$$

Рассмотрим случай, если $p = q := m$. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точек

$$A_{n,m} := \left\{a_{k,p} \in \mathbb{C} : \; k = \overline{1,n}, \, p = \overline{1,m}\right\}$$

назовем (n, m)-лучевой, если при всех $k = \overline{1,n}$ и $p = \overline{1,m}$ выполняются соотношения:

$$\begin{aligned}
&0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty;\\
&\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} =: \theta_k =: \theta_k(A_{n,m});\\
&0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi.
\end{aligned}$$

В работе [7, с. 106] для произвольной $(2, m)$-лучевой системы точек $A_{2,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = 1, 2$, $p = \overline{1,m}$, и системы взаимно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, 2$, $p = \overline{1,m}$, доказано неравенство

$$\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant 2^{2m} \cdot (\alpha_1 \cdot \alpha_2)^m \cdot (\mu_1(R) \cdot \mu_2(R))^{\frac{1}{2}} \cdot M_R(A_{2,m}),$$

где величины $\{\mu_k(R)\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}^+$ при заданном R – коэффициенты смещения системы $A_{2,m}$, причем, $\mu_k(R) \leqslant m^{-2m}$, $R \in \mathbb{R}^+$,

$$M_R(A_{2,m}) := \prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right) \cdot \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot |a_{k,p}|.$$

Таким образом, из доказанных теорем 7, 8, 9, получаем следующие результаты.

Следствие 6. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $\gamma \in (0, 2m]$. Тогда для любых фиксированных точек вещественной оси $a_{k,p} \in \mathbb{R}^+$, $k = 1, 2$, $p = \overline{1,m}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, $B_{k,p}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, 2$, $p = \overline{1,m}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)$$

$$\leqslant 2^{2m-\frac{3\gamma}{2}} \cdot m^{-2m+\frac{\gamma}{2}} \cdot (M_R(A_{2,m}))^{1-\frac{\gamma}{2m}}\left(\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m}|a_k|\right)^{\frac{\gamma}{m}}.$$

Следствие 7. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $\gamma \in (0, m+1]$. Тогда для любых фиксированных точек вещественной оси $a_{k,p}$, $k = 1, 2$, $p = \overline{1,m}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_0, B_∞,*

$B_{k,p}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1,2$, $p = \overline{1,m}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо неравенство*

$$[r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p},a_{k,p})$$

$$\leqslant (2m+1)^{-\gamma\frac{2m+1}{2m+2}} \left[2^{2m}\cdot m^{-2m}\cdot M_R(A_{2,m})\right]^{1-\frac{\gamma}{m+1}} \left(\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m}|a_k|\right)^{\frac{\gamma}{m+1}}.$$

Следствие 8. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $\gamma \in (0, 2m]$. Тогда для любых фиксированных точек вещественной оси $a_{k,p}$, $k = 1,2$, $p = \overline{1,m}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_∞, $B_{k,p}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1,2$, $p = \overline{1,m}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$r^\gamma(B_\infty,\infty) \prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p},a_{k,p}) \leqslant 2^{2m-\frac{3\gamma}{2}}\cdot m^{-2m+\frac{\gamma}{2}}\cdot (M_R(A_{2,m}))^{1-\frac{\gamma}{2m}}.$$

Литература

[1] V. N. Dubinin, *Symmetrization method in geometric function theory of complex variables* // Successes Mat. Science, **49** (1994), No. 1 (295), 3–76 (in Russian); translation in Russian Math. Surveys, **1** (1994), 1–79.

[2] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

[3] G. V.Kuz'mina, *The Method of Extremal Metric in Extremal Decomposition Problems with Free Parameters* // J. Math. Science, **129** (2005), No. 3, 3843–3851.

[4] L. V. Kovalev, *On the problem of extremal decomposition with free poles on a circle* // Dal'nevostochnyi Mat. Sb., (1996), No. 2, 96–98 (in Russian).

[5] A. K. Bakhtin, I. V. Denega, *Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane* // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, **62** (2012), No. 2, 83–92.

[6] Л. И. Колбина, *Конформное отображение единичного круга на неналегающие области* // Вестник Ленингр. ун-та, **5** (1955), 37–43.

[7] A. K. Bakhtin, G. P. Bakhtina, Yu. B. Zelinskii, *Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis* // Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU, 2008 (in Russian).

[8] А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей* // Укр. мат. журн., **71** (2019) (принята к печати).

[9] L. V. Kovalev, *On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains* // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., (2000), No. 6, 80–81 (in Russian).

[10] L. V. Kovalev, *On three disjoint domains* // Dal'nevost. Mat. Zh., **1** (2000), No. 1, 3–7 (in Russian).

[11] A. K. Bakhtin, Y. V. Zabolotnyi, *Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains* // Ukr. Mat. Bulletin, **13** (2016), No. 2, 148–156.

[12] Ya. V. Zabolotnii, L. V. Vyhivska, *On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains* // Ukr. Math. Bulletin, **14** (2017), No. 3, 440–451.

[13] A. K. Bakhtin, L. V. Vyhivska, *Estimates of the inner radii of symmetric nonoverlapping domains* // Ukr. Math. Bulletin, **15** (2018), No. 3, 298–320.

[14] I. Denega, *Estimates of the inner radii of non-overlapping domains* // Ukr. Math. Bulletin, **16** (2019), No. 1, 77–87.

[15] A. Bakhtin, L. Vyhivska, I. Denega, *Inequality for the inner radii of symmetric non-overlapping domains* // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, **68** (2018), No. 2, 37–44.

[16] G. Polya, G. Szego, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, M, Fizmatgiz, 1962 (in Russian).

[17] G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable* // Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1969.

[18] P. M. Tamrazov, *Extremal conformal mappings and poles of quadratic differentials* // Mathematics of the USSR-Izvestiya, **2** (1968), No. 5, 987–996.

[19] A. K. Bakhtin, *Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains* // Ukrainian Mathematical Bulletin, **14** (2017), No. 4, 456–471 (in Russian); translation in J. Math. Sci. **234** (2018), No. 1, 1–13.

[20] A. K. Bakhtin, *xtremal decomposition of the complex plane with restrictions for free poles* // Ukrainian Mathematical Bulletin, **14** (2017), No. 3, 309–329 (in Russian); translation in J. Math. Sci. **231** (2018), No. 1, 1–15.

[21] I. V. Denega, *Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles* // Annales universitatis Mariae Curie-Skladovska, Lublin–Polonia, **67** 2013, No. 1, 11–22.

[22] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii, *Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane* // Complex Variables and Elliptic Equations, **62** (2018), No. 11, 1611–1618.

Сведения об авторах

Александр Константинович Бахтин

Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: `abahtin@imath.kiev.ua`

Ирина Викторовна Денега

Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: `iradenega@gmail.com`