Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 3, 357 – 371

Наближення класів $W^r_\beta H^\alpha$ тригармонійними інтегралами Пуассона

Інна В. Кальчук, Василь І. Кравець, Уляна З. Грабова

(Представлена В. П. Моторним)

Анотація. Одержано асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень тригармонійних інтегралів Пуассона від функцій з класів $W^r_\beta H^\alpha$ в рівномірній метриці у випадку $r > 3,\ 0 \le \alpha < 1$.

2010 MSC. 42A05, 41A60.

Ключові слова та фрази. Задача Колмогорова–Нікольського, тригармонійний інтеграл Пуассона, асимптотична рівність, похідна Вейля–Надя, умова Ліпшиця.

1. Вступ

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій f з нормою $\|f\|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$; C — простір 2π-періодичних неперервних функцій f, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних та істотно обмежених функцій f з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$.

Нехай далі $f \in L$ і її ряд Фур'є має вигляд

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

Якщо $r > 0$ і β — фіксоване дійсне число, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right) \qquad (1.1)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то функцію φ, називають (r, β)–похідною функції f в розумінні Вейля–Надя і позначають через

Стаття надійшла в редакцію 20.05.2019

f^r_β (див. [1, с. 130]). Множину усіх функцій, котрі задовольняють таку умову, позначають через W^r_β.

Якщо $f \in W^r_\beta$, і при цьому $f^r_\beta \in H^\alpha$, тобто f^r_β задовольняє умову Ліпшиця порядку α:

$$|f^r_\beta(x+h) - f^r_\beta(x)| \le |h|^\alpha, \quad 0 < \alpha \le 1, \ 0 \le h \le 2\pi, \ x \in \mathbb{R},$$

то кажуть, що f належить до класу $W^r_\beta H^\alpha$. При $\alpha = 0$ вважають, що $W^r_\beta H^0 = W^r_{\beta,\infty}$. При $r = \beta$ отримуємо клас $W^r H^\alpha$ функцій f з похідною порядку $r > 0$ в розумінні Вейля, яка задовольняє умову Ліпшиця порядку α.

Нехай $f \in L$. Величини

$$P_1(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \tag{1.2}$$

$$P_2(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{k}{2}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})\Big) e^{-\frac{k}{\delta}} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \tag{1.3}$$

$$P_3(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})k$$

$$+ \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2 k^2\Big) e^{-\frac{k}{\delta}} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big), \delta > 0, \tag{1.4}$$

називають відповідно інтегралом Пуассона, бігармонійним інтегралом Пуассона та тригармонійним інтегралом Пуассона [2] функції f.

Величини (1.2)–(1.4) можна представити у вигляді сингулярних інтегралів

$$P_n(\delta; f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + x) K_n(\delta; t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \ \delta > 0,$$

з ядрами

$$K_1(\delta; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt, \tag{1.5}$$

$$K_2(\delta; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{k}{2}\big(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\big)\Big) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt, \tag{1.6}$$

$$K_3(\delta; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{k}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}) + \frac{k^2}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2\Big) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt. \tag{1.7}$$

Дана робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; P_3(\delta))_C = \sup_{f \in W^r_\beta H^\alpha} \|f(\cdot) - P_3(\delta; f; \cdot)\|_C. \tag{1.8}$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\delta)$ таку, що $\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; P_3(\delta))_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta))$, $\delta \to \infty$, то, слідуючи О. І. Степанцю [1, с. 198], будемо говорити, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для класу $W^r_\beta H^\alpha$ та тригармонійного інтеграла Пуассона в рівномірній метриці.

Задача Колмогорова–Нікольського на різних функціональних класах для методів підсумовування рядів Фур'є розв'язувалась в роботах О. І. Степанця та його учнів (див., напр., [3–7]). Відзначимо, що в переважній більшості робіт розглядається випадок трикутних числових матриць. В деякій мірі менше вивчено асимптотичну поведінку при $\delta \to \infty$ величин наближення класів диференційовних функцій методами підсумовування, що визначаються сукупністю функцій натурального аргументу, що залежать від дійсного параметра δ. Зокрема, вивченню апроксимативних властивостей інтегралів Пуассона та бігармонійних інтегралів Пуассона на класах диференційовних функцій присвячені роботи [8–21], в тому числі на класах $W^r_\beta H^\alpha$ — роботи [22–24]. Апроксимативні ж властивості тригармонійних інтегралів Пуассона вивчались в роботах [25, 26].

Як відомо [27], при наближенні періодичних диференційовних функцій сингулярними інтегралами з додатніми ядрами (очевидно, що $K_1(\delta; t) > 0$ і $K_2(\delta; t) > 0$) не можливо досягти кращого порядку наближення ніж $\frac{1}{\delta^2}$, $\delta \to \infty$. В той же час, ядро $K_3(\delta; t)$ є знакозмінним, тому досить цікавим та актуальним є вивчення швидкості наближення класів диференційовних функцій, зокрема класів $W^r_\beta H^\alpha$, з допомогою тригармонійних інтегралів Пуассона, адже у цьому випадку можна досягти вищого порядку наближення ніж $\frac{1}{\delta^2}$ при $\delta \to \infty$. Тому постало питання про відшукання асимптотичних рівностей для величин (1.8).

2. Асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень тригармонійних інтегралів Пуассона від функцій з класів $W^r_\beta H^\alpha$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 2.1. *При $r>3, 0\le\alpha<1$ і $\delta\to\infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha;P_3(\delta))_C=\frac{1}{\delta^3}\sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\left\|\frac{4}{3}f_0^{(1)}+f_0^{(2)}+\frac{1}{6}f_0^{(3)}\right\|_C+O(\Upsilon(r)), \tag{2.1}$$

де $f_0^{(r)}$, $r=1,2,3,$ — (r,β)-похідні в сенсі Вейля-Надя при $\beta=0$, а

$$\Upsilon(r)=\begin{cases}\frac{1}{\delta^{r+\alpha}}, & 3<r+\alpha<4,\\ \frac{\ln\delta}{\delta^4}, & r+\alpha=4,\\ \frac{1}{\delta^4}, & r+\alpha>4.\end{cases} \tag{2.2}$$

Доведення. Для тригармонійного інтеграла Пуассона $P_3(\delta)$, аналогічно до співвідношення (6) із [28], запишемо підсумовуючу функцію $\tau(u)$ наступним чином

$$\tau(u)=\begin{cases}\left(1-\left(1+\gamma u+\theta u^2\right)e^{-u}\right)\delta^r, & 0\le u\le\frac{1}{\delta},\\ \left(1-\left(1+\gamma u+\theta u^2\right)e^{-u}\right)u^{-r}, & u\ge\frac{1}{\delta},\end{cases} \tag{2.3}$$

де $\gamma=\gamma(\delta)=\frac{1}{4}(3-e^{-\frac{2}{\delta}})(1-e^{-\frac{2}{\delta}})\delta,\quad \theta=\theta(\delta)=\frac{1}{8}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^2\delta^2,\ \delta>0.$

Представимо функцію $\tau(u)$, задану за допомогою співвідношення (2.3), у вигляді $\tau(u)=\varphi(u)+\mu(u)$, де

$$\varphi(u)=\begin{cases}(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{6}u^3)\delta^r, & 0\le u\le\frac{1}{\delta},\\ \left(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{6}u^3\right)u^{-r}, & u\ge\frac{1}{\delta},\end{cases} \tag{2.4}$$

$$\mu(u)=\begin{cases}\left(1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}u-\frac{1}{\delta}u^2-\frac{1}{6}u^3\right)\delta^r, & 0\le u\le\frac{1}{\delta},\\ \left(1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}u-\frac{1}{\delta}u^2-\frac{1}{6}u^3\right)u^{-r}, & u\ge\frac{1}{\delta}.\end{cases} \tag{2.5}$$

Згідно з теоремою 3 роботи Л. І. Баусова [22], якщо перетворення Фур'є функцій $\varphi(u)$ і $\mu(u)$ виду

$$\widehat{\varphi}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du, \tag{2.6}$$

$$\widehat{\mu}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du \tag{2.7}$$

сумовні на всій числовій осі, інтеграли

$$A(\alpha,\varphi):=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty|t|^\alpha\left|\int_0^\infty\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt, \tag{2.8}$$

$$A(\alpha,\mu) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^{\alpha}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\mu(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt \tag{2.9}$$

збіжні та $A(\alpha,\mu)=o\big(A(\alpha,\varphi)\big), \delta\to\infty$, то при $0\le\alpha<1$ і $\delta\to\infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; P_3(\delta))_C = \frac{1}{\delta^r}\sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\|f_\varphi\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}}A(\alpha,\mu)\right), \tag{2.10}$$

де

$$f_\varphi(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(f^r_\beta\big(x+\frac{t}{\delta}\big)-f^r_\beta(x)\Big)\widehat{\varphi}(t)dt. \tag{2.11}$$

Переконаємося, що умови теореми 3 роботи Баусова [22] виконуються для функцій $\varphi(u)$ та $\mu(u)$ вигляду (2.4) та (2.5).

Сумовність претворень (2.6) та (2.7) показано в роботі [29].

З метою доведення збіжності інтеграла $A(\alpha,\varphi)$, згідно з теоремою 1 роботи [22, с. 6], покажемо збіжність інтегралів

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)|,\quad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}|u-1|^{1-\alpha}|d\varphi'(u)|,\quad \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)|d\varphi'(u)|, \tag{2.12}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du,\quad \int\limits_{0}^{1}\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du \tag{2.13}$$

і знайдемо для них оцінки зверху.

Оцінимо перший інтеграл з (2.12). При $u\in\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$, $\delta>2$, матимемо

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}}u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = \delta^r\int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{2}{\delta}u^{1-\alpha}+u^{2-\alpha}\right)du \le \frac{K_1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}. \tag{2.14}$$

При $u\in\left[\frac{1}{\delta};\frac{1}{2}\right]$, $\delta>2$, і $r>3$, враховуючи, що $\varphi''(u)>0$, отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}}u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}}u^{1-\alpha}d\varphi'(u) \le \frac{K_2}{\delta^{3-(r+\alpha)}}.$$

Отже,

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \ \delta\to\infty. \tag{2.15}$$

Оцінимо другий та третій інтеграли з (2.12). Оскільки

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| \le 2^\alpha \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u|d\varphi'(u)|, \quad \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)|d\varphi'(u)| \le \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u|d\varphi'(u)|.$$

та є очевидною оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u|d\varphi'(u)| = O(1), \delta\to\infty,$$

то матимемо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = O(1), \quad \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)|d\varphi'(u)| = O(1), \delta\to\infty. \tag{2.16}$$

Використовуючи схему оцінювання першого інтеграла з (12) роботи [15], знайдемо оцінки інтеграла $\int\limits_0^\infty \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du$ на кожному з проміжків $\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta};1\right]$ та $[1;\infty)$. При $r>3$ і $\delta\to\infty$ отримаємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \delta^r \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{1}{u^{1+\alpha}}\left(\frac{4}{3\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2 + \frac{1}{6}u^3\right)du = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \tag{2.17}$$

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{1}{u^{1+\alpha}}\left(\frac{4}{3\delta^2}u^{1-r} + \frac{1}{\delta}u^{2-r} + \frac{1}{6}u^{3-r}\right)du = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \tag{2.18}$$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{u^{1+\alpha}}\left(\frac{4}{3\delta^2}u^{1-r} + \frac{1}{\delta}u^{2-r} + \frac{1}{6}u^{3-r}\right)du = O(1). \tag{2.19}$$

З (2.17)–(2.19) випливає оцінка

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \quad r>3, \delta\to\infty. \tag{2.20}$$

Аналогічно до формули (2.30) роботи [30], можна переконатись в справедливості рівності

$$\int\limits_0^1 \frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_0^1 \frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du$$

$$+O\Big(|\varphi(0)|+|\varphi(1)|+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)|+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}|u-1|^{1-\alpha}|d\varphi'(u)|+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)|d\varphi'(u)|\Big), \tag{2.21}$$

де $\lambda(u) = 1 - \frac{4}{3\delta^2}u - \frac{1}{\delta}u^2 - \frac{1}{6}u^3$. Оскільки

$$\int\limits_0^1 \frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = O(1), \delta \to \infty,$$

то в силу співвідношення (2.21), враховуючи оцінки (2.15) та (2.16), отримаємо

$$\int\limits_0^1 \frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \quad r>3, \ \delta\to\infty. \tag{2.22}$$

Ми показали збіжність інтегралів (2.12) та (2.13), а отже, згідно з теоремою 1 роботи [22], інтеграл $A(\alpha,\varphi)$ збіжний і для нього має місце оцінка

$$A(\alpha,\varphi) = \Big(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\Big), \quad \delta\to\infty. \tag{2.23}$$

Доведемо тепер збіжність інтеграла (2.9). Для цього, згідно з теоремою 1 роботи [22, с. 6], покажемо збіжність інтегралів

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}|d\mu'(u)|, \quad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}|d\mu'(u)|, \quad \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)|d\mu'(u)|, \tag{2.24}$$

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du, \quad \int\limits_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du. \tag{2.25}$$

Для того, щоб оцінити інтеграли з (2.24) дослідимо спочатку наступну функцію

$$\widetilde{\mu}(u) = 1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u} - \frac{4}{3\delta^2}u - \frac{1}{\delta}u^2 - \frac{1}{6}u^3. \tag{2.26}$$

Оскільки

$$\widetilde{\mu}'(u) = (1+\gamma+\theta u^2)e^{-u} - (\gamma+2\theta u)e^{-u} - \frac{4}{3\delta^2} - \frac{2}{\delta}u - \frac{1}{2}u^2,$$

$$\widetilde{\mu}''(u) = -(1+\gamma+\theta u^2)e^{-u} - 2(\gamma+2\theta u)e^{-u} - 2\theta e^{-u} - \frac{2}{\delta} - u,$$

$$\widetilde{\mu}(0) = 0,\ \widetilde{\mu}'(0) = 1-\gamma-\frac{4}{3\delta^2} < 0,$$

то можна показати, що при $u \geq 0$

$$\widetilde{\mu}(u) \leq 0, \quad \widetilde{\mu}'(u) < 0, \quad \widetilde{\mu}''(u) < 0. \tag{2.27}$$

В силу (2.27) та нерівностей

$$e^{-u} \leq 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}, \quad e^{-u} \geq 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}, \quad e^{-u} \leq 1-u+\frac{u^2}{2},$$

$$e^{-u} \geq 1-u, \quad e^{-u} \leq 1, \quad u \geq 0,$$

одержимо

$$|\widetilde{\mu}(u)| \leq u\Big(\gamma-1+\frac{4}{3\delta^2}\Big)+u^2\Big(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\Big)+u^3\Big(\frac{\gamma}{2}-\theta\Big)+u^4\Big(\frac{1}{24}+\frac{\theta}{2}\Big),$$

$$\big|\widetilde{\mu}'(u)\big| \leq \Big(\gamma-1+\frac{4}{3\delta^2}\Big)+2u\Big(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\Big)+3u^2\Big(\frac{\gamma}{2}-\theta\Big)+u^3\Big(\frac{1}{6}+2\theta\Big),$$

$$\big|\widetilde{\mu}''(u)\big| \leq 2\Big(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\Big)+6u\Big(\frac{\gamma}{2}-\theta\Big)+u^2\Big(\frac{1}{2}+6\theta\Big).$$

Тоді, взявши до уваги оцінки

$$\gamma-1+\frac{4}{3\delta^2} \leq \frac{3}{\delta^3}, \quad \frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta} \leq \frac{3}{\delta^2}, \quad \frac{\gamma}{2}-\theta \leq \frac{2}{\delta},$$

$$\frac{1}{24}+\frac{\theta}{2} \leq 1, \quad \frac{1}{2}+6\theta \leq 3, \quad \frac{1}{6}+2\theta \leq 2,$$

будемо мати

$$|\widetilde{\mu}(u)| \leq \frac{3}{\delta^3}u+\frac{3}{\delta^2}u^2+\frac{2}{\delta}u^3+u^4, \tag{2.28}$$

$$\big|\widetilde{\mu}'(u)\big| \leq \frac{3}{\delta^3}+\frac{6}{\delta^2}u+\frac{6}{\delta}u^2+2u^3, \tag{2.29}$$

$$\big|\widetilde{\mu}''(u)\big| \leq \frac{6}{\delta^2}+\frac{12}{\delta}u+3u^2. \tag{2.30}$$

Щоб оцінити перший інтеграл в (2.24), розіб'ємо проміжок $[0;\frac{1}{2}]$ на дві частини: $[0;\frac{1}{\delta}]$ та $[\frac{1}{\delta};\frac{1}{2}], \delta > 2$. Із (2.5), враховуючи оцінки (2.28)–(2.30), отримаємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha}|d\mu'(u)| \leq \delta^r \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \Big(\frac{6}{\delta^2}+\frac{12}{\delta}u+3u^2\Big)u^{1-\alpha}du \leq \frac{K_3}{\delta^{4-(r+\alpha)}}, \qquad (2.31)$$

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}|d\mu'(u)| \leq r(r+1)\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{-r-\alpha-1}|\widetilde{\mu}(u)|du$$

$$+2r\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{-r-\alpha}|\widetilde{\mu}'(u)|du + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha}|\widetilde{\mu}''(u)|du$$

$$\leq r(r+1)\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{-r-\alpha-1}\Big(\frac{3}{\delta^3}u+\frac{3}{\delta^2}u^2+\frac{2}{\delta}u^3+u^4\Big)du$$

$$+2r\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{-r-\alpha}\Big(\frac{3}{\delta^3}+\frac{6}{\delta^2}u+\frac{6}{\delta}u^2+2u^3\Big)du+\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha}\Big(\frac{6}{\delta^2}+\frac{12}{\delta}u+3u^2\Big)du. \qquad (2.32)$$

З (2.32) випливає, що

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}|d\mu'(u)| = \begin{cases} O(1), & 3<r+\alpha<4, \\ O\big(\ln\delta\big), & r+\alpha=4, \\ O\Big(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\Big), & r+\alpha>4, \end{cases} \quad \delta\to\infty. \qquad (2.33)$$

Об'єднуючи (2.31) та (2.33) будемо мати оцінку

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}|d\mu'(u)| = \begin{cases} O(1), & 3<r+\alpha<4, \\ O\big(\ln\delta\big), & r+\alpha=4, \\ O\Big(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\Big), & r+\alpha>4, \end{cases} \quad \delta\to\infty. \qquad (2.34)$$

Використовуючи (2.27) та нерівності

$$e^{-u}\leq 1, \quad e^{-u}\leq 1-u+\frac{u^2}{2}, \quad e^{-u}\geq 1-u, \quad u\geq 0,$$

оцінимо функцію $\tilde{\mu}(u)$ та її похідні наступним чином:

$$|\widetilde{\mu}(u)| \le u\big(-1+\gamma+\frac{4}{3\delta^2}\big)+u^2\big(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\big)+u^3\big(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{6}\big),$$

$$|\widetilde{\mu}'(u)| \le \big(-1+\gamma+\frac{4}{3\delta^2}\big)+u\big(1-2\gamma+2\theta+\frac{2}{\delta}\big)+u^2\big(\frac{3}{2}\gamma+\theta+\frac{1}{2}\big),$$

$$|\widetilde{\mu}''(u)| \le \big(1-2\gamma+2\theta+\frac{2}{\delta}\big)+u\big(3\gamma+1\big)+\big(\theta u^2+4\theta u\big)e^{-u}.$$

Тоді, використовуючи оцінки

$$-1+\gamma+\frac{4}{3\delta^2}\le\frac{2}{\delta^2},\ \ \frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\le\frac{2}{\delta},\ \ \frac{\gamma}{2}+\frac{1}{6}\le 1,\ \frac{3}{2}\gamma+\theta+\frac{1}{2}\le 4,$$

$$3\gamma+1\le 6,\ \big(4\theta u+\theta u^2\big)e^{-u}\le 2u,\ u\ge 0,$$

матимемо

$$|\widetilde{\mu}(u)| \le \frac{2}{\delta^2}u+\frac{2}{\delta}u^2+u^3,\ u\ge 0, \tag{2.35}$$

$$|\widetilde{\mu}'(u)| \le \frac{2}{\delta^2}+\frac{4}{\delta}u+4u^2,\ u\ge 0, \tag{2.36}$$

$$|\widetilde{\mu}''(u)| \le \frac{4}{\delta}+8u,\ u\ge 0. \tag{2.37}$$

Оскільки

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}|u-1|^{1-\alpha}|d\mu'(u)|\le 2^\alpha\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u|d\mu'(u)|,\ \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)|d\mu'(u)|\le\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u|d\mu'(u)|,$$

то, враховуючи співвідношення (2.35)–(2.37), знайдемо оцінку інтеграла

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u|d\mu'(u)|\le r(r+1)\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u^{-r-1}\Big(\frac{2}{\delta^2}u+\frac{2}{\delta}u^2+u^3\Big)du$$

$$+2r\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u^{-r}\Big(\frac{2}{\delta^2}+\frac{4}{\delta}u+4u^2\Big)du+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u^{1-r}\Big(\frac{4}{\delta}+8u\Big)du\le K_6,\ \ r>3. \tag{2.38}$$

Таким чином

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}|u-1|^{1-\alpha}|d\mu'(u)|=O(1),\ \ \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)|d\mu'(u)|=O(1),\ \delta\to\infty. \tag{2.39}$$

Оцінимо перший інтеграл з (2.25), розбивши проміжок $[0;\infty)$ на три частини: $[0;\frac{1}{\delta}]$, $[\frac{1}{\delta};1]$, $[1;\infty)$. З формули (2.26) із врахуванням (2.28) та (2.35) одержимо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \delta^r \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} |\tilde{\mu}(u)| \frac{du}{u^{1+\alpha}}$$

$$\leq \delta^r \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{3}{\delta^3}u + \frac{3}{\delta^2}u^2 + \frac{2}{\delta}u^3 + u^4 \right) \frac{du}{u^{1+\alpha}} du \leq \frac{K_7}{\delta^{4-(r+\alpha)}},$$

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} |\tilde{\mu}(u)| \frac{du}{u^{1+\alpha+r}} = \begin{cases} O(1), & 3 < r+\alpha < 4, \\ O\big(\ln\delta\big), & r+\alpha = 4, \\ O\Big(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\Big), & r+\alpha > 4, \end{cases} \quad \delta \to \infty,$$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_1^{\infty} |\tilde{\mu}(u)| \frac{du}{u^{1+\alpha+r}} \leq \int\limits_1^{\infty} \left(\frac{2}{\delta^2}u + \frac{2}{\delta}u^2 + u^3 \right) u^{-r-1-\alpha} du \leq K_8.$$

Об'єднуючи останні співвідношення, отримаємо

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \begin{cases} O(1), & 3 < r+\alpha < 4, \\ O\big(\ln\delta\big), & r+\alpha = 4, \\ O\Big(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\Big), & r+\alpha > 4, \end{cases} \quad \delta \to \infty. \tag{2.40}$$

Для того, щоб оцінити другий інтеграл з (2.25), відмітимо, що має місце рівність

$$\int\limits_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_0^1 \frac{|\overline{\lambda}(1-u) - \overline{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du$$

$$+O\Big(|\mu(0)|+|\mu(1)|+\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}|d\mu'(u)|+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}|d\mu'(u)|+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)|d\mu'(u)|\Big),$$

де $\overline{\lambda}(u) = (1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u} + \frac{4}{3\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2 + \frac{1}{6}u^3$.

Оскільки

$$\int\limits_0^1 \frac{|\overline{\lambda}(1-u) - \overline{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = O(1), \ \delta \to \infty$$

то враховуючи співвідношення (2.34) та (2.39), отримаємо

$$\int\limits_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = \begin{cases} O(1), & 3<r+\alpha<4, \\ O\big(\ln\delta\big), & r+\alpha=4, \\ O\Big(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\Big), & r+\alpha>4, \end{cases} \quad \delta\to\infty. \tag{2.41}$$

Використовуючи формули (2.34), (2.39), (2.40) та (2.41), згідно з теоремою 1 роботи [22], переконуємося в тому, що інтеграл $A(\alpha,\mu)$ є збіжний і для нього справедлива оцінка

$$A(\alpha,\mu) = \begin{cases} O(1), & 3<r+\alpha<4, \\ O\big(\ln\delta\big), & r+\alpha=4, \\ O\Big(\frac{1}{\delta^{4-(r+\alpha)}}\Big), & r+\alpha>4, \end{cases} \quad \delta\to\infty. \tag{2.42}$$

Отже, умови теореми 3 роботи Л. І. Баусова [22] виконуються, тобто має місце рівність (2.10). Із врахуванням оцінки (2.42), при $\delta\to\infty$ отримуємо

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; P_3(\delta))_C = \frac{1}{\delta^r}\sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\|f_\varphi\|_C + O\left(\Upsilon(r)\right), \tag{2.43}$$

де $\Upsilon(r)$ означається формулою (2.2), а функція $f_\varphi(x)$ — формулою (2.11).

Можна показати, що ряд Фур'є функції $f_\varphi(x)$ має вигляд (див., напр., [28])

$$S[f_\varphi(x)] = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{k}{\delta}\right)k^r(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f. Звідси, враховуючи формулу (2.4), отримуємо, що

$$S[f_\varphi(x)] = \frac{1}{\delta^{3-r}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}k + k^2 + \frac{1}{6}k^3\right)(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Тому, згідно з (1.1),

$$f_\varphi(x) = \frac{1}{\delta^{3-r}}\left(\frac{4}{3}f_0^{(1)}(x) + f_0^{(2)}(x) + \frac{1}{6}f_0^{(3)}(x)\right). \tag{2.44}$$

Підставляючи (2.44) в (2.43) отримуємо (2.1). Теорему доведено. $\square$

Зауваження 2.1. Порівнюючи результати робіт [22, 24] та теорему 2.1, бачимо, що порядок наближення класів $W^r_\beta H^\alpha, r > 3$, за допомогою інтегралу Пуассона рівний $\frac{1}{\delta}$, бігармонійного інтегралу Пуассона — $\frac{1}{\delta^2}$, а тригармонійного інтегралу Пуассона — $\frac{1}{\delta^3}$.

Література

[1] A. I. Stepanets. *Methods of Approximation Theory. Part 1*, Institute of Mathematics, Ukrainian Academy of Sciences, Kiev, 2002.

[2] S. B. Hembars'ka, *On boundary values of three-harmonic Poisson integral on the boundary of a unit disk* // Ukrainian Math. J., **70** (2018), No. 7, 1012–1021.

[3] А. И. Степанец, В. И. Рукасов, С. О. Чайченко, *Приближения суммами Валле Пуссена*, Киев, Ин-т математики НАН Украины, 2007.

[4] V. I. Rukasov, S. O. Chaichenko, *Approximation of $\bar\psi$–integrals of periodic functions by de la Vallée-Poussin sums (Low smoothness)* // Ukrainian Math. J., **53** (2001), No. 12, 1998–2013.

[5] V. I. Rukasov, S. O. Chaichenko, *Approximation of the Classes $C^{\bar\psi}H_\omega$ by de la Vallée-Poussin Sums* // Ukrainian Math. J., **54** (2002), No. 5, 839–851.

[6] V. I. Rukasov, S. O. Chaichenko, *Approximation by de la Vallée-Poussin operators on the classes of functions locally summable on the real axis* // Ukrainian Math. J., **62** (2010), No. 7, 1126–1138.

[7] A. S. Serdyuk, E. Yu. Ovsii, *Approximation of the classes $C^\psi_\beta H_\omega$ by generalized Zygmund sums* // Ukrainian Math. J., **61** (2009), No. 4, 524–537.

[8] И. П. Натансон, *О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона* // Докл. АН СССР, **72** (1950), No. 1, 11–14.

[9] А. Ф. Тиман, *Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона* // Докл. АН СССР, **74** (1950), No. 1, 17–20.

[10] B. Nagy, *Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson* // Acta Math. Acad. Sci Hungar, **1** (1950), 183–188.

[11] Э. Л. Штарк, *Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из* Lip1 *от их сингулярного интеграла Абеля–Пуассона* // Мат. заметки, **13** (1973), No. 1, 21–28.

[12] В. А. Баскаков, *О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля–Пуассона* // Мат. заметки, **17** (1975), No. 2, 169–180.

[13] I. V. Kal'chuk, Yu. I. Kharkevych, *Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals* // Acta Comment. Univ. Tartu. Math., **22** (2018), No. 1, 23–36.

[14] Yu. I. Kharkevych, K. V. Pozharska, *Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals* // Acta Comment. Univ. Tartu. Math., **22** (2018), No. 2, 235–243.

[15] Yu. I. Kharkevych, T. V. Zhyhallo, *Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators* // Ukrainian Math. J., **57** (2005), No. 8, 1297–1315.

[16] K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals* // Ukrainian Math. J., **61** (2009), No. 1, 86–98.

[17] T. V. Zhyhallo, *Approximation of functions holding the Lipschitz conditions on a finite segment of the real axis by the Poisson-Chebyshev integrals* // Journal of Automation and Information Sciences, **50** (2018), No. 5, 34–48.

[18] С. Каниев, *Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений* // Докл. АН СССР, **153** (1963), No. 5, 995–998.

[19] S. B. Hembars'ka, K. M. Zhyhallo, *Approximative properties of biharmonic Poisson integrals on Hölder classes* // Ukrainian Math. J., **69** (2017), No. 7, 1075–1084.

[20] Yu. I. Kharkevych, T. V. Zhyhallo, *Approximation of function from class* $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ *by Poisson biharmonic operators in the unifommetric* // Ukrainian Math. J., **60** (2008), No. 5, 769–798.

[21] T. V. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the clasess* $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ // Ukrainian Math. J., **69** (2017), No. 5, 757–765.

[22] Л. И. Баусов, *Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II* // Изв. вузов. Матем., No. 6 (1966), 3–17.

[23] I. V. Kal'chuk, Yu.I. Kharkevych. *Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes* $W^r_\beta H^\alpha$ // Ukrainian Math. J., **68** (2017), No. 11, 1727–1740.

[24] U. Z. Hrabova, I. V. Kal'chuk, T. A. Stepaniuk, *On the approximation of the classes* $W^r_\beta H^\alpha$ *by biharmonic Poisson integrals* // Ukrainian Math. J., **70** (2018), No. 5, 719–729.

[25] U. Z. Hrabova, *Approximative properties of the threeharmonic Poisson integrals on the Hölder classes* // Journal of Automation and Information Sciences, **50** (2018), No. 8, 77–86.

[26] K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *On the approximation of functions of the Holder class by triharmonic Poisson integrals* // Ukrainian Math. J., **53** (2001), No. 6, 1012–1018.

[27] В. К Дзядык, *О приближении функций линейными положительными операторами и сингулярными интегралами* // Матем. сб., **70 (112)** (1966), No. 4, 508–517.

[28] Yu. I. Kharkevych, I. V. Kal'chuk, *Approximation of* (ψ,β)*-differentiable functions by Weierstrass integrals* // Ukrainian Math. J., **59** (2007), No. 7, 1059–1087.

[29] И. В. Кальчук, У. З. Грабова, *Решение задачи Колмогорова-Никольского для тригармонических интегралов Пуассона на классах* $W^r_{\beta,\infty}$ // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск, (2011), 33–36.

[30] U. Z. Hrabova, I. V. Kal'chuk, T. A. Stepaniuk, *Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes* $W^r_\beta H^\alpha$ // Укр. матем. вісник, **14** (2017), No. 3, 361–369; transl. J. Math. Sci. (N. Y.), **231**, (2018), No. 1, 41–47.

Відомості про авторів

Інна Володимирівна Кальчук
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: k.inna.80@gmail.com

Василь Іванович Кравець
Таврійський державний агротехнологічний університет, Мелітополь, Україна
E-Mail: v_i_kravets@ukr.net

Уляна Зеновіївна Грабова
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: grabova_u@ukr.net