Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 3, 383 – 402

О гёльдеровости отображений в областях и на границах

Владимир И. Рязанов, Руслан Р. Салимов,
Евгений А. Севостьянов

(Представлена А. А. Довгошеем)

Посвящается 100-летию со дня рождения Г. Д. Суворова

Аннотация. Изучаются гомеоморфизмы и отображения с ветвлением областей евклидового пространства. Установлены гёльдеровость и липшицевость для одного класса пространственных отображений, характеристика которых удовлетворяет условию типа Дини в заданной области. Кроме того, в статье найдены условия на комплексный коэффициент уравнений Бельтрами, имеющих вырождение равномерной эллиптичности в единичном круге, при которых обобщенные гомеоморфные решения этого уравнения непрерывны по Гёльдеру в точках границы.

2010 MSC. Primary 30C62, 31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35J61; Secondary 30E25, 31C05, 34M50, 35Q15.

Ключевые слова и фразы. Открытые дискретные кольцевые Q-отображения, непрерывность по Гёльдеру, липшицевость.

1. Введение

В работе [1] были получены неравенства типа Липшица для квазиконформных отображений единичного шара в себя, смотри также монографии [2] и [3] и статьи [4] и [5]. В настоящей заметке мы распространяем эти результаты на отображения, допускающие наличие точек ветвления и, вообще говоря, с неограниченными характеристиками квазиконформности. Как будет показано в секции 2, наши условия на характеристики являются более общими, чем условие (1.9) в [1], даже в случае квазиконформных отображений.

Статья поступила в редакцию 10.07.2019

Данная работа была частично поддержана грантами Министерства образования и науки Украины, проект № 0119U100421.

ISSN 1810 – 3200.

Через D в дальнейшем обозначаем области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, а отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагаем непрерывными. Обозначаем также $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n(r) := B(0, r)$, $\mathbb{B}^n := B(0, 1)$, $A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$. Пусть E, $F \subset \mathbb{R}^n$ – произвольные множества. В дальнейшем через $\Gamma(E, F, D)$ мы обозначаем семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$, $M(\Gamma)$ – конформный модуль семейства Γ кривых в $\mathbb{R}^n$ (см. [6, разд. 6]), $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция.

Согласно [7, раздел 7.1], отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in D$*, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right) \leqslant \int\limits_{A} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\; dm(x) \qquad (1.1)$$

выполнено для всех колец $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$, и измеримых функций $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, таких, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,.$$

Указанный класс отображений впервые был введен в работе [8] на плоскости в связи с изучением уравнений Бельтрами, а затем распространен на пространственный случай в работах [9] and [10]. Заметим, что конформные и квазиконформные отображения удовлетворяют соотношению (1.1) с некоторыми ограниченными (постоянными) функциями Q. Этому условию подчиняются также многие современные классы отображения с конечным искажением, см., например, монографию [11] и обзорную статью [12].

Напомним также, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$, и *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит только из изолированных точек.

Теорема 1.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{B}^n(r_0)$ – открытое дискретное кольцевое $Q-$отображение в точке $x_0 \in D$. Предположим, что при некоторых $\alpha \in (0, 1]$ и $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$*

$$\limsup_{t \to 0} \int\limits_{t}^{\varepsilon_0} \left(\alpha - \frac{1}{q_{x_0}^{1/(n-1)}(r)}\right) \frac{dr}{r} \;<\; +\infty\;, \qquad (1.2)$$

где $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее значение функции $Q(x)$ по сфере $S(x_0, r)$.

Тогда найдётся $C>0$, зависящее только от n, r_0, ε_0 и функции $Q(x)$ такое, что в некоторой окрестности $U_0\subset D$ точки x_0, зависящей только от этой точки и функции Q,

$$|f(x)-f(x_0)| \ \leqslant\ C|x-x_0|^{\alpha} \qquad \forall\ x\in U_0\ . \tag{1.3}$$

2. Доказательство основного результата

Пусть h – хордальная метрика в $\overline{\mathbb{R}^n}$,

$$h(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}},\quad h(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}\,,\quad x\ne\infty\ne y\,,$$

$h(E):=\sup\limits_{x,y\in E}h(x,y)$ – хордальный диаметр множества $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$. Зафиксируем ε_0 из условия теоремы 1.1. Заметим, прежде всего, что для каждой точки $x\in B(x_0,\varepsilon_0)$ имеет место неравенство

$$h(f(x),f(x_0))\leqslant\frac{\alpha_n}{\delta}\,\exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\}\,, \tag{2.1}$$

где $\delta:=h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(0,r_0)\right)$, постоянная α_n зависит только от n, см. теорему 3.5.1 в [14]), ср. также теорему 7.3 в [7] для случая гомеоморфизмов. Поскольку $h(x,y)\geqslant\frac{|x-y|}{1+r_0^2}$ при всех $x,y\in B(0,r_0)$, из (2.1) получаем, что

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant C_n\exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\}\,, \tag{2.2}$$

где постоянная C_n может зависеть только от n, r_0 и функции Q. Разделим левую и правую часть неравенства (2.2) на $|x-x_0|^{\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$. Тогда из (2.2) будем иметь:

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{\alpha}}\leqslant C_n\cdot\frac{\exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\}}{|x-x_0|^{\alpha}}$$

$$=C_n\cdot\frac{\exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\}}{\exp\left\{-\alpha\int\limits_{|x-x_0|}^{1}\frac{dr}{r}\right\}}=\widetilde{C_n}\cdot\exp\left\{\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0}\frac{\alpha dr}{r}-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\} \tag{2.3}$$

$$= \widetilde{C_n} \cdot \exp\left\{ \int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \left(\alpha - \frac{1}{q_{x_0}^{1/(n-1)}(r)} \right) \cdot \frac{dr}{r} \right\},$$

где $\widetilde{C_n} = C_n/\varepsilon_0^{\alpha}$. Однако, ввиду условия (1.2) найдётся такое $M_0 > 0$, зависящее только от n, α и функции Q такое, что

$$\exp\left\{ \int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon_0} \left(\alpha - \frac{1}{q_{x_0}^{1/(n-1)}(r)} \right) \cdot \frac{dr}{r} \right\} \leqslant M_0 \qquad \forall\, x \in B(x_0, \varepsilon_0) \setminus \{x_0\}.$$

Тогда из (2.3) вытекает соотношение $|f(x) - f(x_0)| \leqslant C \cdot |x - x_0|^{\alpha}$, где $C = \widetilde{C_n} \cdot M_0$, что и требовалось установить. □

Следствие 2.1. *Если в условиях теоремы 1.1 вместо соотношения* (1.2) *потребовать, что*

$$\limsup_{t \to 0} \int\limits_{t}^{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{q_{x_0}^{1/(n-1)}(r)} \right) \cdot \frac{dr}{r} < +\infty, \tag{2.4}$$

то отображение f удовлетворяет оценке

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant C|x - x_0| \quad \forall\, x \in B(x_0, \varepsilon_0),$$

другими словами, f является липшицевм в точке x_0.

Следующая лемма показывает, что утверждение теоремы 1.8 в [1] является частным случаем теоремы 1.1.

Лемма 2.1. *В обозначениях теоремы 1.1, при любом $t \in (0, \varepsilon_0)$ имеет место следующее неравенство*

$$\int\limits_{t}^{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{q_{x_0}^{1/(n-1)}(r)} \right) \frac{dr}{r} \;\leqslant\; \frac{\omega_{n-1}}{n-1} \int\limits_{t<|x-x_0|<\varepsilon_0} \frac{Q(x) - 1}{|x - x_0|^n}\, dm(x), \tag{2.5}$$

где ω_{n-1} обозначает площадь единичной $(n-1)-$мерной сферы.

Таким образом, по следствию 2.1 получаем заключение.

Следствие 2.2. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $f(0) = 0$ – открытое дискретное кольцевое $Q-$отображение в нуле, такое, что*

$$\limsup_{r \to 0} \int\limits_{r<|x|<1} \frac{Q(x) - 1}{|x|^n}\, dm(x) < +\infty. \tag{2.6}$$

Тогда найдётся постоянная $C > 0$, зависящая только от n и Q, такая, что

$$|f(x)| \;\leqslant\; C|x| \quad \forall\, x \in \mathbb{B}^n. \tag{2.7}$$

В частности, утверждение следствия 2.2 имеет место, если f – квазиконформное отображение, а $Q(x)$ – его касательная дилатация (см. [1, формула (1.5) и теорема 1.8])

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $x_0 = 0$ в лемме 2.1 и что интеграл в правой части (2.5) конечен. Таким образом, по теореме Фубини, см., например, III(8.7) в [13], имеем, что

$$\int\limits_{r<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)-1}{|x|^n}\, dm(x) = \int\limits_{r}^{\varepsilon_0} \int\limits_{S(0,r)} \frac{Q(x)-1}{|x|^n} dS dr$$

$$= \omega_{n-1} \cdot \int\limits_{r}^{\varepsilon_0} \frac{q_0(r)-1}{r} dr\,. \tag{2.8}$$

Покажем, что почти всюду

$$\int\limits_{t}^{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{q_0^{1/(n-1)}(r)}\right) \cdot \frac{dr}{r} \leqslant \frac{1}{(n-1)} \cdot \int\limits_{t}^{\varepsilon_0} \frac{q_0(r)-1}{r}\, dr\,. \tag{2.9}$$

Для этой цели сравним между собой подинтегральные части выражений в (2.9). Прежде всего, напомним, что при $\lambda \geqslant -1$ имеет место следующее неравенство Бернулли:

$$(1+\lambda)^n \geqslant 1 + n\lambda \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.10}$$

которое непосредственно проверяется методом математической индукции. Далее, установим неравенство

$$\left(1 - \frac{1}{q_0^{1/(n-1)}(r)}\right) \cdot \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{n-1} \cdot \frac{q_0(r)-1}{r}\,. \tag{2.11}$$

В самом деле, (2.11) эквивалентно соотношению

$$1 - \frac{1}{q_0^{1/(n-1)}(r)} \leqslant \frac{1}{n-1} \cdot (q_0(r)-1)\,.$$

При $q_0(r) = 0$ или $q_0(r) = +\infty$ последнее соотношение, а значит, и (2.11), очевидно. Пусть теперь $0 < q_0(r) < \infty$. Обозначив $s = q_0^{1/(n-1)}(r)$, (2.11) можно переписать в виде

$$1 - \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{n-1} \cdot (s^{n-1} - 1)\,.$$

Домножая последнее соотношение на s, получаем

$$s-1\leqslant\frac{1}{n-1}\cdot\left(s^n-s\right),$$

откуда следует, что

$$(n-1)(s-1)\leqslant s^n-s$$

и

$$s^n\geqslant ns-n+1\,. \tag{2.12}$$

Но (2.12) есть соотношение (2.10), в котором положено $s=\lambda+1$. Таким образом, соотношение (2.12) имеет место, а значит выполняется эквивалентное ему неравенство (2.11). Однако, из (2.11) немедленно следует (2.9). Наконец, комбинируя (2.8) и (2.9), получаем (2.5). $\Box$

3. Об отображениях, характеристика которых имеет конечное среднее значение

В работе [20] были введены в рассмотрение так называемые функции конечного среднего колебания (FMO), которые являются естественным обобщением хорошо известного класса функций ограниченного среднего колебания по Джону–Ниренбергу, см., например, [21] и [22]. Этот новый класс функций в работе [23] был распространен в метрические пространства с мерами и уже нашел множество приложений в различных вопросах теории отображений и теории уравнений в частных производных, см., например, статьи [16, 17] и [24–27], а также монографии [7, 12] и [35].

В настоящем разделе мы рассмотрим функции с более жёстким ограничением, для которых среднее значение по малым шарам будет конечным. Как мы увидим, этот подкласс функций с конечным средним колебанием более удобен при изучении различных вопросов и поэтому для этого подкласса FMO могут быть получены более сильные результаты.

Используя подход, применённый при доказательстве леммы 6.1 в [7], мы установим далее некоторое интегральное соотношение для функций с конечным средним значением с весом по малым шарам. Затем указанный результат будет применён для решения проблем локального и граничного поведения одного класса отображений. Следует отметить, что основные результаты здесь получаются как следствия из этого свойства и наших более ранних результатов.

Всюду далее h – хордальное расстояние в $\overline{\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ (см. [6, определение 12.1]). Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *– гомеоморфизм, удовлетворяющий условию* (1.1) *в точке* $x_0 \in D$, *такой, что* $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \geqslant \delta > 0$. *Предположим, найдётся постоянная* $0 < C < \infty$ *такая, что*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, dm(x) \leqslant C\,. \tag{3.1}$$

Тогда найдётся $\varepsilon(x_0) \in (0,\infty)$ *такое, что для всех* $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$ *имеет место неравенство*

$$h(f(x), f(x_0)) \leqslant \alpha_n \cdot |x - x_0|^{\beta_n}\,, \tag{3.2}$$

где постоянная α_n *зависит только от* n *и* δ, *а* β_n *– только от* n *и постоянной* C *в* (3.1).

Теорема 3.2. *Пусть* $f : D \to B(0, r)$, $r > 0$, *– открытое дискретное отображение, удовлетворяющее условию* (1.1) *в точке* $x_0 \in D$. *Предположим, что для некоторой постоянной* $C > 0$ *выполнено соотношение* (3.1). *Тогда найдётся* $\varepsilon(x_0) \in (0, \infty)$ *такое, что для всех* $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$ *имеет место неравенство (3.2), где постоянная* α_n *зависит только от* n *и* r, *а* β_n *– только от* n *и постоянной* C *в* (3.1).

Мы докажем теоремы 3.1 и 3.2 после того, как будет доказано ключевое утверждение, сформулированное ниже, которое представляет самостоятельный интерес для дальнейших наших исследований. Пусть $a > 0$ и $\varphi\colon [a,\infty) \to [0,\infty)$ — неубывающая функция, такая что при некоторых постоянных $\gamma > 0$, $T > 0$ и всех $t \geqslant T$ выполнено неравенство вида

$$\varphi(2t) \leqslant \gamma \cdot \varphi(t)\,. \tag{3.3}$$

Несложные примеры таких функций хорошо известны: 1) $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$; 2) $\varphi(t) = \log t$; 3) $\varphi(t) = t^\alpha + \log^\beta t$ и $\varphi(t) = t^\alpha \log^\beta t$, где $\alpha, \beta \geqslant 0$. Вообще, можно указать достаточно большое количество функций с указанным свойством (см. [28, разд. 4, § 4, гл. I]). Условимся называть такие функции *функциями, удовлетворяющими условию удвоения.*

Пусть теперь $\varphi\colon [a,\infty) \to [0,\infty)$ – функция с условием удвоения, тогда функция $\widetilde{\varphi}(t) := \varphi(1/t)$ не возрастает и определена на полуинтервале $(0, 1/a]$. Имеет место следующее ключевое утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть* $a > 0$, $\varphi\colon [a,\infty) \to [0,\infty)$ *– неубывающая функция с условием удвоения* (3.3), $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $Q : \mathbb{R}^n \to$

$[0, \infty]$ – *измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая при некотором* $0 < C < \infty$ *условию*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(1/\varepsilon)}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x)\, dm(x) \leqslant C\,. \tag{3.4}$$

Тогда найдётся $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что*

$$\int\limits_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0} \frac{\varphi(1/|x - x_0|) Q(x)\, dm(x)}{|x - x_0|^n} \leqslant C_1 \cdot \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right), \qquad \varepsilon \to 0\,,$$

где $C_1 := \frac{\gamma C \Omega_n 2^n}{\log 2}$.

Доказательство. Возьмём за основу подход, использованный при доказательстве [7, лемма 6.1]. Не ограничивая общности, можно в дальнейшем положить $x_0 = 0$. Так как по условию выполнено соотношение (3.4), то найдётся $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $Q \in L^1(B(0, \varepsilon_0))$. Можно считать, что $1/a < \varepsilon_0$, где a – число из области определения функции φ и, в частности, число $1/T$ из (3.3) также меньше ε_0.

Заметим также, что ввиду соотношения (3.4)

$$\delta := \sup_{r \in (0, \varepsilon_0)} \frac{\varphi(1/r)}{\Omega_n \cdot r^n} \int\limits_{B(0, r)} Q(x)\, dm(x) < \infty\,. \tag{3.5}$$

Пусть теперь $\varepsilon < 2^{-1}\varepsilon_0$, $\varepsilon_k = 2^{-k+1}\varepsilon_0$, $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_{k+1} \leqslant |x| < \varepsilon_k\}$, $B_k = B(0, \varepsilon_k)$. Пусть также N – натуральное число такое, что $\varepsilon \in [\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_N)$. Обозначим

$$\alpha(t) := t^{-n} \cdot \varphi(1/t), \quad 0 < t < \min\{1, a\}\,,$$

$$A(\varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < \varepsilon_0\}\,.$$

Заметим, что

$$A(\varepsilon, \varepsilon_0) \subset A(\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_0) = \bigcup_{k=1}^{N} A_k\,.$$

Поскольку $A_k \subset B_k$,

$$|x|^{-n} \leqslant \Omega_n 2^n / m(B_k) \qquad \forall\, x \in A_k\,, \tag{3.6}$$

где, как обычно, Ω_n обозначает меру единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, для произвольного $x \in A_k$ с учётом условия удвоения (3.3), будем иметь: $|x|^n \geqslant 2^{-n}\varepsilon_k^n$, откуда $|x| \geqslant \varepsilon_k/2$ и

$$\varphi(1/|x|) \leqslant \varphi(2/\varepsilon_k) \leqslant \gamma \cdot \varphi(1/\varepsilon_k)\,, \qquad \forall\, x \in A_k\,. \tag{3.7}$$

Учитывая соотношения (3.6) и (3.7), а также определение числа δ в (3.5), мы получим, что

$$\eta(\varepsilon) := \int\limits_{A(\varepsilon_{N+1},\varepsilon_0)} Q(x)\alpha(|x|)\,dm(x) = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{A_k} Q(x)\varphi(1/|x|)|x|^{-n}\,dm(x)$$

$$\leqslant \gamma\Omega_n 2^n \sum_{k=1}^{N}\frac{\varphi(1/\varepsilon_k)}{m(B_k)}\int\limits_{A_k} Q(x)\,dm(x) \tag{3.8}$$

$$\leqslant \gamma\Omega_n 2^n \sum_{k=1}^{N}\frac{\varphi(1/\varepsilon_k)}{\Omega_n\cdot\varepsilon_k^n}\int\limits_{B_k} Q(x)\,dm(x) \leqslant \gamma\Omega_n 2^n N\delta\,.$$

Пусть $\varepsilon_0 \in (0, 2^{-1})$. Поскольку $\varepsilon < \varepsilon_N$ по выбору N, то

$$N \;<\; N \;+\; \log_2\left(\frac{1}{2\varepsilon_0}\right) \;=\; \log_2\frac{1}{\varepsilon_N} \;<\; \log_2\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}\,. \tag{3.9}$$

Объединяя (3.8) и (3.9), мы получим, что

$$\eta(\varepsilon) := \int\limits_{A(\varepsilon_{N+1},\varepsilon_0)} Q(x)\alpha(|x|)\,dm(x) \leqslant \frac{\gamma\delta\Omega_n 2^n}{\log 2}\cdot\log\frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Обозначив $C_1 := \frac{\gamma C\Omega_n 2^n}{\log 2}$ и вспоминая о том, что $\alpha(t) = t^{-n}\cdot\varphi(1/t)$, последнее соотношение можно переписать в виде

$$\int\limits_{A(\varepsilon_{N+1},\varepsilon_0)} \frac{\varphi(1/|x|)Q(x)}{|x|^n}\,dm(x) \leqslant C_1\cdot\log\frac{1}{\varepsilon}\,,$$

откуда, поскольку $A(\varepsilon,\varepsilon_0) \subset A(\varepsilon_{N+1},\varepsilon_0)$, следует, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(1/|x|)Q(x)}{|x|^n}\,dm(x) \leqslant C_1\cdot\log\frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Поскольку $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ – произвольно, утверждение леммы установлено. $\Box$

Доказательство теоремы 3.1 вытекает из леммы 3.1 и [7, лемма 7.6] при $\varphi(t) \equiv 1$, $\psi(t) = 1/t$; теоремы 3.2 – из леммы 3.1 и [29, лемма 5] при $\varphi(t) \equiv 1$, $\psi(t) = 1/t$. $\Box$

Основные результаты заметки могут быть применены в области дифференциальных уравнений, в частности, уравнений Бельтрами на плоскости, см., например, [15–19] и [35].

4. О граничном поведении решений уравнений Бельтрами

В недавних работах, посвящённых изучению краевых задач для уравнения Бельтрами в анизотропных и неоднородных средах, использовалась логарифмическая ёмкость (см., например, [30–34]). Как известно, логарифмическая ёмкость совпадает с так называемым трансфинитным диаметром множества. Из этой геометрической характеристики видно, что множества нулевой ёмкости (и, как следствие, функции, измеримые относительно логарифмической ёмкости) инвариантны при непрерывных по Гёльдеру отображениях. Это обстоятельство является мотивировкой нашего исследования, которому посвящён данный раздел статьи.

В дальнейшем, D – область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е., связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. Пусть $\mu\colon D\to\mathbb{C}$ – измеримая функция такая, что $|\mu(z)|<1$ почти всюду в D. *Уравнением Бельтрами* называется уравнение вида

$$f_{\overline{z}}=\mu(z)\,f_z\,, \tag{4.1}$$

где $f_{\overline{z}}=\overline{\partial}f=(f_x+if_y)/2$, $f_z=\partial f=(f_x-if_y)/2$, $z=x+iy$, f_x и f_y частные производные f по x и y, соответственно. Функция μ называется *комплексной дилатацией*, а

$$K_{\mu}(z)=\frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|} \tag{4.2}$$

– *максимальной дилатацией* уравнения (4.1). *Якобиан* $J_f(z)$ сохраняющего ориентацию и отображения f в точке z, имеющего частные производные в этой точке, вычисляется по правилу $J_f(z)=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2$. В дальнейшем запись $K_{\mu}(z)$ может использоваться в следующих двух значениях: если задана функция μ, то мы вычисляем K_{μ} посредством формулы (4.2); если же задано отображение f, имеющее частные производные, то мы вычисляем $\mu=\mu_f$ по правилу

$$\mu(z)=\mu_f(z)=\begin{cases}|f_z|/|f_{\overline{z}}|, & f_z\ne 0\,,\\ 0, & f_z=0\end{cases}$$

при этом, согласно формуле (4.2), полагаем: $K_{\mu}(z)=K_{\mu_f}(z)$. Уравнение (4.1) называется *вырожденным*, если $\operatorname{ess\,sup} K_{\mu}=\infty$. Существование гомеоморфных решений класса Соболева $W_{\rm loc}^{1,1}$ установлено для вырожденных уравнений Бельтрами при соответствующих условиях на K_μ, см., например, монографии [7] и [35]. В дальнейшем используются следующие стандартные обозначения для кругов и окружностей в комплексной плоскости:

$$\mathbb{D} := D(0,1), \quad D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} .$$

Важнейшим инструментом исследования уравнений Бельтрами является метод модулей. Следующее утверждение связывает решения этого уравнения с классом кольцевых Q-отображений, см. [36, теорема 3.1], [11, теорема 5.3] и [37, теорема 1].

Предложение 4.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ – гомеоморфное решение уравнения* (4.1) *такое, что $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(D)$. Тогда f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in D$ при $Q(z) = K_\mu(z)$.*

Следующее утверждение относится к вопросу о непрерывном продолжении решений (4.1) на единичную окружность. Согласно [38, следствие 7.4], имеет место следующее

Предложение 4.2. *Пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ – измеримая в $\mathbb{D}$ функция такая, что $|\mu(z)| < 1$ п.в., и пусть также $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ – гомеоморфное решение уравнения* (4.1)*, принадлежащее $W^{1,1}_{\rm loc}$. Если для всех $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ выполнено условие*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_\mu(z)\, dm(z) < \infty ,$$

то f имеет гомеоморфное продолжение $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$.

Нам также понадобится результат о локальном поведении кольцевых Q-гомеоморфизмов во внутренних точках области, см. [36, следствие 4.1].

Предложение 4.3. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{C}$, $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция, и пусть $f : D \to D'$ – кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $z_0 \in D$ такой, что $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$. Предположим, что существуют $0 < \varepsilon_0 < {\rm dist}(z_0, \partial D)$ и измеримая по Лебегу функция $\psi : (0, \infty) \to [0, \infty]$, удовлетворяющая условию*

$$0 < I(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \qquad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) ,$$

при этом,

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(z)\,\psi^2(|z-z_0|)\,dm(z) \leqslant C\cdot I(\varepsilon) \qquad \forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\,. \tag{4.3}$$

Тогда для всех $z\in D(z_0,\varepsilon_0)$

$$h(f(z),f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta}\exp\left\{-\frac{2\pi}{C}I(|z-z_0|)\right\}.$$

Полагая $\psi(t)=\frac{1}{t}$ в формулировке предложения 4.3, получаем следующее

Следствие 4.1. *Предположим, что в условиях предложения 4.3 вместо соотношения* (4.3) *имеет место условие*

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(z)}{|z-z_0|^2}\,dm(z) \leqslant C\log\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\,. \tag{4.4}$$

Тогда для всех $z\in D(z_0,\varepsilon_0)$

$$h(f(z),f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta}\varepsilon_0^{-2\pi/C}|z-z_0|^{2\pi/C}\,.$$

Следующая лемма связывает среднее значение функции по кругу и интеграл, участвующий в левой части неравенства (4.4).

Лемма 4.1. *Пусть* $Q:\mathbb{C}\to[0,\infty]$ *– измеримая по Лебегу функция, при этом, существуют* $0<\delta_0<1$ *и постоянная* $C_*>0$ *такие, что*

$$\sup\limits_{r\in(0,\delta_0)}\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{B(z_0,r)} Q(z)\;dm(z)<C_* \qquad \forall\;z_0\in\partial\mathbb{D}\,.$$

Тогда найдётся $\varepsilon_0>0$ *такое, что для всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *и* $z_0\in\partial\mathbb{D}$

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{Q(z)\,dm(z)}{|z-z_0|^2}\leqslant\frac{4\pi C_*}{\log 2}\log\frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Доказательство леммы 4.1 немедленно следует из леммы 3.1 при $n=2$, $\varphi(t)\equiv 1$ и $C_*=C$. $\Box$

Ключевым утверждением данного раздела является следующая

Лемма 4.2. *Пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ – измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию $|\mu(z)| < 1$ для п.в. $z \in \mathbb{D}$. Предположим, $f_0 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f_0(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (4.1), принадлежащее пространству $W^{1,1}_{\rm loc}$. Если $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$ и, кроме того, найдутся $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и $C \in [1,\infty)$, такие что*

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_\mu(z)\; dm(z) < C \qquad \forall\, \zeta \in \partial\mathbb{D}\,, \tag{4.5}$$

то f_0 имеет гомеоморфное продолжение $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$, при этом,

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant 64\,\varepsilon_0^{-\alpha}|z_2 - z_1|^\alpha \qquad \forall\; z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D} : |z_2 - z_1| < \delta_0\,,$$

где $\delta_0 := \min\left\{\frac{1}{2}, \varepsilon_0^2\right\}$ и $\alpha := \frac{\log 2}{68C}$.

Доказательство. Заметим, что f_0 допускает гомеоморфное продолжение $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ в силу предложения 4.2. Продолжим f по симметрии на внешность круга $\mathbb{D}$, полагая

$$F(z) = \left\{ \begin{array}{rl} f(z), & |z| < 1\,, \\ 1/\overline{f\,(1/\overline{z})}, & |z| > 1\,. \end{array} \right.$$

При помощи прямых вычислений несложно установить, что комплексная дилатация отображения F имеет вид

$$\mu_F(z) = \left\{ \begin{array}{rl} \mu(z), & |z| < 1\,, \\ \frac{z^2}{\overline{z}^2}\overline{\mu\,(1/\overline{z})}, & |z| > 1\,. \end{array} \right.$$

По условию, $f_0 \in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{D})$, поэтому также $F \in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{D})$. Покажем большее, а именно, что $F \in W^{1,1}(\mathbb{D})$ (другими словами, мы утверждаем, что частные производные отображения F не только локально, но и глобально интегрируемы в $(\mathbb{D})$). Для этого заметим, что

$$|F_{\overline{z}}| \leqslant |F_z| \leqslant |F_z| + |F_{\overline{z}}| \;\leqslant K^{\frac{1}{2}}_{\mu_F}(z)\; J^{\frac{1}{2}}_F(z)\,.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\, dm(z) \;\leqslant\; \int\limits_{\mathbb{D}} K^{\frac{1}{2}}_{\mu_F}(z)\; J^{\frac{1}{2}}_F(z)\, dm(z)\,.$$

Далее, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\, dm(z) \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{D}} K_\mu(z)\, dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{D}} J_F(z)\, dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.6}$$

В силу гомеоморфности отображения F, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{D}} J_F(z)\,dm(z) \leqslant m(F(\mathbb{D})) = \pi \tag{4.7}$$

см. [39, теоремы 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5]. Учитывая условие $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$, из оценок (4.6) и (4.7) получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\,dm(z) \leqslant \left(\pi \int\limits_{\mathbb{D}} K_\mu(z)\,dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\,. \tag{4.8}$$

Покажем, теперь, что $F \in W^{1,1}(D_R)$ для любого $R > 1$, где $D_R := D(0,R)$. Действительно, по аддитивности интеграла Лебега, имеем равенство

$$\int\limits_{|z|\leqslant R} |F_z|\,dm(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\,dm(z) + \int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} |F_z|\,dm(z)\,.$$

В силу (4.8) имеем: $\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\,dm(z) < \infty$.

Заметим, что $F \in ACL(\mathbb{C})$. В самом деле, единичный круг можно разбить на не более, чем счётное число прямоугольников, в которых F абсолютно непрерывна на почти всех на координатных отрезках. Применив в каждом из прямоугольников критерий абсолютной непрерывности через интегрирование производных, см. [13, теорема IV.7.4], и воспользовавшись непрерывностью f в $\overline{\mathbb{D}}$, мы получим абсолютную непрерывность f на отрезках в $\overline{\mathbb{D}}$, одна из концевых точек которых может принадлежать единичной окружности. Аналогично можно рассуждать для области $\mathbb{C} \setminus D$. В таком случае, абсолютная непрерывность на линиях F в $\mathbb{C}$ вытекает из критерия [13, теорема IV.7.4] и аддитивности одномерного интеграла Лебега.

Осталось показать, что $\int\limits_{1<|z|\leqslant R} |F_z|\,dm(z) < \infty$. Заметим, что в силу гомеоморфности отображения F

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} J_F(z)\,dm(z) \leqslant \int\limits_{D_R} J_F(z)\,dm(z) \leqslant m(F(D_R)) < \infty\,, \tag{4.9}$$

см. [39, теоремы 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5]. Далее, покажем, что

$$\int\limits_{1<|z|<R} K_{\mu_F}(z)\,dm(z) < \infty\,.$$

Сделав замену переменных $w = \frac{1}{\overline{z}}$ и воспользовавшись [39, теорема 3.25], преобразуем этот интеграл к виду:

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu_F}(z)\,dm(z) = \int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\,dm(z)$$

$$= \int\limits_{1/R\leqslant|z|\leqslant 1} K_{\mu}(w)\,\frac{dm(w)}{|w|^4}\,.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu_F}(z)\,dm(z) \leqslant R^4\int\limits_{\mathbb{D}} K_{\mu}(w)\,dm(w) < \infty\,. \tag{4.10}$$

Применяя неравенство Гёльдера и оценки (4.9), (4.10), получаем:

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} |F_z|\,dm(z) \leqslant \int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K^{\frac{1}{2}}_{\mu_F}(z)\; J^{\frac{1}{2}}_{F}(z)\,dm(z)$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu_F}(z)\;dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} J_F(z)\,dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\,.$$

Включение $F\in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{C})$ установлено.

Оценим теперь интеграл $\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\,dm(z)$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Для этого, разобьём его на две части:

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\,dm(z) = \int\limits_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\,dm(z) + \int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu_F}(z)\,dm(z)\,. \tag{4.11}$$

Сделав замену переменных $w = \frac{1}{\overline{z}}$ и воспользовавшись [39, теорема 3.25], преобразуем второй интеграл к виду:

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu_F}(z)\,dm(z) = \int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\,dm(z) = \int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}} K_{\mu}\,(w)\;\frac{dm(w)}{|w|^4}.$$

Проверим следующее неравенство:

$$\max_{w\in D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}}\frac{1}{|w|^4} < 16\,,\qquad \varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\,.$$

Действительно,

$$\max_{|w-\zeta|=\varepsilon}\frac{1}{|w|^2}=\max_{\varphi\in[0,2\pi)}\frac{1}{|\zeta+\varepsilon e^{i\varphi}|^2}=\max_{\varphi\in[0,2\pi)}\frac{1}{|\zeta|^2+2\varepsilon Re(\zeta e^{-i\varphi})+\varepsilon^2}$$

$$=\max_{\varphi\in[0,2\pi)}\frac{1}{1+2\varepsilon\cos(\varphi-\vartheta)+\varepsilon^2}=\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}<4\,, \tag{4.12}$$

где $w=\zeta+\varepsilon e^{i\varphi}, \zeta=e^{i\vartheta}$.

Таким образом, получаем:

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu_F}(z)\,dm(z)\leqslant\max_{w\in D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}}\frac{1}{|w|^4}\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}}K_\mu\left(w\right)\,dm(w)$$

$$<16\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}}K_\mu\left(w\right)\,dm(w)\,.$$

Учитывая оценку (4.12) и равенство (4.11), мы получим отсюда, что

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\,dm(z)<17\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}}K_\mu(w)\,dm(w)\,. \tag{4.13}$$

Из условий (4.5) и (4.13) вытекает, что $\sup\limits_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)}K_{\mu_F}(z)\,dm(z)<17\sup\limits_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int\limits_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)}K_\mu(z)\,dm(z)<17C$. Далее, применяя лемму 4.1 при $C_*=17C$, при некотором $0<\varepsilon_0<1$ получаем оценку

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{K_{F_\mu}(z)\,dm(z)}{|z-z_0|^2}\leqslant\frac{68\pi C}{\log 2}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\,,\quad\forall\,z_0\in\partial\mathbb{D}\,.$$

Заметим, что $\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})}=1+\frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})}<2$ для всех $\varepsilon\in(0,\delta_0)$. Тогда

$$\log\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{-1}\cdot\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{K_F(z)\,dm(z)}{|z-z_0|^2}\leqslant\frac{68\pi C}{\log 2}\,\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)}\leqslant\frac{136\pi C}{\log 2}\,.$$

Окончательно, полагая $\varepsilon:=|z_2-z_1|$ и применяя следствие 4.1 с учётом предложения 4.1, получаем оценку:

$$h(f(z_1),f(z_2))\leqslant 32\,\varepsilon_0^{-\alpha}\,|z_1-z_2|^\alpha\,,\qquad\alpha=\frac{\log 2}{68C}\,.$$

Поскольку z_1 и $z_2\in\partial\mathbb{D}$, мы получим, что

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant 64\,\varepsilon_0^{-\alpha}\,|z_1-z_2|^\alpha\,.$$

Лемма доказана. □

В завершение нашей статьи приведем следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *– измеримая по Лебегу функция и* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *– гомеоморфное решение уравнения* (4.1) *класса* $W^{1,1}_{\rm loc}$. *Если* $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$ *и, кроме того, найдутся* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *и* $C \in [1,\infty)$ *такие, что*

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_\mu(z)\, dm(z) < C \qquad \forall\, \zeta \in \partial\mathbb{D}\,,$$

то f *имеет гомеоморфное продолжение на границу, непрерывное по Гёльдеру.*

Доказательство. В обозначениях леммы 4.2, при $|z_1 - z_2| \geqslant \delta_0$ имеем тривиальную оценку $|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant 2 = \frac{2}{\delta_0^\alpha}\,\delta_0^\alpha \leqslant \frac{2}{\delta_0^\alpha}\,|z_1 - z_2|^\alpha$. Положим $L := \max\left\{\frac{2}{\delta_0^\alpha}, 64\,\varepsilon_0^{-\alpha}\right\}$. Тогда по лемме 4.2

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant L\,|z_1 - z_2|^\alpha \qquad \forall z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D} : |z_2 - z_1| < \delta_0\,,$$

что и требовалось установить. □

Литература

[1] V. Ya. Gutlyanskiĭ, A. Golberg, *On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space* // J. Anal. Math., **109** (2009), 233–251.

[2] B. Bojarski, V. Gutlyanskii, O. Martio, V. Ryazanov, *Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane*, EMS Tracts in Mathematics **19**, European Mathematical Society, Zürich, 2013.

[3] Г. Д. Суворов, *Обобщенный принцип длины и площади в теории отображений*, Наукова думка, Киев, 1985.

[4] Р. Р. Салимов, *О липшицевости одного класса отображений* // Мат. заметки, **94** (2013), No. 4, 591–599; transl. in Math. Notes, **94** (2013), No. 3–4, 559–566.

[5] Р. Р. Салимов, *Нижние оценки p−модуля и отображения класса Соболева* // Алгебра и анализ, **26** (2014), No. 6, 143–171; transl. in St. Petersburg Math. J., **26** (2015), No. 6, 965–984.

[6] J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math. **229**, Springer–Verlag, Berlin etc., 1971.

[7] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.

[8] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On ring solutions of Beltrami equations* // J. Anal. Math., **96** (2005), 117–150.

[9] В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов, *Равностепенно непрерывные классы кольцевых $Q-$гомеоморфизмов* // Sibirsk. Mat. Zh., **48** (2007), No. 6, 1361–1376; transl. in Siberian Math. J., **48** (2007), No. 6, 1093–1105.

[10] V. Ryazanov, E. Sevostyanov, *Toward the theory of ring Q-homeomorphisms* // Israel J. Math., **168** (2008), 101–118.

[11] Д. А. Ковтонюк, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории отображений классов Соболева и Орлича-Соболева*, под общей редакцией В.И. Рязанова, Наукова думка, Киев, 2013.

[12] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории классов Орлича–Соболева* // Алгебра и анализ, **25** (2013), No. 6, 50–102; transl. in St. Petersburg Math. J., **25** (2014), No. 6, 929–963.

[13] С. Сакс, *Теория интеграла*, Издательство иностранной литературы, Москва, 1949.

[14] Е. А. Севостьянов, *Исследование пространственных отображений геометрическим методом*, Наукова думка, Киев, 2014.

[15] B. Bojarski, V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, *On the Beltrami equations with two characteristics* // Complex Var. Elliptic Equ., **54** (2009), No. 10, 935–950.

[16] B. Bojarski, V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, *On existence and representation of solutions for general degenerate Beltrami equations* // Complex Var. Elliptic Equ., **59** (2014), No. 1, 67–75.

[17] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, E. Yakubov, *The Beltrami equations and prime ends* // Укр. матем. вісн., **12** (2015), No. 1, 27–66; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.), **210** (2015), No. 1, 22–51.

[18] Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами* // Алгебра и анализ, **25** (2013), No. 4, 101–124; transl. in St. Petersburg Math. J., **25** (2014), No. 4, 587–603.

[19] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On strong solutions of the Beltrami equations* // Complex Var. Elliptic Equ., **55** (2010), No. 1–3, 219–236.

[20] А. А. Игнатьев, В. И. Рязанов, *Конечное среднее колебание в теории отображений* // Укр. матем. вісн., **2** (2005), No. 3, 395–417; transl. in Ukr. Math. Bull., **2** (2005), No. 3, 403–424.

[21] O. Martio, V. Ryazanov, M. Vuorinen, *BMO and injectivity of space quasiregular mappings* // Math. Nachr., **205** (1999), 149–161.

[22] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation* // Siberian Adv. Math., **11** (2001), No. 2, 94–130.

[23] В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Слабо плоские пространства и границы в теории отображений* // Укр. матем. вісн., **4** (2007), No. 2, 199–234; transl. in Ukr. Math. Bull., **4** (2007), No. 2, 199–234.

[24] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Finite mean oscillation and the Beltrami equation* // Israel J. Math., **153** (2006), 247–266.

[25] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On integral conditions in the mapping theory* // Укр. матем. вісн., **7** (2010), No. 1, 73–87; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.), **173** (2011), No. 4, 397–407.

[26] Е. С. Афанасьева, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Об отображениях классов Орлича–Соболева на римановых многообразиях* // Укр. матем. вісн., **8** (2011), No. 3, 319–342; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.), **181** (2012), No. 1, 1–17.

[27] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Integral conditions in the theory of the Beltrami equations* // Complex Var. Elliptic Equ., **57** (2012), No. 12, 1247–1270.

[28] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Гос. издат. физ.-мат. лит., Москва, 1958.

[29] Е. А. Севостьянов, *О нормальности семейств пространственных отображений с ветвлением* // Укр. матем. ж., **60** (2008), No. 10, 1389–1400; transl. in Ukrainian Math. J., **60** (2008), No. 10, 1618–1332.

[30] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, A. Yefimushkin, *On the boundary value problems for quasiconformal functions in the plane* // Укр. матем. вісн., **12** (2015), No. 3, 363–389; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.), **214** (2016), No. 2, 200–219.

[31] V. Ya. Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, E. Yakubov, A. S. Yefimushkin, *On boundary-value problems in domains without (A)-condition* // Dopov. Nac. acad. nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, (2019), No. 3, 17–24.

[32] A. Efimushkin, V. Ryazanov, *On the Riemann-Hilbert problem for the Beltrami equations in quasidisks* // Укр. матем. вісн., **12** (2015), No. 2, 190–209; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.), **211** (2015), No. 5, 646–659.

[33] A. Efimushkin, V. Ryazanov, *On the Riemann–Hilbert Problem for the Beltrami Equations* // Contemp. Math., **667** (2016), 299–316.

[34] A. Yefimushkin, *On Neumann and Poincare Problems in A-harmonic Analysis* // Advances in Analysis., **1** (2016), No. 2, 114–120.

[35] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami Equation. A Geometric Approach*, Developments in Mathematics, **26**, Springer, New York, 2012.

[36] T. Lomako, R. Salimov, E. Sevostyanov, *On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations* // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math., **1(LIX)** (2010), No. 2, 263–274.

[37] D. A. Kovtonyuk, I. V. Petkov, V. I. Ryazanov, *The Beltrami equations and lower Q-homeomorphisms* // Труды ИПММ НАН Украины, **21** (2010), 114–117.

[38] V. Ryazanov, R. Salimov, U. Srebro, E. Yakubov, *On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations* // Contemp. Math., **591** (2013), 211–242.

[39] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, Москва, 1987.

Сведения об авторах

Владимир Ильич Рязанов
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск, Украина
Черкасский национальный университет им. Богдана Хмельницкого,
Черкассы, Украина
E-Mail: vl.ryazanov1@gmail.com

Руслан Радикович Салимов
Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: ruslan.salimov1@gmail.com

Евгений Александрович Севостьянов
Житомирский государственный университет имени Ивана Франко
Житомир, Украина,
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск, Украина
E-Mail: esevostyanov2009@gmail.com